Primo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0.$$

Soluzione: Equazione caratteristica: $\lambda^2(\lambda^2+4)^2 = 0$, quindi $\lambda = 0$ (doppio) e $\lambda = \pm 2i$ (zeri doppi). Soluzione generale:

$$y = c_1 + c_2 t + c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t) + c_5 t \cos(2t) + c_6 t \sin(2t).$$

2. Considerando la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+2)[5^{n+1} - 3^{n+1}]},$$

si stabilisca l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie di potenze è (assolutamente) convergente? In quali intervalli $[a,b]$ è uniformemente convergente la serie di potenze? **Soluzione**: Applicando il criterio del rapporto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} &\left| \frac{(3x)^{n+1}}{(n+3)[5^{n+2} - 3^{n+2}]} \, \frac{(n+2)[5^{n+1} - 3^{n+1}]}{(3x)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} 3|x| \frac{n+2}{n+3} \, \frac{5^{n+1}[1-(3/5)^{n+1}]}{5^{n+2}[1-(3/5)^{n+2}]} = \frac{3}{5}|x|,\end{aligned}$$

quindi $R = \frac{5}{3}$. La serie di potenze è assolutamente convergente per $x \in (-\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$ e divergente per $x < -\frac{5}{3}$ e per $x > \frac{5}{3}$. Sostituendo $x = \pm\frac{5}{3}$ otteniamo la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{5(n+2)[1-(3/5)^{n+1}]}.$$

La serie alternata ($x = -\frac{5}{3}$) converge secondo il criterio di Leibniz, ma quella a termini positivi è divergente, essendo asintoticamente equivalente alla serie armonica divisa da 5.

[1] 18.04.2007

3. Consideriamo la funzione periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo 2π tale che $f(x) = x\ \cos(x)$ per $|x| < \pi$.

   a. Calcolare i suoi coefficienti di Fourier.

   b. Calcolare la sua somma per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   c. In quali sottointervalli $[a, b]$ di $[-\pi, \pi]$ è uniformemente convergente? Spiegare perchè.

   d. È giustificata la derivazione termine a termine? Spiegare perchè.

   Soluzione: La funzione $f(x)$ è regolare a tratti con discontinuità nei punti $x = (2k+1)\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$, mentre la media del limite sinistro e quello destro in quei punti è uguale a zero. Quindi la serie di Fourier della f è convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$ con somma uguale a $f(x)$ fuori di quei punti e somma uguale a zero nelle discontinuità. La derivata vale $f' = \cos(x) - x\sin(x)$ per $x \in (-\pi, \pi)$ estesa ad una funzione con periodo 2π che è continua e regolare a tratti. Dunque la serie di Fourier della $f'(x)$ è uniformemente convergente in $x \in \mathbb{R}$. Di conseguenza la derivazione termine a termine dela serie di Fourier della $f(x)$ è consentita in tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ in cui esiste la derivata, cioè fuori delle discontinuità. Passiamo ora al calcolo dei coefficienti di Fourier. Siccome la $f(x)$ è dispari, abbiamo $a_0 = 0$ e $a_k = 0$, mentre

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\left(\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)\right)dx \\
&\overset{k\geq 2}{=} \frac{1}{\pi}\left[-x\left(\frac{\cos((k+1)x)}{k+1} + \frac{\cos((k-1)x)}{k-1}\right)\right]_0^\pi \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\cos((k+1)x)}{k+1} + \frac{\cos((k-1)x)}{k-1}\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-x\left(\frac{\cos((k+1)x)}{k+1} + \frac{\cos((k-1)x)}{k-1}\right)\right]_0^\pi \\
&+ \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((k+1)x)}{(k+1)^2} + \frac{\sin((k-1)x)}{(k-1)^2}\right]_0^\pi \\
&= (-1)^k\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1}\right) = \frac{2(-1)^k k}{k^2-1}.
\end{aligned}
$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x)\sin(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^\pi + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos(2x)\,dx = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4. Consideriamo la forma differenziale

$$\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

   a. Verificare se la forma è chiusa nel dominio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   b. Costruirne una primitiva nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se esiste. Se non esiste, dimostrare la sua non esistenza.
   c. Costruirne una primitiva nel dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ se esiste. Se non esiste, dimostrare la sua non esistenza.

Soluzione: La forma differenziale è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, poichè

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Sia $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ per $0 \le t \le 2\pi$ la parametrizzazione della curva chiusa γ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma d\omega &= \int_0^{2\pi} (-\sin t\, d\cos t + \cos t\, d\sin t) \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi \neq 0,
\end{aligned}$$

quindi la forma differenziale non è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. In $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ abbiamo le primitive $f(x,y) = \text{cost.} + \arctan(y/x)$, quindi lì la forma differenziale è esatta.

5. Calcolare la lunghezza della curva

$$\varphi(t) = (t^2, 2t), \qquad 0 \le t \le \ln(3).$$

Soluzione: $\varphi'(t) = (2t, 2)$ e $\|\varphi'(t)\| = 2\sqrt{t^2+1}$. Quindi

$$L = 2\int_0^{\ln(3)} \sqrt{t^2+1}\,dt = \left[t\sqrt{t^2+1}\right]_0^{\ln(3)} + \int_0^{\ln(3)} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}},$$

dopo un'integrazione per parti. Sostituendo $t + z = \sqrt{t^2+1}$ [dunque $dt = -((1+z^2)/2z^2)dz$, $(t^2+1)^{-1/2} = (2z/(1+z^2))$] otteniamo per $u = \ln(3)$

$$\begin{aligned} L &= \left[t\sqrt{t^2+1}\right]_0^u - \int_1^{-u+\sqrt{u^2+1}} \frac{dz}{z} \\ &= u\sqrt{u^2+1} - \ln(-u+\sqrt{u^2+1}) = u\sqrt{u^2+1} + \ln(u+\sqrt{u^2+1}). \end{aligned}$$

6. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y^{(8)} - 256y = 0.$$

Soluzione: Equazione caratteristica: $\lambda^8 = 256$, quindi abbiamo $\lambda = 2\left\{\cos(\frac{k\pi}{4}) + i\sin(\frac{k\pi}{4})\right\}$ per $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, 4$. Soluzione generale:

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{2t} + c_2e^{t\sqrt{2}}\cos(t\sqrt{2}) + c_3e^{t\sqrt{2}}\sin(t\sqrt{2}) + c_4\cos(2t) + c_5\sin(2t) \\ &+ c_6e^{-t\sqrt{2}}\cos(t\sqrt{2}) + c_7e^{-t\sqrt{2}}\sin(t\sqrt{2}) + c_8e^{-2t}. \end{aligned}$$

Punteggio massimo:

esercizio	punteggio
1	4
2	6
3	6
4	5
5	4
6	5
totale	30