Scritto Generale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} + 64y = 0.$$

Soluzione: Sostituendo $y = e^{\lambda x}$ risulta $\lambda^6 = -64$. Quindi $\lambda = 2[\cos(\frac{\pi}{6}(2k+1))+i\sin(\frac{\pi}{6}(2k+1))]$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{x\sqrt{3}} \cos(x) + c_2 e^{x\sqrt{3}} \sin(x) + c_3 \cos(2x) \\ &\quad + c_4 \sin(2x) + c_5 e^{-x\sqrt{3}} \cos(x) + c_6 e^{-x\sqrt{3}} \sin(x). \end{aligned}$$

2A. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{3x^2 + 2}{2(y-1)}.$$

Indicare una funzione continua $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ che è soluzione per $x > 0$ e verifica la condizione $y(0^+) = 1$. Poichè non si riesce a trovare una soluzione $y(x)$ in un intorno di $x = 0$ che verifica la condizione $y(0) = 1$? **Soluzione**: Dalla separazione $2(y-1)y' = 3x^2 + 2$ segue $(y-1)^2 = x^3 + 2x + \text{cost.}$ oppure $y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x + \text{cost.}}$, definita per $x \geq x_0$ dove $x_0^3 + 2x_0 + \text{cost.} = 0$. Sotto la condizione $y(0^+) = 1$ si trovano le due soluzioni $y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x}$ definite per $x \geq 0$. La non esistenza di una soluzione in un intorno di $x = 0$ che verifica la condizione $y(0) = 1$ non contraddice la teoria, poichè la funzione $(x, y) \mapsto (3x^2 + 2)/2(y-1)$ non si può definire in $(0, 1)$.

2B. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo T tale che $f(x) = x^2$ per $-T/2 \leq x \leq T/2$.

a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$. È uniformemente convergente la serie di Fourier? Spiegare la risposta.

[1] 08.07.2005. Chi ha sostenuto il corso di analisi matematica 3 secondo il programma dell'AA 2003-2004, farà l'esercizio 2A. Chi l'ha sostenuto secondo il programma dell'AA 2004-2005, farà l'esercizio 2B.

Soluzione: Siccome ls f è pari, abbiamo $b_k = 0$ per $k = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^2\,dx = \frac{1}{6}T^2,\\
a_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^2\cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)dx = \frac{4}{T}\left[\frac{T}{2k\pi}x^2\sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)\right]_{x=0}^{T/2}\\
&- \frac{4}{T}\,\frac{T}{2k\pi}\int_0^{T/2} 2x\sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)dx = \frac{2}{k\pi}\left[2x\frac{T}{2k\pi}\cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)\right]_{x=0}^{T/2}\\
&- \frac{2}{k\pi}\,\frac{2T}{2k\pi}\int_0^{T/2}\cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)dx = \frac{T^2}{k^2\pi^2}(-1)^k.
\end{aligned}$$

Siccome ls f è continua e regolare a tratti in $x \in \mathbb{R}$, la serie di Fourier è uniformemente convergente in $x \in \mathbb{R}$ e ha $f(x)$ come la sua somma.

3. Calcolare il minimo (assoluto) della funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sotto i vincoli $x+2y+3z = 6$ e $3x+y+2z = 6$. Interpretare il risultato geometricamente. **Soluzione**: Sia $H(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2+y^2+z^2-\lambda(x+2y + 3z - 6) - \mu(3x + y + 2z - 6)$. Allora

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial x} = 2x - \lambda - 3\mu = 0, &&\frac{\partial H}{\partial y} = 2y - 2\lambda - \mu = 0,\\
&\frac{\partial H}{\partial z} = 2z - 3\lambda - 2\mu = 0,\\
&\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -x - 2y - 3z + 6 = 0, &&\frac{\partial H}{\partial \mu} = -3x - y - 2z + 6 = 0.
\end{aligned}$$

Allora

$$x = \frac{\lambda + 3\mu}{2}, \quad y = \frac{2\lambda + \mu}{2}, \quad z = \frac{3\lambda + 2\mu}{2}.$$

Sostituendola nei vincoli risulta il sistema lineare

$$\begin{aligned}
\frac{14\lambda + 11\mu}{2} &= \frac{\lambda + 3\mu}{2} + 2\frac{2\lambda + \mu}{2} + 3\frac{3\lambda + 2\mu}{2} = 6,\\
\frac{11\lambda + 14\mu}{2} &= 3\frac{\lambda + 3\mu}{2} + \frac{2\lambda + \mu}{2} + 2\frac{3\lambda + 2\mu}{2} = 6.
\end{aligned}$$

Dalla sua soluzione $\lambda = \mu = (12/25)$ seguono $(x, y, z) = (\frac{24}{25}, \frac{18}{25}, \frac{6}{5})$ e $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{72}{25}$. Geometricamente abbiamo dimostrato che la distanza tra l'origine e la retta intersezione dei piani $x + 2y + 3z = 6$ e $3x + y + 2z = 6$ è uguale a $\frac{6}{5}\sqrt{2}$.

4. Dimostrare, mediante il teorema del Dini, che la seguente equazione

$$F(x,y,z) = y - 2x + \ln|xz| = 0$$

definisce una funzione $z = f(x,y)$ di classe C^1 in un intorno del punto $(1,2,-1)$. Determinare il piano tangente alla superficie $\{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$ in questo punto. **Soluzione**: Abbiamo $F_x = -2 + (1/x)$, $F_y = 1$ e $F_z = (1/z)$. Nel punto $(1,2,-1)$ abbiamo $\operatorname{grad} F = (-1,1,-1)$ e quindi l'equazione del piano tangente è $-(x-1)+1(y-2)-1(z+1) = 0$ oppure $-x+y-z = 2$. Siccome non si annullano le tre derivate parziali in questo punto, esistono un intorno U di $(1,2)$ e una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $F(x,y,f(x,y)) = 0$ per $(x,y) \in U$. Infatti, $f(x,y) = -e^{2x-y}/x$.

5. Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2y$ e sopra il piano xy. **Soluzione**: Il disco $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2y$si può intestare nel seguente modo: $D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2\sin\theta\}$. La superfice sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ per $z \geq 0$ si descrive nel seguente modo: $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{4-r^2})$. In tal caso

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ -\frac{r}{\sqrt{4-r^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi il prodotto vettore delle sue colonne vale

$$(A,B,C) = \left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{4-r^2}}, \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{4-r^2}}, r\right),$$

e dunque $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = 2r/\sqrt{4-r^2}$. Quindi

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta = \int_0^\pi \left[-2\sqrt{4-r^2}\right]_{r=0}^{2\sin\theta} d\theta \\ &= 4\int_0^\pi (1-|\cos\theta|)d\theta = 4\pi - 8\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta = 4\pi - 8.\end{aligned}$$

6. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\,d\sigma$, dove

$$\vec{\boldsymbol{F}} = (y, 2x, 0)$$

e S è la porzione della paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ che si trova sopra il piano $z = 0$. Indicare al quale versore normale corrisponde il risultato.
Soluzione 1: Invece della S si può anche calcolare l'integrale sul disco $S' = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ [dove $\nu = (0, 0, 1)$], poichè S e S' hanno la stessa curva di frontiera. Siccome $\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}} = (0, 0, 1)$, risulta

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma = \iint_{S'} (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma = \iint_{x^2+y^2\leq 1} dxdy = \pi.$$

Soluzione 2: Scegliendo l'orientamento antiorario lungo la curva di frontiera per farlo corrispondere al versore normale uguale a $(0, 0, 1)$ nell'apice $(0, 0, 1)$ della paraboloide, risulta secondo il Teorema di Stokes

$$\begin{aligned}\iint_S (\operatorname{rot} \vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma &= \int_{\partial S} (y\, dx + 2x\, dy) = \int_0^{2\pi} (\sin\theta\, d(\cos\theta) + 2\cos\theta\, d(\sin\theta)) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos(2\theta)\right) d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{3}{4}\sin(2\theta)\right]_{\theta=0}^{2\pi} = \pi.\end{aligned}$$

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3), \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Soluzione: Si ha $\varphi'(t) = (1, 2t, 2t^2)$ e quindi

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{1 + (2t)^2 + (2t^2)^2} = 1 + 2t^2.$$

Di conseguenza, $L = \int_0^2 (1 + 2t^2)dt = \frac{22}{3}$.