Primo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y^{(4)} - 5y^{(3)} + 6y'' = 0.$$
Soluzione: L'equazione caratteristica $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0$ oppure $\lambda^2(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ ha le radici semplici 2 e 3 e la radice doppia 0. Dunque la soluzione generale è $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{3x}$.

2. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y'' - \frac{2}{x}\, y' + \frac{2}{x^2}\, y = 1,$$
osservando che $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$ sono soluzioni della corrispondente equazione omogenea. **Soluzione**: Dato che $y_1'(x) = 1$ e $y_2'(x) = 2x$, la soluzione generale ha la forma $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, dove
$$\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Siccome la matrice ha determinante x^2, risulta
$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 2x & -x^2 \\ -1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}.$$
Quindi $c_1(x) = c_1 - x$ e $c_2(x) = c_2 + \ln|x|$. La soluzione generale è $y(x) = [c_1 - x]x + [c_2 + \ln|x|]x^2 = c_1 x + \tilde{c}_2 x^2 + x^2 \ln|x|$, dove $\tilde{c}_2 = c_2 - 1$.

3. Calcolare la soluzione del problema iniziale
$$y' = \frac{-2xy^2}{x^2+1}, \qquad y(0) = 1.$$
Soluzione: La separazione delle variabili ci dà
$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2x}{x^2+1}\, dx,$$
sotto la condizione che $y \neq 0$. Quindi $\frac{1}{y} = \ln(x^2+1) + \text{cost}$. Dunque $y = 1/[\text{cost} + \ln(x^2+1)]$, più la soluzione costante $y = 0$. Sostituendo $y(0) = 1$ troviamo $\text{cost} = 1$ e quindi $y = 1/[1 + \ln(x^2+1)]$.

[1] 5.04.2004

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\left(2xy + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(x^2 - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy.$$

a. Verificare se la forma è chiusa nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$. Se esiste, costruirne una primitiva. **Soluzione**: Risolviamo il sistema di equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Dalla prima equazione risulta

$$f(x,y) = x^2 y + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + h(y), \quad y \neq 0.$$

Sostituendolo nella seconda equazione si trova $h'(y) = 0$ e quindi $h(y) = \text{cost}$. Purtroppo abbiamo trovato due constanti diverse nei semipiani $y > 0$ e $y < 0$, mentre $f(x,y)$ dovrebbe avere lo stesso limite se $y \to 0$ per $x > 0$. Quindi per una costante arbitraria c si ha

$$f(x,y) = \begin{cases} c + x^2 y + \operatorname{arctg}(\frac{x}{y}), & y > 0 \\ c + \frac{\pi}{2}, & y = 0,\ x > 0 \\ c + x^2 y + \pi + \operatorname{arctg}(\frac{x}{y}), & y < 0. \end{cases}$$

*b.** Esiste una primitiva nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Perchè esiste o perchè non esiste? **Soluzione**: Per $x < 0$ l'ultima expressione per la $f(x,y)$ ha limite $c - \frac{\pi}{2}$ se $y \to 0^+$ e $c + \frac{3\pi}{2}$ se $y \to 0^-$. Quindi non esiste la primitiva in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Osserviamo che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è connesso per archi ma non è semplicemente connesso. **Altra soluzione**: Siccome

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy = 2x + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

la forma differenziale è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ora sia γ la curva chiusa di equazione $\{(\cos t, \sin t) : -\pi \leq t \leq \pi\}$. Allora

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \left[\left(2xy + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(x^2 - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy\right] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[(2\cos t \sin t + \sin t)\,(-\sin t) + \left(\cos^2 t - \cos t\right)\cos t\right] dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[-1 + (1 - 3\sin^2 t)\cos t\right] dt \\
&= \left[-t + (\sin t - \sin^3 t)\right]_{t=-\pi}^{\pi} = -2\pi.
\end{aligned}$$

Poichè il risultato è diverso da zero, la forma differenziale non può essere esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

5. Calcolare la lunghezza del grafico della funzione $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ per $1 \leq x \leq 9$. **Soluzione**: La curva ha l'equazione $\varphi(t) = (t, \frac{2}{3}(t-1)^{3/2})$ per $1 \leq t \leq 9$. Quindi $\varphi'(t) = (1, (t-1)^{1/2})$ e $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{1+(t-1)} = \sqrt{t}$. Quindi la lunghezza è $L = \int_1^9 \sqrt{t}\,dt = [\frac{2}{3}t^{3/2}]_{t=1}^9 = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}$.

6. Calcolare il volume del solido rinchiuso tra la paraboloide di equazione $z = 1 + 3(x^2+y^2)$, il cilindro $x^2+y^2 = 1$ e il piano xy. **Soluzione**: In coordinate polari abbiamo

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \cdot [1 + 3\rho^2]\, d\theta\, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho[1+3\rho^2]\, d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 + \frac{3}{4}\rho^4)\right]_{\rho=0}^1 = \frac{5}{2}\pi.
\end{aligned}$$