Dimostrazione del Corollario 2.4: Supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converga uniformemente in $x \in I$, essendo I un intervallo. Ciò vuol dire che

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in I} \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - S(x) \right| = 0$$

per un'opportuna funzione $S : I \to \mathbb{R}$. Infatti $S(x)$ è la somma della serie. Prendendo $x, y \in I$ stimiamo ora

$$|S(x) - S(y)| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| + \sum_{n=1}^{N} |f_n(x) - f_n(y)| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(y) \right|, \quad (1)$$

qualunque sia $N \in \mathbb{N}$. L'uniformità della convergenza implica che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ (che non dipende da $x, y \in I$) tale che

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Appena trovato N, si utilizzi la continuità delle funzioni $f_1, \ldots, f_N$ in $x \in I$ per trovare una costante $\delta = \delta(x) > 0$ tale che

$$|y - x| < \delta \Longrightarrow |f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3N}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Inserendo tutto quanto nella stima (1) otteniamo che $|S(x) - S(y)| < \varepsilon$ per tutti gli $y \in I$ per cui $|y - x| < \delta$. In altre parola, la somma $S(x)$ della serie di funzioni è continua in x.

Dimostrazione del Teorema 2.7: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniformemente convergente in $x \in I = [a, b]$ con somma $S(x)$, essendo ogni termine f_n integrabile secondo Riemann. Simplifichiamoci la vita supponendo che la somma $S(x)$ sia integrabile secondo Riemann. Partendo dalla convergenza uniforme, cioè dalla relazione

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in I} \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - S(x) \right| = 0, \quad (2)$$

stimiamo il suo integrale (per ogni $x \in [a,b]$):

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N}\int_a^x f_n(y)\,dy - \int_a^b S(y)\,dy\right| &\le \int_a^x \left|\sum_{n=1}^{N} f_n(y) - S(y)\right| dy \\ &\le (b-a)\underbrace{\sup_{a\le y\le b}\left|\sum_{n=1}^{N} f_n(y) - S(y)\right|}_{\to 0 \text{ se } N\to\infty} \to 0\end{aligned}$$

se $N \to \infty$. In altre parole, l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali. Siccome il maggiorante non dipende più da x, risulta la convergenza uniforme (in $x \in [a,b]$) della somma delle primitive

$$G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(y)\,dy.$$

In generale, bisogna dimostrare che la somma $S(x)$ è integrabile secondo Riemann. In molti casi è già chiaro che lo sia. Per esempio, se ogni $f_n(x)$ è continua in $x \in [a,b]$, allora, secondo il Corollario 2.4, lo è anche la somma $S(x)$. Essendo integrabile secondo Riemann ogni funzione continua in $x \in [a,b]$, $S(x)$ è integrabile secondo Riemann.

Dimostrazione del Teorema 2.5: Per semplificarci la vita supponiamo che $f_n(x)$ sono funzioni di classe C^1 in $x \in [a,b]$ tali che

1. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ è uniformente convergente in $x \in [a,b]$, e
2. Per ogni $x \in [a,b]$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è puntualmente convergente.

Secondo il Corollario 2.4, la somma

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

è continua in $x \in [a,b]$ e quindi integrabile secondo Riemann. Applichiamo ora il Teorema 2.7 sull'intervallo $[a,x]$, dove $a < x \le b$. Allora è uniformemente convergente in $x \in [a,b]$ la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x),$$

dove

$$g_n(x) = \int_a^x f_n'(y)\,dy = f_n(x) - f_n(a).$$

Siccome è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$, risulta ora la convergenza uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Queste dimostrazioni non sono da memorizzare senza capire nulla ma servono principalmente per controllare se lo studente capisce la convergenza uniforme. Osserviamo che le dimostrazioni riguardano leggere semplificazioni dei tre teoremi.[1]

[1]Nel Teorema 2.5 non viene supposta l'esistenza delle derivate f_n' ma anche la loro continuità. Nel Teorema 2.7 viene supposta l'integrabilità secondo Riemann della somma. Tutti i teoremi valgono in generale.