Secondo Parziale
del Corso di Analisi Matematica 4[1]

1. Calcolare il minimo e il massimo della funzione

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

nel dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 36\}$. Interpretare il risultato geometricamente. **Soluzione**: Ponendo $H(x, y, z, \lambda) = x + y + z - \lambda[(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 - 36]$ risultano

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial x} = 1 - 2\lambda(x-1) = 0, \ \frac{\partial H}{\partial y} = 1 - 2\lambda(y-2) = 0, \\ &\frac{\partial H}{\partial z} = 1 - 2\lambda(z-3) = 0, \\ &\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -(x-1)^2 - (y-2)^2 - (z-3)^2 + 36 = 0. \end{aligned}$$

Per $\lambda = 0$ risulterebbe $1 = 0$, cioè $\lambda \neq 0$. Ciò implica $x = 1 + \frac{1}{2\lambda}$, $y = 2 + \frac{1}{2\lambda}$, $z = 3 + \frac{1}{2\lambda}$, e dunque $36 = 3\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2$ implica $\frac{1}{2\lambda} = \pm 2\sqrt{3}$, $(x, y, z) = (1 \pm 2\sqrt{3}, 2 \pm 2\sqrt{3}, 3 \pm 2\sqrt{3})$ con il valore della f uguale a $6[1 \pm \sqrt{3}]$, essendo un massimo e un minimo. I corrispondenti piani sono tangenti alla sfera di equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 36$.

2. Determinare l'equazione del piano tangente all'iperboloide $z = x^2 - 2y^2$ nel punto $(2, 1, 2)$. **Soluzione**: Parametrizzando la superficie tramite $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 - 2y^2)$, otteniamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, 2x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, -4y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (-2x, 4y, 1).$$

Quindi il piano tangente in $\varphi(x_0, y_0)$ ha l'equazione

$$-2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) + (z - [x_0^2 - 2y_0^2]) = 0.$$

Per $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$ risulta $-4x + 4y + z + 2 = 0$.

3. Calcolare l'area della porzione del piano $x + z = 2$ all'interno del dominio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$. Com'è fatta l'intersezione del

[1] 7.06.2006

piano e della paraboloide? **Soluzione**: Sostituendo $z = 2 - x$ nella disuguaglianza $z \geq x^2 + y^2$ otteniamo $(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}$. Quindi la superficie ha la parametrizzazione

$$\begin{cases} \varphi : D \to \mathbb{R}^3, \ \varphi(x, y) = (x, y, 2 - x), \\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{9}{4}\}. \end{cases}$$

Dunque

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, -1), \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, 0), \ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1, 0, 1), \ \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{2}.$$

Quindi l'area è uguale a $\sqrt{2}$ volte l'area del disco D, cioè $\frac{9}{4}\pi\sqrt{2}$. L'intersezione tra il piano e la paraboloide è l'elisse di equazione $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}, \ z = 2 - x\}$.

4. Sia S la superficie di equazione

$$z = \begin{cases} 9 - x^2 - y^2 & \text{se } z \geq 0, \\ -\sqrt{9 - x^2 - y^2} & \text{se } z \leq 0. \end{cases}$$

Sia $\vec{\boldsymbol{F}} = (x^3, y^3, z^3)$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\vec{\boldsymbol{F}}, \nu) \, d\sigma$, specificando esplicitamente la direzione del versore normale ν. **Soluzione**: Applichiamo il Teorema della Divergenza, dove $\text{div}\vec{\boldsymbol{F}} = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3(r^2 + z^2)$ utilizzando le coordinate cilindriche. Risulta

$$\iiint_V \text{div}\vec{\boldsymbol{F}} \, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r \, dr \int_{-\sqrt{9-r^2}}^{9-r^2} 3(r^2 + z^2)$$
$$= 2\pi \int_0^3 r \, dr \int_{-\sqrt{9-r^2}}^{9-r^2} 3(r^2 + z^2) = 2\pi \int_0^3 \Big(3r^3[-\sqrt{9 - r^2} + (9 - r^2)]$$
$$+ r[-(9 - r^2)^{3/2} + (9 - r^2)^3] \Big) \, dr.$$

Sostituendo $r = 3 \sin \alpha$ risulta

$$\iiint_V \text{div}\vec{\boldsymbol{F}} \, dxdydz = 2\pi \int_0^{\pi/2} \big(-729 \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha + 2187 \sin^3 \alpha \cos^3 \alpha$$
$$- 243 \sin \alpha \cos^4 \alpha + 6561 \sin \alpha \cos^7 \alpha \big) \, d\alpha = 2\pi \left[\left(243 \cos^3 \alpha - \frac{729}{5} \cos^5 \alpha \right) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2187}{4} \sin^4 \alpha - \frac{2187}{6} \sin^6 \alpha \right) + \frac{243}{5} \cos^5 \alpha - \frac{6561}{8} \cos^8 \alpha \right]_{\alpha=0}^{\pi/2}$$

$$= 2\pi\left(-243 + \frac{729}{5} + \frac{2187}{4} - \frac{2187}{6} - \frac{243}{5} + \frac{6561}{8}\right) = \frac{41553}{20}\pi.$$

5. Sia S la superficie
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq -1\}.$$
Sia $\vec{\boldsymbol{F}} = (y^4, z^3, x^2)$. Calcolare l'integrale di superficie $\iint_S (\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma$, specificando esplicitamente la direzione del versore normale ν. **Soluzione**: Invece della S si può prendere $S = \{(x,y,-1) : x^2+y^2 \leq 3\}$ senza cambiare il risultato, poichè quest'ultimo dipende soltanto dalla frontiera ∂S. Scegliendo $\nu = (0,0,1)$ e avendo $\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}} = (-3z^2, -2x, -4y^3)$, abbiamo
$$\iint_S (\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{F}}, \nu)\, d\sigma = \iint_{\{(x,y):x^2+y^2\leq 3\}} (-4y^3)\, dx\, dy = 0,$$
poichè $-4y^3$ è dispari rispetto a y e non dipende da x, mentre il dominio di integrazione non cambia sotto le trasformazioni $y \mapsto -y$ e $x \mapsto -x$.

6. Consideriamo la trasformazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da
$$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)), \quad u = x^2 - y^2, \quad v = xy.$$
Trovare tutti i punti $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ che hanno un intorno U in cui esiste la funzione inversa $f^{-1} : U \to X$ (con $X \subset \mathbb{R}^2$). **Soluzione**: Si calcoli prima la matrice Jacobiana
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & y \\ -2y & x \end{pmatrix}$$
di determinante $2(x^2+y^2)$. Osserviamo ora che
$$u^2 + 4v^2 = (x^2-y^2)^2 + 4(xy)^2 = (x^2+y^2)^2.$$
Dunque il determinante si annulla sse $x = y = 0$ sse $u = v = 0$. Quindi per ogni punto $(u_0,v_0) = f(x_0,y_0)$ diverso dall'origine esistono un intorno W e una funzione $g : V \to \mathbb{R}^2$ tali che $g(u_0,v_0) = (x_0,y_0)$ e $f(g(u,v)) = (u,v)$ per $(u,v) \in W$. Si noti che ogni punto $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ha due controimmagini $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.[2]

[2] Ponendo $x_0 = r_0\cos\theta_0$ e $y_0 = r_0\sin\theta_0$ per $r_0 > 0$, risultano $r_0 = \sqrt[4]{u_0^2+4v_0^2}$, $\cos 2\theta_0 = u_0/\sqrt{u_0^2+4v_0^2}$ e $\sin 2\theta_0 = 2v_0/\sqrt{u_0^2+4v_0^2}$.