Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(7)} + 13y^{(5)} + 36y^{(3)} = 0.$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = 2x \operatorname{tg} y.$$

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = |x|$ per $-T/2 \leq x < T/2$.

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo $x + 2y + 5z = 22$. Interpretare il risultato geometricamente.

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

   a. È chiusa?

   b. È esatta nel dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

   c. È esatta nel dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$?

   Motivare le tre risposte.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie parabolica di equazione $x^2 + y^2 + z = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

[1] 23.02.2007. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (z^2, x^2, y^2), \qquad S = \{(x, y, z) : z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 3\}.$$

   Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.

7. Calcolare la lunghezza del grafico della funzione $f(x) = x^2 + 2x + 1$ per $0 \leq x \leq 1$.

Punteggio massimo: 5 pt. per gli esercizi 2, 4 e 6, 4 pt. per gli esercizi 1, 3 e 5, e tre pt. per l'esercizio 7.