Prodotto Vettore

Discutiamo il prodotto vettore

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &\stackrel{\text{def}}{=} (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

dei due vettori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ in $\mathbb{R}^3$, dove $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Calcoliamo prima la sua lunghezza. Infatti,

$$\begin{aligned}\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= [a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2] \\ &\quad - 2(a_2b_2a_3b_3 + a_3a_1b_3b_1 + a_1a_2b_1b_2) \\ &= [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2][b_1^2 + b_2^2 + b_3^2] - [a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3]^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta)^2 \\ &= (\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\theta)^2,\end{aligned}$$

dove

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

è il prodotto scalare tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

è il coseno dell'angolo tra loro. Quest'ultimo viene definito soltanto se ambedue i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non sono nulli. Quindi

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\theta$$

rappresenta l'area del parallelogramma costituito dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Di conseguenza, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ se e solo se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono linearmente dipendenti.

È facile vedere che

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 \\ &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),\end{aligned}$$

dove $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Definiamo ora

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

cioè senza utilizzare le parentesi tonde. Siccome lo scalare $|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}|$ è uguale all'area del parallelogramma costituita da $\vec{a}$ e $\vec{b}$ **per** la lunghezza di $\vec{c}$ **per** il coseno dell'angolo tra $\vec{c}$ e il normale al piano che passa per $\vec{a}$ e $\vec{b}$, è chiaro che questa quantità rappresenta il volume del parallelopepido costituito dai vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Inoltre, l'identità

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

ottenuta sviluppando il determinante rispetto alla sua terza riga, dimostra che $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ se e solo se i tre vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sono linearmente dipendenti. Infine, la rappresentazione (1) implica che

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0,$$

cioè che $\vec{a} \times \vec{b}$ è ortogonale a $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Il prodotto vettore $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b}$ ha le seguenti proprietà:[1]

a. **bilinearità**: per tutti gli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ e $t, s \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{cases} (t\vec{a} + s\vec{b}) \times \vec{c} = t(\vec{a} \times \vec{c}) + s(\vec{b} \times \vec{c}), \\ \vec{a} \times (t\vec{b} + s\vec{c}) = t(\vec{a} \times \vec{b}) + s(\vec{a} \times \vec{c}). \end{cases}$$

[1] Il prodotto vettore è una funzione da $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$, mentre il prodotto scalare è una funzione da $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$.

b. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ per ogni $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$.

c. **antisimmetria**: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ per tutti gli $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

d. **identità di Jacobi**: per tutti gli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ abbiamo

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Dimostriamo ora l'identità di Jacobi.[2] Infatti, calcolando la prima coordinata risulta

$$\begin{aligned}
&[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}]_1 + [(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}]_1 + [(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b}]_1 \\
&= (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\
&+ (b_3c_1 - b_1c_3)a_3 - (b_1c_2 - b_2c_1)a_2 \\
&+ (c_3a_1 - c_1a_3)b_3 - (c_1a_2 - c_2a_1)b_2 = 0;
\end{aligned}$$

calcolando la seconda coordinata risulta

$$\begin{aligned}
&[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}]_2 + [(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}]_2 + [(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b}]_2 \\
&= (a_1b_3 - a_3b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\
&+ (b_1c_2 - b_2c_1)a_1 - (b_2c_3 - b_3c_2)a_3 \\
&+ (c_1a_2 - c_2a_1)b_1 - (c_2a_3 - c_3a_2)b_3 = 0;
\end{aligned}$$

calcolando la terza coordinata risulta

$$\begin{aligned}
&[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}]_3 + [(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}]_3 + [(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b}]_3 \\
&= (a_2b_1 - a_1b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 \\
&+ (b_2c_3 - b_3c_2)a_2 - (b_3c_1 - b_1c_3)a_1 \\
&+ (c_2a_3 - c_3a_2)b_2 - (c_3a_1 - c_1a_3)b_1 = 0.
\end{aligned}$$

[2]Le proprietà a-d esprimono il fatto che lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ è un'algebra di Lie rispetto al prodotto vettore.