METODI MATEMATICI AVANZATI

Corso di 6 Crediti
Corso di Laurea Specialistica in Fisica
A.A. 2007-2008

Cornelis VAN DER MEE

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 335-5287988 (cell.)

cornelis@krein.unica.it
http:\\bugs.unica.it\∼cornelis
oppure: http:\\krein.unica.it\∼cornelis

Indice

I EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA **1**

1 Coordinate ortogonali 1
2 Separazione delle variabili 4
3 Equazione di Helmholtz 9
3.1 Equazione di Helmholtz nell'Intervallo 9
3.2 Equazione di Helmholtz nel Rettangolo 13
4 Equazioni delle onde e del calore 14
4.1 Equazioni delle onde e del calore nell'intervallo 14
4.2 Equazioni delle onde e del calore nel rettangolo 17

II EQUAZIONI DIFFERENZIALI E FUNZIONI SPECIALI **21**

1 Equazioni Differenziali di Secondo Ordine 21
2 Metodo di Frobenius 23
3 Funzioni Ipergeometriche 28
4 Funzioni di Bessel 32
4.1 Definizione e proprietà semplici 32
4.2 Funzioni di Bessel di seconda specie 34
4.3 Ortogonalità e zeri 36
4.4 Altre funzioni cilindriche 40
4.5 Funzioni sferiche di Bessel 42
5 Funzioni sferiche 43
5.1 Funzioni sferiche 44
5.2 Polinomi di Legendre 45
5.3 Funzioni di Legendre associate 51
5.4 Le funzioni sferiche per $n = 3$: Completezza 52
6 Polinomi di Hermite 53
7 Polinomi di Laguerre 56
8 Polinomi di Chebyshev 61
9 Polinomi Ortogonali Generali 63

III EQUAZIONI INTEGRALI **69**
1 Proprietà Elementari e Iterazione 69
2 Equazioni integrali di Volterra 74
3 Equazioni Integrali con Nucleo Hermitiano 76
4 Teorema di Hilbert-Schmidt 83

IV PROBLEMI DI STURM-LIOUVILLE **87**
1 Problema di Sturm-Liouville 87
1.1 Funzione di Green 88
1.2 Riduzione ad un'equazione integrale 92
1.3 Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni 94
2 Problemi di Sturm-Liouville singolari 97

V FUNZIONI DI GREEN **103**
1 Classificazione delle equazioni alle derivate parziali 103
2 Problemi agli autovalori multidimensionali 105
2.1 Impostazione del problema agli autovalori 105
2.2 Formule di Green 106
2.3 Proprietà dell'operatore L 107
3 Equazioni ellittiche 109
3.1 Equazioni di Laplace e di Poisson 110
3.1.a Equazione di Poisson negli intervalli 111
3.1.b Funzione di Green in $\mathbb{R}^n$ 113
3.1.c Equazione di Laplace nel semipiano 116
3.1.d Equazione di Laplace nel disco 117
3.1.e Equazione di Laplace e funzioni analitiche . . . 120
3.1.f Equazione di Laplace nella sfera n-dimensionale 122
3.2 Equazione di Helmholtz 123
4 Equazioni paraboliche 126
4.1 Esempi su intervalli limitati 127
4.2 Esempi su domini illimitati 131
5 Equazioni iperboliche 134

VI TEORIA DEI GRUPPI **139**
1 Gruppi Astratti 139
2 Gruppi Discreti — Gruppi Finiti 147
3 Gruppi Continui — Gruppi di Lie 149
4 Rappresentazioni di Gruppi 163

A LA FUNZIONE GAMMA **173**

B ANALISI FUNZIONALE **179**
1 Spazi di Banach 179
2 Spazi di Hilbert 181
3 Basi ortonormali in spazi di Hilbert 183
4 Applicazioni 185
5 Operatori lineari 187
5.1 Proprietà generali 187
5.2 Proprietà spettrali 189
5.3 Operatori autoaggiunti e unitari 191
5.4 Operatori autoaggiunti non limitati 194

C PROPRIETÀ ASINTOTICHE **197**
1 Rappresentazioni integrali delle funzioni di MacDonald 197
2 Sviluppo asintotico delle funzioni di Bessel 199

D INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE **201**
1 Insiemi di Borel 201
2 Integrale di Lebesgue 203
3 Alcuni Teoremi Importanti 206

Bibliografia **209**

Capitolo I

EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA

1 Coordinate ortogonali

Sia Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^3$. Sia $u = (u_1, u_2, u_3)$ una trasformazione di classe C^2 delle variabili cartesiane $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ in $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice Jacobiana è invertibile. Allora localmente esiste una corrispondenza biunivoca tra le coordinate cartesiane $x = (x_1, x_2, x_3)$ e quelle curvilinee $u = (u_1, u_2, u_3)$. Derivando le variabili x_1, x_2, x_3 rispetto alle variabili u_1, u_2, u_3 otteniamo

$$dx_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j.$$

Quindi la distanza al quadrato tra due punti vicini tra loro è

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} dx_i^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} du_i du_j,$$

dove

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l}$$

è la cosiddetta metrica. La trasformazione si dice *ortogonale* se la metrica $\{g_{kl}\}_{k,l=1}^{3}$ è una matrice diagonale, cioè se le righe della matrice Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{bmatrix}$$

sono ortogonali. In altre parole, la trasformazione si dice ortogonale se

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l} = 0, \qquad k \neq l.$$

In tal caso

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} (h_i \, du_i)^2,$$

dove

$$h_k = \left[\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right)^2 \right]^{1/2}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Si vede facilmente che la matrice $\operatorname{diag}(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3)\, J$ è ortogonale (cioè, $U^{-1} = U^T$ e quindi $\det U \in \{-1, +1\}$). Dunque

$$|\det J| = h_1 h_2 h_3.$$

Per ogni punto (u_1, u_2, u_3) per cui $(\pm \det J) > 0$, ci passano tre superfici $u_i =$ costante $(i = 1, 2, 3)$. In questo punto definiamo il vettore $\boldsymbol{e}_i$ di lunghezza 1 normale alla superficie $u_i =$ costante e nella direzione in cui cresce u_i. In tal caso i tre vettori $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ formano un sistema di coordinate cartesiane tale che $\pm(\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)) > 0$.

Il gradiente di ψ ha la forma

$$\nabla \psi = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j} \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \boldsymbol{e}_j,$$

la divergenza della funzione $\boldsymbol{V} = V_1 \boldsymbol{e}_1 + V_2 \boldsymbol{e}_2 + V_3 \boldsymbol{e}_3$ a valori vettoriali ha la forma

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(V_3 h_1 h_2) \right],$$

e il rotore di $\boldsymbol{V}$ ha la forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \Bigg[& \left(\frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial (h_2 V_2)}{\partial u_3} \right) h_1 \boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial (h_1 V_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_1} \right) h_2 \boldsymbol{e}_2 \\ & + \left(\frac{\partial (h_1 V_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (h_3 V_3)}{\partial u_1} \right) h_3 \boldsymbol{e}_3 \Bigg]. \end{aligned}$$

Quindi l'operatore di Laplace, oppure il Laplaciano,

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

ha la seguente rappresentazione:

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right].$$

Esempio I.1 Introduciamo ora alcuni sistemi di coordinate ortogonali.

a. **Coordinate Cilindriche**: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. dove $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. Allora $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_z = 1$. In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\psi r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{I.1}$$

Sostituendo per ψ una funzione $\psi = \psi(r,\theta)$ che non dipende da z si trova l'operatore di Laplace in **coordinate polari**:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\psi r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}. \tag{I.2}$$

b. **Coordinate Sferiche**: $x = \rho\,\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta$, $z = \rho\,\cos\varphi$, dove $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0,\pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Allora $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$, $h_\theta = \rho\,\sin\varphi$. In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial\psi}{\psi\rho} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right). \tag{I.3}$$

Introducendo la nuova variabile $\xi = \cos\varphi \in [-1,1]$ (tale che $d\xi = -\sin\varphi\,d\varphi$, $1-\xi^2 = \sin^2\varphi$) otteniamo[1]

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial\psi}{\psi\rho} + \frac{1}{\rho^2(1-\xi^2)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi^2)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right). \tag{I.4}$$

c. **Coordinate Parabolico-cilindriche** (vedi [13]): $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2)$, $y = cuv$, $z = z$, dove $u \in \mathbb{R}$, $v \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$h_u = h_v = c\sqrt{u^2+v^2}, \qquad h_z = 1.$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{I.5}$$

[1] Usando le coordinate ortogonali (ρ,θ,ξ) direttamente si trovano le espressioni $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho\sqrt{1-\xi^2}$ e $h_\xi = (\rho/\sqrt{1-\xi^2})$.

d. **Coordinate Ellittico-cilindriche** (vedi [13]): $x = c\cosh u\cos v$, $y = c\sinh u\sin v$, $z = z$, dove $u > 0$, $v \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$\begin{cases} h_u = h_v = c\sqrt{\cosh^2 u\,\sin^2 v + \sinh^2 u\,\cos^2 v} = c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \\ h_z = 1. \end{cases}$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2[\sinh^2 u + \sin^2 v]}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{I.6}$$

2 Separazione delle variabili

1. Separazione in Coordinate Cartesiane. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in tre variabili (x, y, z) per $k \geq 0$ nel dominio $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$. Ponendo

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

dove $X(x)$, $Y(y)$ e $Z(z)$ sono di classe C^2, si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2.$$

In tal caso esistono tre costanti k_x^2, k_y^2 e k_z^2 tali che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + k_x^2 = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k_y^2 = \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k_z^2 = 0,$$

dove

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2.$$

2. Separazione in Coordinate Polari. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in due variabili (x, y) per $k \geq 0$ nel dominio

$$D = \left\{(x, y) : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq L\right\},$$

dove $L \in (0, +\infty)$. Ponendo

$$\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

dove $R(r)$ e $\Theta(\theta)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, L)$ e $\theta \in \mathbb{R}$ con $\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$, si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{1}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{1}{r^2\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2,$$

oppure

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right] + k^2r^2 + \frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0.$$

L'espressione precedente è la somma costante di una funzione di r (che non dipende da θ) e una funzione di θ (che non dipende da r). Dunque i due termini devono essere costanti.

Proposizione I.2 *Sia $\Theta(\theta)$ una funzione di classe C^2, non banale, tale che*

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -C, \qquad \Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta).$$

Allora $C = m^2$ per qualche $m = 0, 1, 2, \cdots$ e

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ \text{cost}_1 \cos m\theta + \text{cost}_2 \sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

Dimostrazione. Prima dimostriamo che $C \geq 0$. Infatti,

$$\begin{aligned} C\int_0^{2\pi} |\Theta(\theta)|^2\, d\theta &= -\int_0^{2\pi} \Theta''(\theta)\overline{\Theta(\theta)}\, d\theta \\ &= -\left[\Theta'(\theta)\overline{\Theta(\theta)}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} |\Theta'(\theta)|^2\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |\Theta'(\theta)|^2\, d\theta \geq 0, \end{aligned}$$

poichè il primo termine della seconda parte si annulla per motivi di periodicità e $\Theta'(\theta) \not\equiv 0$. Quindi $C \geq 0$.

D'altra parte, per $C > 0$ troviamo la soluzione generale

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(\theta\sqrt{-C}) + c_2 \sin(\theta\sqrt{-C})$$

dell'equazione $\Theta'' = -C\Theta$. Risulta il sistema di equazioni lineari

$$\begin{bmatrix} 1-\cos(2\pi\sqrt{C}) & -\sin(2\pi\sqrt{C}) \\ \sin(2\pi\sqrt{C}) & 1-\cos(2\pi\sqrt{C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con determinante $2(1-\cos(2\pi\sqrt{C}))$. Il determinante si annulla se e solo se $C = m^2$ per $m \in \mathbf{N}$. In tal caso tutti gli elementi della matrice si annullano e quindi le costanti c_1 e c_2 sono arbitrarie.

Infine, per $C = 0$ troviamo la soluzione generale $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$. In tal caso $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$ implica $c_2 = 0$. $\square$

Sostituendo $\dfrac{1}{\Theta(\theta)}\dfrac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2$ per $m = 0, 1, 2, \cdots$, otteniamo

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right] R(r) = 0$$

con le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R(L) = 0$. Se invece della condizione di Dirichlet $\psi|_{\partial D} \equiv 0$ si considera la condizione di Neumann $\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial D} \equiv 0$, risultano le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R'(L) = 0$.

Per $k = 0$ si trova l'equazione di Eulero $r^2R''(r) + rR'(r) - m^2R(r) = 0$ con soluzione generale

$$R(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \log r, & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m}, & m = 1, 2, 3, \cdots . \end{cases}$$

La condizione che $R(0^+)$ sia finito, implica $c_2 = 0$. In tal caso $R(L) \neq 0$ per ogni $L > 0$, eccetto nel caso banale $c_1 = c_2 = 0$. Quindi per $k = 0$ non ci sono soluzioni non banali. Purtroppo, se studiamo l'equazione di Helmholtz con la condizione di Neumann, risulta la soluzione non banale costante se $m = 0$; per $m = 1, 2, 3, \cdots$ non ci sono soluzioni non banali.

Per $k > 0$ si ponga $\rho = kr$. In tal caso risulta l'equazione differenziale di Bessel

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0.$$

Quest'equazione ha una singola soluzione linearmente indipendente limitata se $\rho \to 0^+$. Con un'opportuna normalizzazione questa soluzione si chiama $J_m(\rho)$, la cosiddetta funzione di Bessel di ordine m.

3. Separazione in Coordinate Sferiche. Consideriamo l'equazione di Schrödinger

$$\Delta\psi + k^2\psi = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\psi$$

nelle variabili (x, y, z) per $k > 0$, dove il potenziale V dipende soltanto dalla variabile $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). È compreso il caso dell'equazione di Helmholtz ($V \equiv 0$). Ponendo

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)S(\theta, \varphi),$$

dove $R(r)$ e $S(\theta, \varphi)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, +\infty)$ e $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times (0, \pi)$, si trova facilmente

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 - V &= \frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} \right] \\ &+ \frac{1}{r^2 S(\theta, \varphi)} \left[\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right) \right] + k^2 - V(r). \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right) = -CS(\theta, \varphi),$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{C}{r^2}\right) R(r) = V(r)R(r),$$

dove C è una costante.

L'equazione differenziale per $S(\theta, \varphi)$ ha soltanto una soluzione non banale per opportuni valori della costante C. Per tali valori di C le funzioni $S(\theta, \varphi)$ sono multipli delle cosiddette funzioni sferiche.

Consideriamo ora l'equazione per $S(\theta, \varphi)$. Ponendo

$$S(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

si trova la cosiddetta *equazione di Beltrami*

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi\frac{d\Phi}{d\varphi}\right) + C = 0.$$

Come al solito,

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2,$$

dove $m = 0, 1, 2, \cdots$. Utilizzando la trasformazione $X(\xi) = \Phi(\arccos\xi)$, $\xi = \cos\varphi$, arriviamo all'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi}\left((1 - \xi^2)\frac{dX}{d\xi}\right) + \left(C - \frac{m^2}{1 - \xi^2}\right) X(\xi) = 0.$$

Quest'equazione è l'equazione differenziale per le funzioni associate di Legendre. Le sue soluzioni non banali limitate se $\xi \to \pm 1$ esistono soltanto per

$C = l(l+1)$, dove $l = m, m+1, m+2, \cdots$. Nel caso particolare $m = 0$ si ottiene l'equazione differenziale di Legendre

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dX}{d\xi}\right) + l(l+1)X(\xi) = 0,$$

dove $l = 0, 1, 2, \cdots$.

Ritorniamo all'equazione per $R(r)$ con $C = l(l+1)$:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + k^2R(r) = \left(V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r),$$

dove $m = -l, -l+1, \cdots, l-2, l-1, l$.

4. Separazione in Coordinate Parabolico-Cilindriche. L'equazione di Laplace in coordinate parabolico-cilindriche (u, v, z) (anche dette coordinate paraboliche) ha la forma (I.5). Sostituendo

$$\psi(u, v, z) = U(u)V(v)Z(z)$$

otteniamo

$$\frac{1}{c^2(u^2+v^2)}\left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)}\right) + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Se richiediamo che $Z(z)$ sia limitata, risulta

$$\frac{1}{c^2(u^2+v^2)}\left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)}\right) = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda^2,$$

dove $\lambda \geq 0$ è una costante. Dunque

$$U''(u) + (\mu - \lambda^2c^2u^2)U(u) = 0,$$
$$V''(v) - (\mu + \lambda^2c^2v^2)V(v) = 0,$$

dove μ è un'altra costante. Introducendo le variabili $\xi = u\sqrt{c\lambda}$ e $\eta = v\sqrt{c\lambda}$, dove $\xi \in \mathbb{R}$ e $\eta \geq 0$, e ponendo $\mu = (2\nu+1)c\lambda$ otteniamo

$$U''(\xi) + (2\nu + 1 - \xi^2)U(\xi) = 0,$$
$$V''(\eta) - (2\nu + 1 + \eta^2)V(\eta) = 0.$$

Studiamo ora l'equazione

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2)u = 0, \tag{I.7}$$

dove u, z e ν non hanno più lo stesso significato come prima. Sostituendo

$$u = e^{-z^2/2}\,v, \tag{I.8}$$

risulta l'equazione

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0. \tag{I.9}$$

Per $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ la (I.9) si dice *equazione differenziale di Hermite*. Le soluzioni della (I.7) si dicono funzioni parabolico-cilindriche.

3 Equazione di Helmholtz

In questa parte vengono calcolati gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni normalizzate dell'equazione di Helmholtz in dominio abbastanza semplici.

3.1 Equazione di Helmholtz nell'Intervallo

Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$u'' + k^2 u = 0, \qquad 0 < x < L, \tag{I.10}$$

con una delle seguenti condizioni al contorno:

$$u(0) = u(L) = 0, \qquad \text{Dirichlet} \tag{I.11}$$
$$u'(0) = u'(L) = 0, \qquad \text{Neumann} \tag{I.12}$$
$$u(0) = u'(L) = 0, \qquad \text{Dirichlet a sinistra, Neumann a destra} \tag{I.13}$$
$$u'(0) = u(L) = 0, \qquad \text{Neumann a sinistra, Dirichlet a destra} \tag{I.14}$$
$$u(0) = u(L),\ u'(0) = u'(L), \qquad \text{condizioni periodiche} \tag{I.15}$$
$$u(0) = 0,\ (\cos\alpha)u(L) + (\sin\alpha)u'(L) = 0, \tag{I.16}$$
$$(\cos\beta)u(0) - (\sin\beta)u'(0) = 0,\ (\cos\alpha)u(L) + (\sin\alpha)u'(L) = 0, \tag{I.17}$$

dove $0 \le \alpha \le (\pi/2)$ e $0 \le \beta \le (\pi/2)$. Le condizioni (I.16) e (I.17) si chiamano *miste*. In tutti i casi determineremo gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno. In tutti i casi gli autovalori k^2 sono positivi, tranne nel caso delle condizioni di Neumann (I.12), dove si annulla uno degli autovalori.

a. Condizioni di Dirichlet. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \sin(n\pi x/L)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{I.18}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

b. Condizioni di Neumann. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k \geq 0$. Utilizzando la condizione $u'(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \cos(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos(n\pi x/L)$ per $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}, \\ \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2, & \varphi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}} \cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right), \end{cases} \tag{I.19}$$

dove $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

c. Condizione di Dirichlet in $x = 0$ e di Neumann in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = ((n - \frac{1}{2})\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \sin((n - \frac{1}{2})\pi x/L)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi}{L}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x}{L}\right), \tag{I.20}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

d. Condizione di Neumann in $x = 0$ e di Dirichlet in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u'(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \cos(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = ((n - \frac{1}{2})\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos((n - \frac{1}{2})\pi x/L)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi}{L}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x}{L}\right), \tag{I.21}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

e. Condizioni periodiche. Le soluzioni non banali sono quelle periodiche. Dunque abbiamo la base ortonormale di autofunzioni (con corrispondenti autovalori)

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}, & \lambda_0 = 0, \\ \varphi_n^c(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\cos\left(\dfrac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n = \left(\dfrac{2n\pi}{L}\right)^2, \\ \varphi_n^s(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n = \left(\dfrac{2n\pi}{L}\right)^2, \end{cases} \tag{I.22}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$. Quindi l'autovalori zero è semplice mentre gli altri autovalori hanno moltiplicità 2.

f. Condizione di Dirichlet in $x = 0$ e mista in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k \geq 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $(\cos\alpha)u(L) + (\sin\alpha)u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos\alpha\,\sin(kL) + k\sin\alpha\,\cos(kL) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Escludendo i casi già trattati, cioè $\alpha = 0$ [Dirichlet] e $\alpha = (\pi/2)$ [Dirichlet in $x = 0$ e Neumann in $x = L$], risultano $k > 0$, $\sin(kL) = 0$ e $\cos(kL) \neq 0$. Arriviamo all'equazione transcedentale

$$\tan(kL) = -k\tan\alpha, \tag{I.23}$$

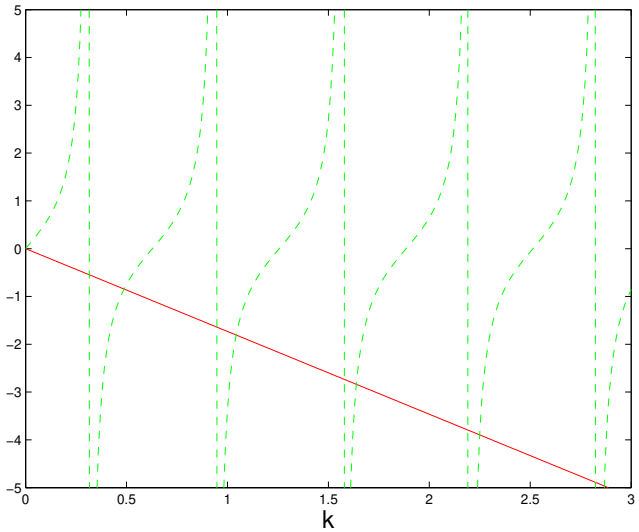

Figura I.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni $y = \tan(xL)$ e $y = -k \tan\alpha$ per $L = 5$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Gli autovalori sono i valori di $k > 0$ corrispondenti ai loro punti di intersezione.

dove $\tan\alpha > 0$. Cercando i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e la retta $k \mapsto -k\tan\alpha$ con coefficiente angolare negativo, troviamo una successione infinita di autovalori $\lambda_n = k_n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Le corrispondenti autofunzioni si possono normalizzare in $L^2(0, L)$, risultando in una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

g. Condizioni Miste Diverse. Ci limitiamo al caso in cui $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. In tal caso la soluzione

$$u(x) \sim c_1 \cos(kx) + c_2 \frac{\sin(kx)}{k}$$

per le opportune costanti c_1, c_2 e per $k > 0$ soddisfa alle due condizioni

$$c_1 \cos\beta - c_2 \sin\beta = 0, \tag{I.24}$$

$$c_1 \left[\cos\alpha \cos(kL) - k \sin\alpha \sin(kL)\right] + c_2 \left[\cos\alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin\alpha \cos(kL)\right] = 0. \tag{I.25}$$

L'esistenza di una soluzione non banale conduce alla condizione

$$\begin{aligned} &\cos\beta \left[\cos\alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin\alpha \cos(kL)\right] \\ &+ \sin\beta \left[\cos\alpha \cos(kL) - k \sin\alpha \sin(kL)\right] = 0, \end{aligned}$$

oppure

$$\sin(\alpha+\beta)\cos(kL) = -\left[\frac{\cos\alpha\cos\beta}{k} - k\sin\alpha\sin\beta\right]\sin(kL).$$

Si cerchino i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e quello della funzione razionale

$$k \mapsto -\frac{k\,\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta - k^2\sin\alpha\sin\beta}.$$

3.2 Equazione di Helmholtz nel Rettangolo

Consideriamo ora l'equazione di Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u(x,y) = 0, \tag{I.26}$$

dove $0 < x < L_1$, $0 < y < L_2$ e vengono imposte le seguenti condizioni di Dirichlet:

$$u(x,y) = 0, \qquad x = 0, L_1 \text{ oppure } y = 0, L_2. \tag{I.27}$$

Separando le variabili, cioè ponendo

$$u(x,y) = X(x)Y(y),$$

e dividendo la (I.26) da $X(x)Y(y)$ otteniamo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 = 0.$$

Quindi esistono costanti k_x^2 e k_y^2 tali che

$$\begin{cases} X''(x) + k_x^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(L_1) = 0, \end{cases} \tag{I.28}$$

$$\begin{cases} Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \tag{I.29}$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2. \tag{I.30}$$

Quindi i problemi al contorno nelle variabili x e y sono ambedue problemi al contorno per l'equazione di Helmholtz in una variabile con le condizioni di Dirichlet. Quindi i loro autovalori e le loro autofunzioni normalizzate sono

$$(k_x^2)_n = \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L_1}}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right), \tag{I.31}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$, e

$$(k_y^2)_m = \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2, \qquad \varphi_m(y) = \sqrt{\frac{2}{L_2}} \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \tag{I.32}$$

dove $m = 1, 2, 3, \ldots$. Di conseguenza, gli autovalori e autofunzioni normalizzate del problema bidimensionale sono

$$(k^2)_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2}\right), \ \varphi_{n,m}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \tag{I.33}$$

dove $n, m = 1, 2, 3, \ldots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale in $L^2((0, L_1) \times (0, L_2))$.

Su tutte le 4 parti del bordo, $\{0\} \times [0, L_2]$, $\{L_1\} \times [0, L_2]$, $[0, L_1] \times \{0\}$ e $[0, L_1] \times \{L_2\}$, si possono imporre diverse condizioni al contorno, quali le condizioni di Dirichlet, quelle di Neumann e quelle miste. In tutti questi casi si possono separare le variabili e risolvere i problemi al contorno unidimensionali che ne risultano.

L'equazione di Helmholtz si può risolvere per separazione delle variabili anche nei parallelopepidi multidimensionali in dimensione ≥ 3. Per esempio, in tre dimensioni, nel dominio $(0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$, e sotto le condizioni di Dirichlet escono gli autovalori e autofunzioni

$$\begin{aligned}
(k^2)_{n,m,l} &= \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{l^2}{L_3^2}\right), \\
\varphi_{n,m,l}(x, y, z) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{L_3}\right),
\end{aligned}$$

dove $n, m, l = 1, 2, 3, \ldots$.

4 Equazioni delle onde e del calore

Discutiamo ora alcuni casi in cui è abbastanza facile calcolare esplicitamente le soluzioni delle equazioni del calore e delle onde.

4.1 Equazioni delle onde e del calore nell'intervallo

Consideriamo ora l'equazione del calore per $x \in (0, L)$ con condizione iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{I.34}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \tag{I.35}$$

dove a^2 è la diffusività termica,[2] e quella delle onde con condizioni iniziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{I.36}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{I.37}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \tag{I.38}$$

dove $c > 0$ è la velocità d'onda. In ambedue casi imporremo una condizione al contorno, quali quella di Dirichlet

$$u(0,t) = u(L,t) = 0. \tag{I.39}$$

Al posto delle condizioni di Dirichlet si possono imporre quelle di Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0. \tag{I.40}$$

In ambedue i casi facciamo una separazione delle variabili di tipo

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

e dividiamo la (I.34) e la (I.37) da $X(x)T(t)$. Otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}, & \text{equazione del calore,} \\ c^2\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}, & \text{equazione delle onde,} \end{cases}$$

con le condizioni di Dirichlet

$$X(0) = X(L) = 0.$$

La separazione delle variabili conduce al problema di contorno

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases} \tag{I.41}$$

più il problema in variabile temporale

$$\begin{cases} T'(t) = -a^2 k^2 T(t), & \text{equazione del calore,} \\ T''(t) = \dfrac{k^2}{c^2}\, T(t), & \text{equazione delle onde.} \end{cases} \tag{I.42}$$

[2] Infatti $a^2 = K/(\mu\rho)$, dove K è la conduttività termica, μ è il calore specifico e ρ è la densità del mezzo. In generale vale l'equazione $\mu\rho(\partial u/\partial t) = K\Delta u + \nabla\vec{\boldsymbol{K}} \cdot \nabla u$.

Quindi la solzione della (I.41) ha la forma

$$(k^2)_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad X(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{I.43}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$, mentre la soluzione dei problemi temporali ha la forma

$$\begin{cases} T(t) = T(0)\exp\left(-a^2 t\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right), & \text{equazione del calore,} \\ T(t) = T(0)\cos\left(\frac{n\pi t}{cL}\right) + T'(0)\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi t}{cL}\right)}{n\pi t/cL}, & \text{equazione delle onde.} \end{cases} \tag{I.44}$$

La soluzione generale della equazione del calore o delle onde è una combinazione lineare (facendo scorrere $n = 1, 2, 3, \ldots$) delle soluzioni elementari $X_n(x)T_n(t)$. Quindi la soluzione generale dell'equazione del calore ha la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-a^2 t\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{I.45}$$

dove

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{I.46}$$

Il coefficiente di Fourier c_n viene calcolato nel seguente modo:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

D'altra parte, la soluzione generale dell'equazione delle onde ha la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\cos\left(\frac{n\pi t}{cL}\right) + d_n\frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{cL}\right)}{n\pi t/cL}\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{I.47}$$

dove

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{I.48}$$

$$u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \tag{I.49}$$

I coefficienti di Fourier si calcolano nel seguente modo:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,$$
$$d_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_1(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

Se invece della (I.39) vengono imposte le condizioni di Neumann, i dettagli della derivazione della soluzione non cambiano molto.

4.2 Equazioni delle onde e del calore nel rettangolo

La risoluzione delle equazioni del calore e delle onde nel rettangolo è analoga a quella per i corrispondenti problemi unidimensionali. Al posto degli autovalori e autofunzioni dell'equazione di Helmholtz nell'intervallo si utilizzano ora quelli dell'equazione di Helmholtz nel rettangolo.

Consideriamo ora l'equazione del calore per $(x, y) \in (0, L_1) \times (0, L_2)$ con condizione iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right], \tag{I.50}$$
$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \tag{I.51}$$

dove a^2 è la diffusività termica, e quella delle onde con condizione iniziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right], \tag{I.52}$$
$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \tag{I.53}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y), \tag{I.54}$$

dove $c > 0$ è la velocità d'onda. In ambedue casi imporremo una condizioni al contorno, quali quella di Dirichlet

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(L_1, y, t) = 0, & y \in [0, L_2], \\ u(x, 0, t) = u(x, L_2, t) = 0, & x \in [0, L_1]. \end{cases} \tag{I.55}$$

La separazione delle variabili

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

e la divisione dall'espressione $X(x)Y(y)T(t)$ conducono al problema al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \left[\dfrac{X''(x)}{X(x)} + \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} \right], \\ X(0) = X(L_1) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \tag{I.56}$$

per l'equazione del calore e al problema al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{1}{c^2} \left[\dfrac{X''(x)}{X(x)} + \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} \right], \\ X(0) = X(L_1) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \tag{I.57}$$

per l'equazione delle onde. Otteniamo, come al solito,

$$\begin{aligned} X''(x) + k_x^2 X(x) = 0, \qquad & X(0) = X(L_1) = 0, \\ Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0, \qquad & Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} (k_x)^2 &= \left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2, \qquad & X(x) \sim \sin \frac{n\pi x}{L_1}, \\ (k_y)^2 &= \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2, \qquad & Y(y) \sim \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \end{aligned}$$

dove $n, m = 1, 2, 3, \ldots$. Inoltre,

$$T(t) = T(0) \exp \left(-a^2 \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right] \right)$$

per l'equazione del calore e

$$\begin{aligned} T(t) = T(0) \cos & \left(\frac{t}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \\ + T'(0) & \frac{\sin \left(\dfrac{t}{c} \left[\left(\dfrac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)}{\dfrac{1}{c} \left[\left(\dfrac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2}} \end{aligned}$$

per l'equazione delle onde.

Per l'equazione del calore arriviamo alla seguente soluzione completa:

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \exp\left(-a\left[\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2\right]\right) \sin\frac{n\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2}, \tag{I.58}$$

dove

$$u_0(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2}, \tag{I.59}$$

$$c_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_0(x,y) \sin\frac{n\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2}\, dy\, dx. \tag{I.60}$$

Infine l'equazione delle onde ha la seguente soluzione:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \Bigg[& c_{n,m} \cos\left(\frac{t}{c}\left[\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2\right]^{1/2}\right) \sin\frac{n\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2} \\ & + d_{n,m} \frac{\sin\left(\frac{t}{c}\left[\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2\right]^{1/2}\right)}{\frac{1}{c}\left[\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2\right]^{1/2}} \sin\frac{n\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2} \Bigg], \end{aligned} \tag{I.61}$$

dove

$$u_0(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2}, \tag{I.62}$$

$$u_1(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} d_{n,m} \sin\frac{n\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2}, \tag{I.63}$$

$$c_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_0(x,y) \sin\frac{n\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2}\, dy\, dx, \tag{I.64}$$

$$d_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_1(x,y) \sin\frac{n\pi x}{L_1} \sin\frac{m\pi y}{L_2}\, dy\, dx. \tag{I.65}$$

Capitolo II

EQUAZIONI DIFFERENZIALI E FUNZIONI SPECIALI

In questo capitolo iniziamo a discutere le equazioni differenziali lineari di secondo ordine, in particolare la teoria di Frobenius. Poi discutiamo le cosiddette funzioni speciali. Tali funzioni vengono utilizzate spesso nelle applicazioni e loro proprietà vengono tabellate. Tra i libri di tabellazione più utilizzati ci trovano i classici libri di Abramowitz e Stegun [1], di Gradshteyn e Ryzik [6], di Watson [16] (che è specializzato nelle funzioni di Bessel), e di Whittaker e Watson [17]. È più moderno il libro di Varshalovich, Moskalev e Khersonskii [15]. La teoria dei polinomi ortogonali si trova nel classico libro di Szegő [14].

1 Equazioni Differenziali di Secondo Ordine

Consideriamo l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \qquad x \in I, \tag{II.1}$$

dove a_0, a_1 e g sono funzioni reali continue di $x \in I$, essendo I un intervallo aperto della retta reale. Allora per ogni $x_0 \in I$ e per ogni coppia di numeri $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ esiste una soluzione unica della (III.1) tale che

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1. \tag{II.2}$$

Ponendo y_p per la soluzione particolare dell'equazione non omogenea (III.1) che soddisfa alle condizioni $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$, la soluzione del problema a valori iniziali (III.1)-(III.2) ha la seguente forma:

$$y(x) = y_0\, Y_1(x) + y_1\, Y_2(x) + y_p(x), \tag{II.3}$$

dove Y_0 e Y_1 sono le soluzioni della corrispondente equazione omogenea

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad x \in I, \tag{II.4}$$

tali che

$$Y_0(x_0) = 1, \qquad Y_0'(x_0) = 0, \tag{II.5}$$
$$Y_1(x_0) = 0, \qquad Y_1'(x_0) = 1. \tag{II.6}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea (III.4) costituiscono uno spazio vettoriale reale di dimensione 2.

La mappa $(y_0, y_1) \mapsto y$, con y la soluzione dell'equazione omogenea (III.4) che soddisfa la (III.2), è una corrispondenza biunivoca lineare tra $\mathbb{R}^2$ e lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea (III.4). Dunque due soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione omogenea (III.4) sono linearmente indipendenti se e solo se sono linearmente indipendenti i loro vettori colonna dei dati iniziali $(y_j(x_0), y_j'(x_0))^T$ $(j = 1, 2)$, cioè se e solo se il loro *Wronskiano*

$$w(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{II.7}$$

La matrice 2×2 nella (III.7) si dice *matrice Wronskiana*. Sicome la trasformazione lineare dai dati iniziali delle soluzioni della equazione omogenea in x_0 ai dati iniziali in un altro punto $\hat{x}_0 \in I$ è per forza una corrispondenza biunivoca, ne segue che il Wronskiano $w(x)$ si annulla da nessuna parte oppure si annulla dappertutto in I. Quest'ultima proprietà si dimostra anche nel seguente modo:

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{d}{dx}(y_1 y_2' - y_2 y_1') = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \\ &= y_1\left(-a_1 y_2' - a_0 y_2\right) - y_2\left(-a_1 y_1' - a_0 y_1\right) \\ &= -a_1(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -a_1 w. \end{aligned} \tag{II.8}$$

Quindi, $w(x) = \text{cost.}\exp\left(-A_1(x)\right)$, essendo A_1 una primitiva della funzione coefficiente a_1. Di conseguenza, $w(x) = 0$ se e solo se si annulla la costante se e solo se $w(x) = 0$ per ogni $x \in I$.

Per risolvere l'equazione non omogenea (III.1) partendo da due soluzioni linearmente indipendenti y_1 e y_2 della corrispondente equazione omogenea (III.4), si utilizzi il *metodo della variazione dei parametri*. Ponendo

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{II.9}$$

e facendo l'ipotesi che $c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$ per ogni $x \in I$, si arriva al seguente sistema lineare

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}. \tag{II.10}$$

Essendo $w(x) \neq 0$ (per ogni $x \in I$) il determinante della matrice del sistema lineare (III.10) (cioè il Wronskiano), risulta la soluzione

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{w(x)} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} = \frac{g(x)}{w(x)} \begin{pmatrix} -y_2(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix}, \qquad \text{(II.11)}$$

da cui si trovano $c_1(x)$ e $c_2(x)$ (e dunque la soluzione y) integrando.

2 Metodo di Frobenius

L'equazione differenziale ordinaria

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,} \qquad \text{(II.12)}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$ e quindi ammettono uno sviluppo in potenze di x con raggio di convergenza strettamente positiva, può essere risolta sostituendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Risulta una relazione di ricorrenza per i coefficienti c_n che ci consente a calcolare $c_2, c_3, c_4, \ldots$ in modo unico dai coefficienti iniziali $c_0 = y(0)$ e $c_1 = y'(0)$. Inoltre, il raggio di convergenza della serie di potenze per la $y(x)$ non è inferiore al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenze per $P(x)$ e $Q(x)$. Siccome $y(0)$ e $y'(0)$ determinano completamente la soluzione y, si trovano in tal modo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (III.12).

Esempio II.1 Il metodo di resoluzione sostituendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ viene illustrato dall'*equazione di Airy*

$$\boxed{y'' = xy.}$$

Siccome $y''(0) = 0$, abbiamo $c_2 = 0$. Quindi $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1}$ e $xy = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$ implicano

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1},$$

e quindi si arriva alla relazione di ricorrenza

$$(n+2)(n+3)c_{n+3} = c_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

partendo da $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$ e $c_2 = 0$. Quindi

$$c_{3k} = \frac{c_0}{2.3.5.6.8.9.\ldots.(3k-1)(3k)}, \; c_{3k+1} = \frac{c_1}{3.4.6.7.9.10.\ldots.(3k)(3k+1)},$$

e $c_2 = c_5 = c_8 = \ldots = 0$. Di conseguenza

$$y(x) = y(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2.3.5.6.\ldots.(3k-1)(3k)} + y'(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3.4.6.7.\ldots.(3k)(3k+1)},$$

dove ambedue le serie hanno raggio di convergenza $+\infty$.

Il **metodo di Frobenius** (1877) è stato sviluppato per risolvere certe equazioni differenziali ordinarie con coefficienti singolari utilizzando lo sviluppo della soluzione in serie di potenza. In tal caso l'equazione differenziale ha la forma (III.12), dove $p(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(x)/x$ e $q(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q(x)/x^2$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$. Si dice che $x = 0$ è una *singolarità regolare* [inglese: regular singularity] dell'equazione.

Consideriamo prima l'esempio più elementare di un'equazione differenziale con singolarità regolare ad $x = 0$, la cosiddetta *equazione di Eulero*

$$\boxed{x^2 y'' + pxy' + qy = 0,} \tag{II.13}$$

dove p e q sono coefficienti costanti reali. Per $(\pm x) > 0$ sostituiamo $x = \pm e^t$, dove $t \in \mathbb{R}$, e arriviamo all'equazione a coefficienti costanti

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = 0. \tag{II.14}$$

La sua equazione caratteristica, ora detta *equazione indiciale*, è

$$\alpha(\alpha - 1) + p\alpha + q = 0. \tag{II.15}$$

Quest'equazione segue dalla (III.13) sostituendo $y = (\pm x)^\alpha$ per $(\pm x) > 0$.

Ci sono tre possibilità:

a. Discriminante $= (p-1)^2 - 4q > 0$. L'equazione indiciale (III.15) ha due radici reali diverse α_1 e α_2. In tal caso la soluzione della (III.13) è

$$y(x) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} = c_1 |x|^{\alpha_1} + c_2 |x|^{\alpha_2}.$$

b. Discriminante $= (p-1)^2 - 4q = 0$. L'equazione indiciale (III.15) ha una singola radice reale α doppia. In tal caso la soluzione della (III.13) è

$$y(x) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t\, e^{\alpha t} = c_1 |x|^{\alpha} + c_2 |x|^{\alpha} \ln |x|.$$

c. Discriminante $= (p-1)^2 - 4q < 0$. L'equazione indiciale (III.15) ha due radici complesse coniugate $\sigma \pm i\tau$ dove σ e τ sono reali. In tal caso la soluzione della (III.13) è

$$y(x) = e^{\sigma t} \left[c_1 \cos(\tau t) + c_2 \sin(\tau t)\right] = |x|^{\sigma} \left[c_1 \cos(\tau \ln |x|) + c_2 \sin(\tau \ln |x|)\right].$$

Spieghiamo ora il *Metodo di Frobenius* (1877). Si cerchi la generalizzazione della risoluzione dell'equazione di Eulero alle equazione differenziali

$$\boxed{x^2y''(x) + xp(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0,} \tag{II.16}$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$ nel piano complesso. Ciò vuol dire che

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{II.17}$$

dove ambedue serie di potenze hanno un raggio di convergenza strettamente positiva. Sostituiamo ora nella (III.16)

$$y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha}, \tag{II.18}$$

dove, per ipotesi, la serie ha un raggio di convergenza $R > 0$.[1] Allora

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)c_n x^{n+\alpha}, \qquad x^2y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1)c_n x^{n+\alpha}, \tag{II.19}$$

dove abbiamo calcolato le derivate termine a termine. Sostituendo la (III.18) e la (III.19) nella (III.16) otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\alpha)(n+\alpha-1)c_n + \sum_{j=0}^{n} p_{n-j}(j+\alpha)c_j + \sum_{j=0}^{n} q_{n-j}c_j \right] x^{n+\alpha} = 0.$$

Quindi tutti i coefficienti di questa serie si devono annulare:

$$(n+\alpha)(n+\alpha-1)c_n + \sum_{j=0}^{n} p_{n-j}(j+\alpha)c_j + \sum_{j=0}^{n} q_{n-j}c_j = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{II.20}$$

La (III.20) si può anche scrivere nella forma matriciale

$$\sum_{j=0}^{n} T(\alpha)_{nj} c_j = 0,$$

[1] Si può dimostrare che il raggio di convergenza di questa serie di potenze non è inferiore al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenze nella (III.17).

dove la matrice semiinfinita $T(\alpha)$ con elementi

$$T(\alpha)_{nj} = \begin{cases} \Lambda(\alpha+n) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha+n)(\alpha+n-1) + p_0(\alpha+n) + q_0, & n = j, \\ p_{n-j}(j+\alpha) + q_{n-j}, & n > j, \\ 0, & n < j. \end{cases} \tag{II.21}$$

è sottotriangolare. In particolare, abbiamo trovate la cosiddetta *equazione indiciale*

$$\boxed{\Lambda(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\alpha-1) + p_0\alpha + q_0 = 0.} \tag{II.22}$$

Affinchè $c_0 \neq 0$, α deve essere una radice della (III.22).

Teorema II.2 (Frobenius) *Supponiamo che l'equazione indicale* (III.20) *ha due zeri diversi con una differenza non intera. Allora, scegliendo per α uno degli zeri, si ottengono due soluzioni linearmente indipendenti della* (III.16) *per $|x|$ inferiore al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenza* (III.17).

Scrivendo la (III.21) nella forma

$$\sum_{j=1}^{n} T(\alpha)_{nj} c_j = -c_0 T(\alpha)_{n0}, \qquad n = 1, 2, \ldots, m, \ldots,$$

dove α è uno zero dell'equazione indiciale (III.22) e

$$\det\left(T(\alpha)_{nj}\right)_{n,j=1}^{m} = \Lambda(\alpha+1)\Lambda(\alpha+2)\ldots\Lambda(\alpha+m),$$

troviamo in modo unico tutti i coefficienti $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots$ se nessuno dei numeri $\alpha+1, \alpha+2, \ldots, \alpha+m, \ldots$ è uno zero dell'equazione indiciale (III.22). In tal caso risultano due soluzioni linearmente indipendenti, una per ciascuno zero della (III.22).

Se l'equazione indiciale (III.22) ha un singolo zero $\alpha \in \mathbb{R}$, allora la (III.18) conduce ad una singola soluzione linearmente indipendente della (III.16). Per trovare una seconda soluzione linearmente indipendente, si calcolino i coefficienti $c_n(\alpha)$ dal coefficiente c_0 utilizzando la (III.20) e inserendo α come fosse un parametro libero. La seconda soluzione linearmente indipendente ora ha la seguente forma:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) x^{n+\alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0}, \tag{II.23}$$

dove α_0 è il singolo zeri dell'equazione indiciale.

Se l'equazione indiciale ha due zeri reali con differenza intera, α_0 e $\alpha_0 - N$ per un opportuno $N \in \mathbb{N}$, allora la situazione è abbastanza complicata,

poichè in alcuni casi si trovano due soluzioni linearmente indipendenti e negli altri casi due soluzioni proporzionali. Sostituendo $\alpha = \alpha_0$, **essendo α_0 lo zero maggiore**, si vede subito che si possono trovare tutti i coefficienti c_n dal coefficiente c_0 in modo unico. D'altra parte, sostituendo $\alpha = \alpha_0 - N$, essendo $\alpha_0 - N$ lo zero minore, si vede subito che si possono calcolare in modo unico i coefficienti $c_1, \ldots, c_2, \ldots, c_{N-1}$ dal coefficiente c_0 risolvendo il sistema di equazioni lineari

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda(\alpha+1) & 0 & \ldots & 0 \\ T(\alpha)_{21} & \Lambda(\alpha+2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T(\alpha)_{N-1,1} & \ldots & \ldots & \Lambda(\alpha+N-1) \end{pmatrix}}_{\text{determinante}=\Lambda(\alpha_0-N+1)\Lambda(\alpha_0-N+2)\ldots\Lambda(\alpha_0-1)\neq 0} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = -c_0 \begin{pmatrix} T(\alpha)_{10} \\ T(\alpha)_{20} \\ \vdots \\ T(\alpha)_{N-1,0} \end{pmatrix}, \tag{II.24}$$

dove $\alpha = \alpha_0 - N$. Arriviamo così alla soluzione unica

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = -c_0 M^{-1} \begin{pmatrix} T(\alpha_0 - N)_{10} \\ T(\alpha_0 - N)_{20} \\ \vdots \\ T(\alpha_0 - N)_{N-1,0} \end{pmatrix},$$

dove M è la matrice quadrata nella (III.24).

Estendiamo ora la (III.24) al sistema di equazioni (III.21) per $m = N$ e $\alpha = \alpha_0 - N$. In tal caso l'ultima equazione ha la forma

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left[p_{N-j}(j + \alpha_0 - N) + q_{N-j}\right] c_j = 0,$$

oppure

$$\begin{aligned} c_0 \Big\{ & T(\alpha_0 - N)_{N,0} \\ & + \begin{pmatrix} T(\alpha_0 - N)_{N,1} & \ldots & T(\alpha_0 - N)_{N,N-1} \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} T(\alpha_0 - N)_{10} \\ \vdots \\ T(\alpha_0 - N)_{N-1,0} \end{pmatrix} \Bigg\} = 0. \end{aligned}$$

Ora ci sono due possibilità.

Prima: Se non si annulla l'espressione tra parentesi graffe, dobbiamo per forza scegliere $c_0 = 0$. In tal caso $c_0 = c_1 = \ldots = c_{N-1} = 0$. Scegliamo ora un coefficiente c_N. Allora la (III.20) per $n \geq N+1$ e $\alpha = \alpha_0 - N$ ci consentono a calcolare $c_{N+1}, c_{N+2}, \ldots$ da c_N in modo unico. Ponendo $d_n = c_{N+n}$ per

$n = 0, 1, 2, \ldots$ e $n = N + m$ per $m = 0, 1, 2, \ldots$, la (III.20) ha la forma

$$(m+\alpha_0)(m+\alpha_0-1)d_m+\sum_{l=0}^{m} p_{m-l}(l+\alpha_0)d_l+\sum_{l=0}^{m} q_{m-l}d_l = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{II.25}$$

e quindi per $\alpha = \alpha_0 - N$ si otterrà una soluzione proporzionale a quella ottenuta per $\alpha = \alpha_0$.

Seconda: Se si annulla l'espressione tra parentesi graffe, allora l'equazione per c_N risulta infatti la tautologia $0 = 0$, mentre per $n \geq N + 1$ e $\alpha = \alpha_0 - N$ la (III.20) conduce a valori per i coefficienti $c_{N+1}, c_{N+2}, \ldots$ che dipendono in modo unico e lineare dai coefficienti c_0 e c_N. Quindi si otterranno due soluzioni linearmente indipendenti.

Esempio II.3 Consideriamo l'*equazione differenziale di Bessel*

$$\boxed{x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0}$$

di ordine $\nu \geq 0$, dove $p(x) \equiv 1$ e $q(x) = x^2 - \nu^2$. Quindi $p_0 = 1$, $q_0 = -\nu^2$ e $q_2 = 1$, e l'equazione indiciale

$$\Lambda(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + p_0\alpha + q_0 = \alpha^2 - \nu^2 = 0$$

ha gli zeri $\pm\nu$. Di consequenza, se 2ν non è un intero, il metodo di Frobenius conduce a due soluzioni linearmente indipendenti. Supponiamo ora che $0 \neq 2\nu \in \mathbb{Z}$. Allora la (III.24) implica

$$\begin{cases} \Lambda(-\nu + 1)c_1 = 0, \\ \Lambda(-\nu + n)c_n + c_{n-2} = 0, \quad n = 2, \ldots, \end{cases} \tag{II.26}$$

dove $0 \notin \{\Lambda(-\nu+n) : n = 1, 2, \ldots, 2\nu-1\} \cup \{\Lambda(-\nu+n) : n \geq 2\nu+1\}$. È facile capire che per 2ν dispari si trovano due soluzioni linearmenti indipendenti, mentre per 2ν si trova una singola soluzione linearmente indipendente. Infatti, se 2ν è pari, per $n = 2\nu$ si trova $c_{2\nu-2} = 0$; utilizzando la (III.26) per $n = 2, 4, \ldots, 2\nu - 2$ pari, otteniamo $0 = c_{2\nu-2} = c_{2\nu-4} = \ldots = c_2 = c_0$, mentre la (III.26) per $n = 1, 3, \ldots, 2\nu - 1$ conduce a $0 = c_1 = c_3 = \ldots = c_{2\nu-1} = 0$. Per 2ν dispari, lo stesso raggionamento conduce a $c_1 = c_3 = \ldots = c_{2\nu} = \ldots = 0$ direttamente.

3 Funzioni Ipergeometriche

Consideriamo ora la *funzione ipergeometrica*

$$\boxed{{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!\,(\gamma)_k} z^k} \tag{II.27}$$

per $|z|$ abbastanza piccola, dove il *simbolo di Pochhammer* $\alpha_0 = 1$ e

$$\boxed{(\alpha)_k \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k+1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}.}$$

Ovviamente si ha la relazione di simmetria

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = {}_2F_1(\beta,\alpha;\gamma;z)$$

per $|z|$ abbastanza piccola. Ovviamente

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;0) = 1, \qquad \left[\frac{d}{dz}{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)\right]_{z=0} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}. \tag{II.28}$$

α	β	γ	z	${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$
α	β	β	z	$(1-z)^{-\alpha}$
1	1	2	z	$-\log(1-z)/z$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	z^2	$\frac{1}{2z}\log\frac{1+z}{1-z}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	z^2	$\arcsin(z)/z$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-z^2$	$\arctan(z)/z$

Per trovare un'espressione integrale per le funzioni ipergeometriche si ricorda prima che

$$\begin{aligned}\frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k} &= \frac{\Gamma(\beta+k)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+k)} = \frac{B(\beta+k,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)} \\ &= \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1}t^{\beta+k-1}\,dt.\end{aligned}$$

Sostituendolo nella (III.27) otteniamo

$$\begin{aligned}{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) &= \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}z^k\int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1}t^{\beta+k-1}\,dt \\ &= \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1}t^{\beta-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}(zt)^k\right\}dt \\ &= \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1}t^{\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\,dt,\end{aligned}$$

valida per $|z| < 1$ e $\gamma > \beta > 0$, dove B è la funzione beta di Eulero [Vedi l'Appendice A]. Sostituendo $z = 1$ si ottiene

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;1) = \frac{1}{B(\gamma-\beta)}\int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1}t^{\beta-1}\,dt = \frac{B(\beta,\gamma-\alpha-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)}$$

per $\gamma - \alpha - \beta > 0$ e $\beta > 0$. Esprimendo le funzioni beta di Eulero in funzioni gamma (vedi l'Appendice A) otteniamo il *teorema di Gauss*

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}, \tag{II.29} $$

dove $\gamma - \alpha - \beta > 0$ e $\beta > 0$.

La funzione ipergeometrica ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ soddisfa all'equazione differenziale ipergeometrica

$$ \boxed{x(1-x)y''(x) + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}\, y'(x) - \alpha\beta y = 0.} \tag{II.30} $$

Tutti i punti $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ sono punti regolari della (III.29) (cioè, esistono due soluzini linearmente indipendenti in un intorno di ciascuno di questi punti), mentre 0, 1 e ∞ sono singolarità regolari.

Intorno a $x = 0$ la (III.30) ha la forma

$$ y'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} y = 0. $$

Qundi l'equazione indiciale è

$$ \mu(\mu - 1) + \gamma\mu = \mu(\mu + \gamma - 1) = 0, $$

con gli zeri 0 e $1 - \gamma$. Quindi la sostituzione $y(x) = x^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ per $\mu \in \{0, 1 - \gamma\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x| < 1$ se $\gamma \notin \mathbb{Z}$.

Intorno a $x = 1$ l'equazione indiciale è

$$ \mu(\mu - 1) + (\alpha + \beta - \gamma + 1)\mu = \mu(\mu + \alpha + \beta - \gamma) = 0, $$

con gli zeri 0 e $\gamma - \alpha - \beta$. Quindi la sostituzione $y(x) = (x-1)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-1)^k$ per $\mu \in \{0, \gamma - \alpha - \beta\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x - 1| < 1$ se $\gamma - \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$.

Intorno a $x = \infty$ possiamo trasformare la (III.30) ponendo $z = 1/x$ e considerando $z = 0$ come singolarità regolare. Si ottiene l'equazione differenziale

$$ \begin{aligned} &\frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z}\right) z^2 \frac{d}{dz}(z^2 y'(z)) - \left[\gamma - \frac{\alpha + \beta + 1}{z}\right] z^2 \frac{dy}{dz} - \alpha\beta y(z) \\ &= z^2(z-1)y''(z) - z[2(1-z) + \gamma z - \alpha - \beta - 1]y'(z) - \alpha\beta y(z) = 0. \end{aligned} $$

L'equazione indiciale è

$$ \mu(\mu - 1) + \mu(1 - \alpha - \beta) + \alpha\beta = (\mu - \alpha)(\mu - \beta) = 0. $$

Quindi la sostituzione $y(x) = x^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k}$ per $\mu \in \{\alpha, \beta\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x| > 1$ se $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$.

Per passare all'equazione ipergeometrica confluente osserviamo prima che la funzione ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x/\beta)$ soddisfa all'equazione differenziale

$$\boxed{x\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{\gamma - \left(1 + \frac{\alpha+1)}{\beta}\right)x\right\}\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0.} \tag{II.31}$$

Facendo tendere $\beta \to \infty$ si arriva alla cosiddetta *equazione ipergeometrica confluente*

$$xy''(x) + (\gamma - x)y'(x) - \alpha y = 0. \tag{II.32}$$

Siccome $(\beta)_k/\beta^k \to 1$ se $\beta \to \infty$ per k fissa, otteniamo come una delle soluzioni la *funzione ipergeometrica confluente*

$$\boxed{{}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k\, k!}\, x^r.} \tag{II.33}$$

α	γ	z	${}_1F_1(\alpha; \gamma; z)$
α	α	z	e^z
$\alpha + 1$	α	z	$\left(1 + \frac{\alpha}{z}\right) e^z$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-z^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2z}\,\mathrm{erf}(z)$

Tutti i punti in $\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$ sono regolari, mentre zero e ∞ sono singolarità della (III.31). Infatti, intorno ad $x = 0$ si ottiene l'equazione indiciale

$$\mu(\mu - 1) + \gamma\mu = \mu(\mu + \gamma - 1) = 0,$$

con gli zeri 0 e $1 - \gamma$. Quindi la sostituzione $y(x) = x^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ per $\mu \in \{0, 1 - \gamma\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x| < 1$ se $\gamma \notin \mathbb{Z}$. Il punto all'infinito non è una singolarità regolare. Infatti, la sostituzione $z = (1/x)$ nella (III.32) conduce all'equazione differenziale

$$\frac{1}{z} z^2 \frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{dy}{dz}\right) + \left(\gamma - \frac{1}{z}\right)\frac{dy}{dz} - \alpha y = 0$$

oppure

$$z^3 \frac{d^2y}{dz^2} + ([2 + \gamma]z^2 - z)\frac{dy}{dz} - \alpha y = 0.$$

4 Funzioni di Bessel

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\boxed{x^2u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0,} \tag{II.34}$$

detta *equazione di Bessel*. Ogni soluzione di quest'equazione non identicamente nulla è detta *funzione cilindrica*.

4.1 Definizione e proprietà semplici

Consideriamo, per $\nu \in \mathbb{R}$, la funzione[2]

$$\boxed{J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},} \tag{II.35}$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione Gamma che soddisfa $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ e $\Gamma(1) = 1$ [vedi l'Appendice A]. Si può rappresentare nella forma

$$J_\nu(x^2) = x^\nu f_\nu(x^2), \tag{II.36}$$

dove $f_\nu(\zeta)$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso,

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}, \tag{II.37}$$

con raggio di convergenza $R = +\infty$. Quindi la sua somma definisce una funzione analitica $f_\nu(\zeta)$ in tutto il piano complesso.

Verifichiamo che la funzione $J_\nu(x)$ soddisfa l'equazione (III.34). Utilizzando la relazione $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&x^2 J_\nu''(x) + xJ_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[(2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - \nu^2]}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\
&= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -x^2 J_\nu(x),
\end{aligned}$$

[2] La (III.35) si può anche derivare applicando il metodo di Frobenius.

come dovevasi dimostrare. La funzione cilindrica $J_\nu(x)$ si dice *funzione di Bessel di ordine* ν, dove $x^\nu > 0$ per $x > 0$. In particolare

$$\begin{cases} J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos x. \end{cases} \tag{II.38}$$

Se $\nu > 0$ non è intero, le funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti. Ciò segue dalla (III.35) in virtù del fatto che

$$\boxed{J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}\left[1 + O(x^2)\right],} \qquad x \to 0; \qquad \nu \neq -1, -2, -3, \cdots, \tag{II.39}$$

poichè $\Gamma(\nu+1)$ è finito. Se, invece, $\nu = n$ è intero, si utilizzi il fatto che $\Gamma(-k)$ è infinito per $k = 0, 1, 2, \cdots$ [vedi l'Appendice A] e quindi la sommatoria nella serie (III.35) per $J_{-n}(x)$ inizia a $k = n$. Quindi per $n = 0, 1, 2, \ldots$ si ha

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &\overset{l=k-n}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+n}}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Dunque le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ sono linearmente dipendenti:

$$\boxed{J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).} \tag{II.40}$$

Sono valide le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$\boxed{J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x).} \tag{II.41}$$

Infatti, la prima formula (III.41) segue dalla (III.35):

$$\begin{aligned} &J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \right] \\ &= -\frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x). \end{aligned}$$

Nello stesso modo si ottiene

$$
\begin{aligned}
&J_\nu'(x) + J_{\nu+1}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} + \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1} \right] \\
&= \frac{\nu}{2\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \\
&- \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^l (2l+\nu+2)}{2\Gamma(l+\nu+2)\Gamma(l+2)} - \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+\nu+2)\Gamma(l+1)} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu+1} \\
&= \frac{\nu}{2\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} - \frac{\nu}{x} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l+\nu+2)\Gamma(l+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu+1} = \frac{\nu}{x} J_\nu(x).
\end{aligned}
$$

Le formule (III.41) si possono riscrivere nella forma

$$
\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).
$$

In particolare per $\nu = 0$ si trova

$$
\boxed{J_0'(x) = -J_1(x).}
$$

Infine, sottraendo le formule (III.41), si ottiene ancora una relazione di ricorrenza:

$$
\boxed{J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.}
$$

4.2 Funzioni di Bessel di seconda specie

Il Wronskiano $W[u,v] = uv' - u'v$ di due soluzioni u e v dell'equazione di Bessel soddisfa all'equazione differenziale di primo ordine

$$
W'[u,v](x) + \frac{1}{x} W[u,v](x) = 0,
$$

e quindi $W[u,v](x)$ è proporzionale alla funzione $1/x$. Per trovare la costante di proporzionalità basta studiare l'andamento del Wronskiano se $x \to 0$. Per $\nu \notin \mathbb{Z}$ si vede subito che

$$
\begin{cases}
J_\nu(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \\
xJ_\nu'(x) = \dfrac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}),
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
J_{-\nu}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \\
xJ_{-\nu}'(x) = \dfrac{-\nu}{\Gamma(-\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}),
\end{cases}
$$

e dunque [vedi la (A.10) nell'Appendice A]

$$W[J_\nu, J_{-\nu}](x) = \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} + \underbrace{O(x)}_{=0}$$
$$= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{-2\,\sin(\nu\pi)}{\pi x}.$$

Quindi $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti [cioè, il Wronskiano non si annulla per $x \neq 0$] se e solo se ν non è un intero. Se $\nu \in \mathbb{Z}$, risulta $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$.

Per $\nu = n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ esiste una soluzione dell'equazione di Bessel linearmente indipendente della $J_n(x)$. Per trovarela definiamo la *funzione di Bessel di seconda specie*

$$\boxed{Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}}$$

per $\nu \notin \mathbb{Z}$. Siccome sia il numeratore che il denominatore sono funzioni analitiche di $\nu \in \mathbb{C}$ e $(d/d\nu)\sin(\nu\pi) = \pi\,\cos(\nu\pi) \neq 0$ per $\nu = 0, 1, 2, \cdots$, il limite di $Y_\nu(x)$ per $\nu \to n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esiste ed è uguale all'espressione

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}.$$

Calcolando la derivata della serie di potenza per $J_\nu(x)$ rispetto a ν ed introducendo la funzione $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ otteniamo per $x \geq 0$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2}\left[\log\frac{z}{2} - \psi(k+1)\right]$$
$$= \frac{2}{\pi} J_0(x)\log\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2}\psi(k+1),$$
$$Y_n(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left[2\,\log\frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1)\right]$$
$$= \frac{2}{\pi} J_n(x)\log\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$
$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\left[\psi(k+1) + \psi(k+n+1)\right].$$

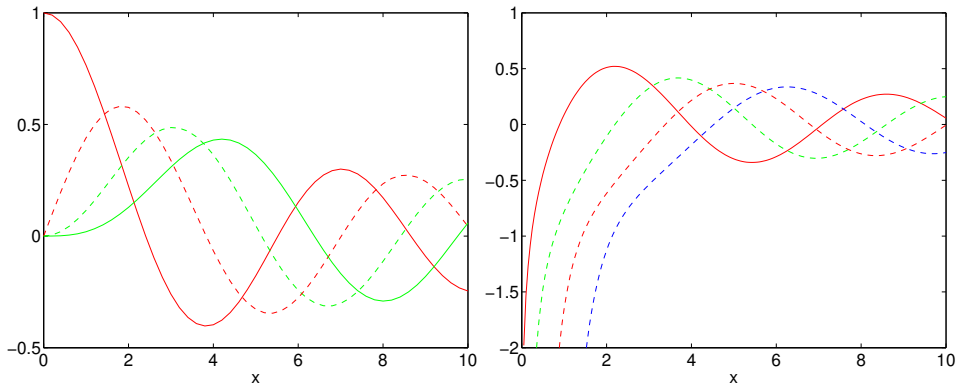

Figura II.1: Panello sinistro: le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$. Panello destro: le funzioni di Neumann $Y_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Quest'espressione conduce alle rappresentazioni asintotiche per $x \to 0^+$

$$\boxed{Y_n(x) \sim \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \log \dfrac{x}{2}, & n = 0 \\ -\dfrac{(n-1)!}{\pi} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{-n}, & n = 1, 2, \cdots, \end{cases}} \tag{II.42}$$

implicando che $|Y_n(x)| \to +\infty$ se $x \to 0$.

Per ragioni di linearità le funzioni di Bessel di seconda specie soddisfano alle stesse formule di ricorrenza di quelle di prima specie. In particolare

$$Y'_\nu(x) = Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu Y_\nu(x)\right] = x^\nu Y_{\nu-1}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} Y_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x);$$

$$Y'_0(x) = -Y_1(x); \qquad Y_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) + Y_{\nu-1}(x) = 0.$$

4.3 Ortogonalità e zeri

La seguente proposizione ci importa nei casi $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ (cercando gli zeri) e $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ (cercando i valori estremi).

Proposizione II.4 *Per $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta > 0$, siano μ_1 e μ_2 zeri reali dell'equazione*

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0, \tag{II.43}$$

dove $\nu > -1$. Allora

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)\,dx$$
$$= \begin{cases} 0, & \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \\ \dfrac{1}{2}[J_\nu'(\mu_1)]^2 + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1)^2, & \mu_1 = \mu_2, \\ -\dfrac{1}{2}J_\nu'(\mu_1)J_\nu'(-\mu_1) + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1)J_\nu(-\mu_1), & \mu_1 = -\mu_2. \end{cases} \tag{II.44}$$

Dimostrazione. Siano $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. In virtù della (III.34), le funzioni $J_\nu(\mu_1 x)$ e $J_\nu(\mu_2 x)$ soddisfano le equazioni

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right] + \left(\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu_1 x) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx}\right] + \left(\mu_2^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu_2 x) = 0.$$

Moltiplichiamo la prima per $J_\nu(\mu_2 x)$ e la seconda per $J_\nu(\mu_1 x)$, poi sottraiamo termine a termine la prima dalla seconda ed integriamo da 0 a 1. Si ottiene

$$(\mu_2^2 - \mu_1^2)\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[J_\nu(\mu_2 x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx}\right) - J_\nu(\mu_1 x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx}\right)\right] dx$$
$$= \left[\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x)J_\nu'(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x)J_\nu'(\mu_2 x)\right]_{x=0}^1. \tag{II.45}$$

Dalla (III.35) [vedi anche la (III.39)] abbiamo per $x \to 0^+$

$$J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}),\ \mu x J_\nu'(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\mu x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

e perciò

$$\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x)J_\nu'(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x)J_\nu'(\mu_2 x) = O(x^{2\nu+2}), \qquad x \to 0^+.$$

Quindi, grazie alla condizione $\nu > -1$, il primo membro della (III.45) si annulla per $x = 0$ e si ottiene

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_1 x)J_\nu(\mu_2 x)\,dx = \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2)J_\nu'(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1)J_\nu'(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2}. \tag{II.46}$$

Se μ_1 e μ_2 sono zeri reali dell'equazione (III.43) dove $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta > 0$, il determinante del sistema lineare

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta\mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0, \qquad \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta\mu_2 J'_\nu(\mu_2) = 0,$$

per (α, β) si annulla, cioè il numeratore della frazione nella (III.46) si annulla. Di conseguenza, se $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$, segue la proprietà di ortogonalità (cioè, si annulla la parte a sinistra della (III.46)).

Per dimostrare la (III.44) se $\mu_1 = \mu_2$, si passi al limite per $\mu_2 \to \mu_1$ nella (III.46) utilizzando la regola di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)^2\, dx &= \lim_{\mu_2 \to \mu_1} \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[J'_\nu(\mu_1)\right]^2 - \frac{1}{2\mu_1} J_\nu(\mu_1)\left[J'_\nu(\mu_1) + \mu_1 J''_\nu(\mu_1)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[J'_\nu(\mu_1)\right]^2 + \frac{1}{2} J_\nu(\mu_1)^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right).\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato la (III.44) per $\mu_1 = \mu_2$. La dimostrazione per $\mu_1 = -\mu_2$ è analoga. □

Dimostriamo ora le seguenti proprietà degli zeri dell'equazione (III.43) per $\nu > -1$. Per $\beta = 0$ quest'equazione definisce gli zeri delle funzioni di Bessel.

Teorema II.5 *Gli zeri dell'equazione* (III.43) *per* $\nu > -1$ *sono reali, semplici, ad eccezione, forse, dello* 0*; questi zeri sono simmetricamente disposte rispetto all'origine e non hanno punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Dalla (III.35), in virtù del fatto che α, β e $\Gamma(\xi)$ sono reali, per ξ reali, si ottiene $J_\nu(x) = \overline{J_\nu(\overline{x})}$. Quindi

$$\overline{\alpha J_\nu(\overline{\mu}) + \beta\overline{\mu} J'_\nu(\overline{\mu})} = \alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J'_\nu(\mu).$$

Per questa ragione, se μ è uno zero dell'equazione (III.43), $\overline{\mu}$ è anche'esso uno suo zero. Se $\mu^2 \neq \overline{\mu}^2$, applicando la formula (III.44) per $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = \overline{\mu}$, si arriva ad una contraddizione:

$$0 = \int_0^1 x J_\nu(\mu x) J_\nu(\overline{\mu} x)\, dx = \int_0^1 x |J_\nu(\mu x)|^2\, dx.$$

Ciò significa che $\mu^2 = \overline{\mu}^2$, cioè μ è un numero reale o immaginario. Ma quest'ultimo caso non ha luogo, poichè, in virtù della (III.35) e del fatto che $\Gamma(\xi) > 0$ per $\xi > 0$, si ha per $0 \neq a \in \mathbb{R}$

$$\alpha J_\nu(ia) + i\,\beta a J'_\nu(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha + \beta(2k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

Siccome $\mu^{-\nu}\left[\alpha J_\nu(\mu)+\beta\mu J'_\nu(\mu)\right]$ è una funzione analitica di μ in tutto il piano complesso, i suoi zeri non si possono accumulare ad un punto finito.

Dimostriamo ora la semplicità degli zeri. Sia $\mu_0>0$ uno zero della (III.43) di moltiplicità 2, in modo che

$$\begin{cases}\alpha J_\nu(\mu_0)+\beta\mu_0 J'_\nu(\mu_0)=0,\\ \alpha J'_\nu(\mu_0)+\beta J'_\nu(\mu_0)+\beta\mu_0 J''_\nu(\mu_0)=-\beta\left(\mu_0-\dfrac{\nu^2}{\mu_0}\right)J_\nu(\mu_0)+\alpha J'_\nu(\mu_0)=0,\end{cases} \tag{II.47}$$

in virtù dell'equazione (III.34). Dalla (III.47) [che è un sistema di equazioni lineari per $J_\nu(\mu_0)$ e $J'_\nu(\mu_0)$] concludiamo che a) $J_\nu(\mu_0)=J'_\nu(\mu_0)=0$, oppure b) $\alpha^2+\beta^2(\mu_0^2-\nu^2)=0$. Il caso a) è impossibile grazie al teorema sull'unicità della soluzione della (III.34), poichè $\mu_0>0$ non è un punto singolare dell'equazione (III.34). Dimostriamo che è anche impossibile il caso b). Per realizzare il caso b) ci vuole $\beta>0$ e $(\alpha/\beta)=\sqrt{\nu^2-\mu_0^2}$, dove $0<\mu_0\le|\nu|$. Sostituendo quest'equazione nella (III.47) si ottiene

$$\left[J'_\nu(\mu_0)\right]^2=\left(\frac{\nu^2}{\mu_0^2}-1\right)J_\nu(\mu_0)^2,$$

il che, in virtù della (III.44), porta all'uguaglianza contraddittoria

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_0 x)^2\,dx=\frac{1}{2}\left\{\left[J'_\nu(\mu_0)\right]^2+\left(1-\frac{\nu^2}{\mu_0^2}\right)J_\nu(\mu_0)^2\right\}=0.$$

Il teorema è stato dimostrato. □

In base al teorema dimostrato si possono numerare gli zeri dell'equazione (III.43), disponendole in ordine crescente:

$$\boxed{0<\mu_1^{(\nu)}<\mu_2^{(\nu)}<\mu_3^{(\nu)}<\cdots.}$$

Se $\nu>0$, $J_\nu(x)$ si annulla per $x=0$.

Abbiamo la seguente espressione asintotica per la funzione $J_\nu(x)$:[3]

$$\boxed{J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-3/2}),\qquad x\to+\infty.} \tag{II.48}$$

Ne segue la formula approssimativa per gli zeri di $J_\nu(x)$:

$$\mu_k^{(\nu)}\approx\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\nu+k\pi,\qquad k\to+\infty.$$

La dimostraziona della formula asintotica (III.48) si trova nell'Appendice B.

[3] Vedi l'Appendice B per le dimostrazioni.

4.4 Altre funzioni cilindriche

Insieme con le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, sono importanti per le applicazioni altri tipi di funzioni cilindriche. Queste funzioni sono le seguenti:

1. *Le funzioni di Neumann* o *le funzioni di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \nu \notin \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \dfrac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}, & \nu = n = 0, 1, 2, \cdots \\ (-1)^n Y_n(-x), & \nu = -n = -1, -2, \cdots . \end{cases}$$

   Spesso si vede la notazione $N_\nu(x)$ invece di $Y_\nu(x)$.

2. *Le funzioni di Hankel di prima specie*

$$\boxed{H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i\, Y_\nu(x)} \tag{II.49}$$

   e le funzioni di Hankel di seconda specie

$$\boxed{H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i\, Y_\nu(x).} \tag{II.50}$$

3. *Le funzioni di Bessel di argomento immaginario*

$$\boxed{I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ix),} \qquad \boxed{K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\pi\nu i/2} H_\nu^{(1)}(ix).} \tag{II.51}$$

Le funzioni $I_\nu(x)$ si chiamano funzioni di Bessel modificate di prima specie (modified Bessel functions of the first kind), mentre le funzioni $K_\nu(x)$ si chiamano funzioni di MacDonald.[4]

Utilizzando l'espressione asintotica (III.48) per $J_\nu(x)$, si ha per $x \to +\infty$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \tag{II.52}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \tag{II.53}$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \tag{II.54}$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + O(x^{-1})\right], \tag{II.55}$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left[1 + O(x^{-1})\right]. \tag{II.56}$$

[4] Nella letteratura ci sono diversi nomi e notazioni per queste funzioni. In particolare, in [17] si utilizza una definizione diversa della nostra.

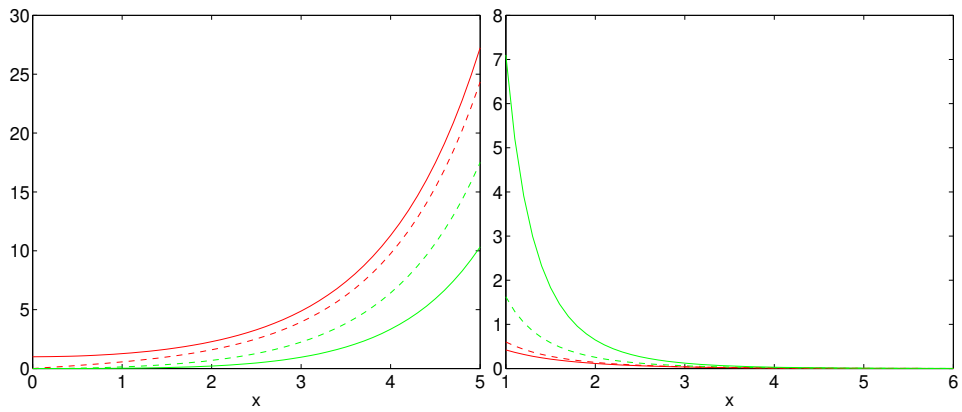

Figura II.2: Panello sinistro: le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ per $\nu = 0, 1, 2, 3$. Panello destro: le funzioni di MacDonald $K_\nu(x)$ per $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Le dimostrazioni delle formule asintotiche (III.52)-(III.56) si trovano nell'Appendice B. Analogamente, utilizzando la (III.39), si ottiene per $x \to 0^+$

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(x) \approx -\dfrac{2i}{\pi} \ln \dfrac{1}{x}, \quad H_0^{(2)}(x) \approx \dfrac{2i}{\pi} \ln \dfrac{1}{x}, \\ \\ Y_0(x) \approx -\dfrac{2}{\pi} \ln \dfrac{1}{x}, \qquad K_0(x) \approx \ln \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}\left(I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)\right) &= \frac{\pi}{2}\left(e^{\nu\pi i/2} J_{-\nu}(iz) - e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(iz)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2}\left(J_{-\nu}(iz) - e^{-\nu\pi i} J_\nu(iz)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2}\left(-[J_\nu(iz)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(iz)] + i\,\sin(\nu\pi) J_\nu(iz)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2} \sin(\nu\pi)\left(J_\nu(iz) + iY_\nu(iz)\right) \\ &= \frac{\pi i}{2} e^{\nu\pi i/2} H_\nu^{(1)}(iz)\sin(\nu\pi) = K_\nu(z)\sin(\nu\pi), \end{aligned}$$

implicando che[5]

$$\boxed{K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}.}$$

[5]In [17, Sec. 17.71] la funzione di MacDonald $K_\nu(z)$ viene definita in modo diverso: $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}(I_{-\nu}(z) - I_\nu(z))\cot(\nu\pi)$.

Per $\nu = n \in \mathbb{Z}$ bisogna calcolare il limite se $\nu \to n$.

Troviamo ora le equazioni differenziali per le funzioni $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$. Sostituendo $x \mapsto ix$ nella (III.34), otteniamo l'equazione differenziale

$$\boxed{x^2u'' + xu' - (x^2 + \nu^2)u = 0.} \tag{II.57}$$

Dal Teorema III.5 segue che per $\nu > -1$ le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ e le loro derivate prime non hanno zeri reali (con l'eccezione di $x = 0$ se $\nu > 0$).

4.5 Funzioni sferiche di Bessel

Le funzioni di Bessel $J_{\pm(l+\frac{1}{2})}(x)$, dove $l = 0, 1, 2, \ldots$, appaiono nello studio dello scattering quantistico e dello scattering della luce. Per questo motivo vengono introdotte le seguenti funzioni:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(z), \tag{II.58}$$

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, Y_{l+\frac{1}{2}}(z), \tag{II.59}$$

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + iy_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(z), \tag{II.60}$$

$$h_l^{(2)}(z) = j_l(z) - iy_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(z). \tag{II.61}$$

Le funzioni $j_l(z)$, $y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z)$ e $h_l^{(1,2)}(z)$ si dicono *funzioni sferiche di Bessel* di prima, seconda e terza specie. Quindi

$$\begin{aligned}
j_0(z) &= \frac{\sin(z)}{z}, \\
j_1(z) &= \frac{\sin(z)}{z^2} - \frac{\cos(z)}{z}, \\
j_2(z) &= \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z}\right)\sin(z) - \frac{3}{z^2}\cos(z), \\
y_0(z) &= -n_0(z) = -\frac{\cos(z)}{z}, \\
y_1(z) &= n_1(z) = -\frac{\cos(z)}{z^2} - \frac{\sin(z)}{z}, \\
y_2(z) &= -n_2(z) = \left(-\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z}\right)\cos(z) - \frac{3}{z^2}\sin(z).
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = (-1)^{l+1} j_{-l-1}(z). \tag{II.62}$$

È anche abbastanza facile trovare le seguenti espressioni esplicite:

$$j_l(z) = z^l \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\sin(z)}{z},\ y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = -z^l \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\cos(z)}{z}. \tag{II.63}$$

Asintoticamente (se $x \to +\infty$) abbiamo le seguenti espressioni:

$$j_l(x) \simeq \begin{cases} (-1)^{l/2}\dfrac{\sin(x)}{x}, & l \text{ pari}, \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}}\dfrac{\cos(x)}{x}, & l \text{ dispari}, \end{cases} \tag{II.64}$$

$$y_l(x) = (-1)^{l+1} n_l(z) \simeq \begin{cases} (-1)^{(l+2)/2}\dfrac{\cos(x)}{x}, & l \text{ pari}, \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}}\dfrac{\sin(x)}{x}, & l \text{ dispari}, \end{cases} \tag{II.65}$$

$$h_l^{(1)}(x) \simeq \begin{cases} -i(-1)^{l/2}\dfrac{e^{ix}}{x}, & l \text{ pari}, \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}}\dfrac{e^{ix}}{x}, & l \text{ dispari}, \end{cases} \tag{II.66}$$

$$h_l^{(2)}(x) \simeq \begin{cases} i(-1)^{l/2}\dfrac{e^{-ix}}{x}, & l \text{ pari}, \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}}\dfrac{e^{-ix}}{x}, & l \text{ dispari}. \end{cases} \tag{II.67}$$

Sostituendo $y = \sqrt{x}\,Y$ nell'equazione di Bessel di ordine $\nu = l + \frac{1}{2}$ si arriva all'equazione differenziale

$$\boxed{Y'' + \frac{2}{x}Y' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)Y = 0} \tag{II.68}$$

per le funzioni j_l, $y_l = (-1)^{l+1} n_l$, $h_l^{(1)}$ e $h_l^{(2)}$. Ponendo $Y = Z/x$ si ha inoltre

$$Z'' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right)Z = 0 \tag{II.69}$$

per le funzioni $xj_l(x)$, $xy_l(x) = (-1)^{l+1} x n_l(x)$, $xh_l^{(1)}(x)$ e $xh_l^{(2)}(x)$.

5 Funzioni sferiche

Consideriamo adesso una classe di funzioni speciali molto importante per la fisica matematica.

5.1 Funzioni sferiche

Si dice *funzione sferica* di ordine $l = 0, 1, 2, \cdots$ ogni polinomio armonico[6] omogeneo di grado l considerato sulla sfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Dunque, tra le funzioni sferiche $Y_l(s)$, $s \in S^{n-1}$, di ordine l ed i polinomi armonici omogenei $u_l(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, stabilisce una corrispondenza biunivoca l'identità

$$Y_l(s) = u_l\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{u_l(x)}{|x|^l}, \qquad s = \frac{x}{|x|}, \tag{II.70}$$

dove $\Delta u_l = 0$.

Le funzioni sferiche Y_l e $Y_{l'}$, di ordini diversi sono ortogonali in $L^2(S^{n-1})$, cioè

$$(Y_l, Y_{l'}) = \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s)\, ds = 0, \qquad l \neq l'.$$

Infatti, applicando per la sfera la formula di Green ai polinomi armonici

$$u_l(x) = |x|^l Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right), \qquad u_{l'}(x) = |x|^{l'} Y_{l'}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \Delta\left(|x|^l Y_l\right) - |x|^l Y_l \Delta\left(|x|^{l'} Y_{l'}\right)\right] dx \\
&= \int_{S^{n-1}} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \frac{\partial(|x|^l Y_l)}{\partial n} - |x|^l Y_l \frac{\partial(|x|^{l'} Y_{l'})}{\partial n}\right] ds \\
&= \int_{S^{n-1}} \left[Y_{l'} \frac{\partial(r^l Y_l)}{\partial r} - Y_l \frac{\partial(r^{l'} Y_{l'})}{\partial r}\right] ds = (l - l') \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s)\, ds,
\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla circonferenza S^1 ($n = 2$). In coordinate polari abbiamo

$$u_l(x) = r^l Y_l(\theta), \qquad x = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

dove $\Delta u_l = 0$. Risulta l'equazione differenziale

$$Y_l''(\theta) + l^2 Y_l(\theta) = 0,$$

da cui seguono le funzioni trigonometriche

$$Y_l(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & l = 0 \\ c_1 \cos(l\theta) + c_2 \mathrm{sen}\,(l\theta), & l = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

[6] Una funzione $v = v(x_1, \ldots, x_n)$ di classe C^2 si dice *armonica* se $\Delta v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = 0$.

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla sfera S^2 ($n = 3$). In coordinate sferiche abbiamo per $y_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi)$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial Y_l}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2 Y_l}{\partial\theta^2} + l(l+1)Y_l(\theta,\varphi) = 0, \tag{II.71}$$

dove $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $l = 0, 1, 2, \cdots$. Cerchiamo le soluzioni della (III.71) in $C^\infty(S^2)$. Introduciamo prima $\xi = \cos\varphi$ e scriviamo (III.71) nella forma

$$\frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial^2 Y_l}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi^2)\frac{\partial Y_l}{\partial\xi}\right) + l(l+1)Y_l(\theta,\xi) = 0. \tag{II.72}$$

Applicando la separazione delle variabili

$$Y_l(\theta,\varphi) = \mathcal{P}(\xi)\Theta(\theta),$$

otteniamo

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1\cos m\theta + c_2 \operatorname{sen} m\theta, & m = 1, 2, 3, \cdots, \end{cases}$$

dove abbiamo sfruttato la periodicità della $\Theta(\theta)$: $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$. Dunque $\Theta''(\theta) = -m^2\Theta(\theta)$. Risulta l'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}}{d\xi}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]\mathcal{P}(\xi) = 0. \tag{II.73}$$

Quest'equazione si può scrivere nella forma

$$-\left[(1-\xi^2)\mathcal{P}'\right]' + \frac{m^2}{1-\xi^2}\mathcal{P} = l(l+1)\mathcal{P}.$$

Le soluzioni di quest'equazione nei punti ± 1 debbono assumere valori finiti.

5.2 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre $P_l(\xi)$ si possono definire nei seguenti modi:

1. tramite la formula generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi h + h^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\xi)h^l, \qquad |h| < 1,$$

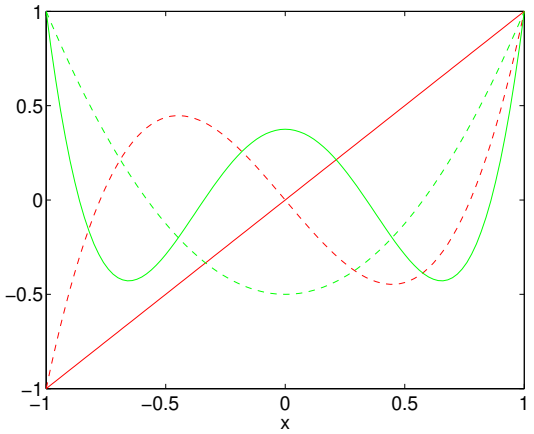

Figura II.3: I polinomi di Legendre di grado 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

2. tramite l'equazione differenziale,

$$\boxed{-[(1-x^2)P_l']'(x) = l(l+1)P_l(x),} \quad -1 < x < +1; \qquad \boxed{P_l(1) = 1,}$$

3. tramite l'ortogonalità: $P_l(\xi)$ sono i polinomi in ξ di grado l con coefficiente principale positivo tali che

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l(\xi)P_{l'}(\xi)\,d\xi = \delta_{ll'}\frac{2}{2l+1},}$$

4. tramite la formula di Rodrigues

$$\boxed{P_l(\xi) = \frac{1}{2^l\,l!}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^l (\xi^2-1)^l,}$$

5. tramite la formula di ricorrenza

$$\boxed{(2l+1)\xi P_l(\xi) = (l+1)P_{l+1}(\xi) + lP_{l-1}(\xi), \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi.}$$

Noi dimostriamo l'equivalenza tra queste definizioni.

4 ⇒ 2. Consideriamo l'equazione differenziale

$$-[(1-x^2)u']'(x) = \lambda u(x), \qquad -1 < x < +1, \tag{II.74}$$

sotto le condizioni iniziali che i limiti di $u(x)$ per $x \to \pm 1$ esistano finiti. Questo problema al contorno ha soluzioni polinomiali per $\lambda = l(l+1)$ dove $l = 0, 1, 2, \cdots$. Verifichiamo se i polinomi

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l, \qquad l = 0, 1, 2, \cdots, \tag{II.75}$$

soddisfano la (III.74) per $\lambda = l(l+1)$. Questi polinomi (di grado l) sono detti *polinomi di Legendre* e la (III.75) si dice *formula di Rodrigues*. Infatti,[7] ponendo $W_l(x) = (x^2-1)^l$ e derivando l'identità

$$(x^2-1)W_l'(x) - 2l\, xW_l(x) = 0$$

$l+1$ volte, si ottiene

$$(x^2-1)W_l^{(l+2)}(x) + 2xW_l^{(l+1)}(x) - l(l+1)W_l^{(l)}(x) = 0.$$

Dunque la funzione $W_l^{(l)}(x) = 2^l(l!)P_l(x)$ soddisfa l'equazione (III.74). Inoltre,

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l\, l!} \sum_{s=0}^{l} \binom{l}{s} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^s (x-1)^l\right) \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-s} (x+1)^l\right) \\ &= \frac{1}{2^l\, l!} \sum_{s=0}^{l} \left(\frac{l!}{(l-s)!}(x-1)^{l-s}\right) \left(\frac{l!}{s!}(x+1)^s\right), \end{aligned}$$

il quale implica che $P_l(1) = 1$ e $P_l(-1) = (-1)^l$.

2 ⇒ 4. Sostituendo $u(x) = P_l(x)z(x)$ e $w(x) = z'(x)$ nella (III.74) con $\lambda = l(l+1)$, otteniamo l'equazione separabile

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -2\frac{P_l'(x)}{P_l(x)} + \frac{2x}{1-x^2},$$

implicando che

$$y(x) = c_1 P_l(x) + c_2 P_l(x) \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)P_l(t)^2}.$$

L'integrale nell'ultima espessione è divergente in $x = \pm 1$ (poichè $P_l(\pm 1)^2 = 1$]. Quindi $P_l(x)$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale (III.74) con $\lambda = l(l+1)$ che soddisfa $P_l(1) = 1$. Siccome la formula di Rodrigues rappresenta una tale soluzione, si ottiene questa formula dalla proprietà 2.

[7] Vale la *formula di Leibnitz* $(fg)^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} f^{(j)} g^{(m-j)}$. Quindi $(xf)^{(m)} = xf^{(m)} + mf^{(m-1)}$ e $((x^2-1)f)^{(m)} = (x^2-1)f^{(m)} + 2mxf^{(m-1)} + m(m-1)f^{(m-2)}$.

(2 + 4) ⇒ 3. Si dimostra facilmente che i polinomi di Legendre sono ortogonali nello spazio $L^2(-1,1)$. Infatti, utilizzando la (III.74) si ha

$$\begin{aligned}
&[l(l+1)-k(k+1)]\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\Big[P_l(k)\left[(1-x^2)P_k'\right]' - P_k(x)\left[(1-x^2)P_l'\right]'\Big]\,dx \\
&= -\int_{-1}^{1}\left[P_l'(k)(1-x^2)P_k'(x) - P_k'(x)(1-x^2)P_l'(x)\right]\,dx = 0,
\end{aligned}$$

dopo un'integrazione per parti. Quindi $(P_l,P_k) = \int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)\,dx = 0$ se $l \neq k$. Per trovare il fattore di normalizzazione, calcoliamo (P_l,P_l) tramite l integrazioni per parti consecutive. Otteniamo

$$\begin{aligned}
(P_l,P_l) &= \frac{1}{2^l\,l!}\int_{-1}^{1} P_l(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l \\
&= \frac{1}{2^l\,l!}\left\{\left[P_l(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1}(x^2-1)^l\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_l'(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1}(x^2-1)^l\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{2^l\,l!}\left\{\sum_{k=1}^{l}\left[(-1)^{k-1}P_l^{(k-1)}(x)\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-k}(x^2-1)^l}_{\text{contiene il fattore } (x^2-1)^k}\right]_{-1}^{1}\right. \\
&\left. + (-1)^l\int_{-1}^{1}\underbrace{P_l^{(l)}(x)}_{\text{costante}}(x^2-1)^l\,dx\right\} = \frac{1}{2^l\,l!}P_l^{(l)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^l\,dx.
\end{aligned}$$

Inoltre,

$$P_l^{(l)}(x) = \frac{1}{2^l\,l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2l}(x^2-1)^l = \frac{1}{2^l\,l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2l}x^{2l} = \frac{(2l)!}{2^l\,l!}.$$

Applicando la formula di ricorrenza $(I_{l-1}/I_l) = 1 + (1/2l)$ and $I_0 = 2$ per l'integrale $I_l = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^l\,dx$ per arrivare all'espressione $I_l = 2^{l+1}\,l!/(2l+1)!!$ [essendo $(2l+1)!! \stackrel{\text{def}}{=} 1.3.5.\ldots.(2l-1)(2l+1)$], si ottiene infine

$$(P_l,P_l) = \frac{1}{2^l\,l!}\,\frac{(2l)!}{2^l\,l!}\,\frac{2^{l+1}\,l}{(2l+1)!!} = \frac{2}{2l+1}.$$

Quindi $\sqrt{l+\frac{1}{2}}\,P_l(x)$ ha norma 1 in $L^2(-1,1)$.

(3 + 4) ⇒ 5. Per trovare una formula di ricorrenza per i polinomi di Legendre calcoliamo prima il prodotto scalare (P_{l+1}, xP_l). Infatti, dopo $l+1$ integrazioni per parti consecutive e utilizzando $(x\,f)^{(l+1)} = x\,f^{(l+1)} + (l+1)\,f^{(l)}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
(P_{l+1}, xP_l) &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1}\cdot((l+1)!)(l!)} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{l+1} \times \\
&\times \left[x \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l+1} (x^2-1)^l + (l+1) \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l \right] dx \\
&= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1}\cdot(l!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{l+1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l \, dx \\
&= \frac{1}{2^{2l+1}\cdot(l!)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{l+1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l \, dx \\
&= \frac{(2l)!}{2^{2l+1}\cdot(l!)^2} \frac{2^{l+2}\cdot(l+1)!}{(2l+3)(2l+1)\cdots 3\cdot 1} = \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}.
\end{aligned}$$

Siccome i polinomi di Legendre sono ortogonali, essi sono linearmente indipendenti. Dunque

$$(2l+1)xP_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(x),$$

dove $a_j = 0$ per $j > l+1$ [poichè $xP_l(x)$ ha grado $l+1$]. Risultano $(2l+1)(xP_l, P_j) = (2l+1)(P_l, xP_j) = 0$ per $l < j-1$ [poichè $xP_j(x)$ ha grado $< l$] e $(2l+1)(xP_l, P_l) = 0$ [poichè $xP_l(x)^2$ è una funzione dispari]. Quindi

$$(2l+1)xP_l(x) = a_{l+1}P_{l+1}(x) + a_{l-1}P_{l-1}(x).$$

Infine troviamo

$$\begin{aligned}
(2l+1)(xP_l, P_{l+1}) &= a_{l+1}(P_{l+1}, P_{l+1}) = a_{l+1}(2/(2l+3)); \\
(2l+1)(xP_{l-1}, P_l) &= a_{l-1}(P_{l-1}, P_{l-1}) = a_{l-1}(2/(2l-1)).
\end{aligned}$$

Quindi $a_{l+1} = l+1$ e $a_{l-1} = l$. Risulta la *formula di ricorrenza*

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + l\,P_{l-1}(x), \qquad P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x. \tag{II.76}$$

Per induzione matematica si dimostrano facilmente

$$P_l(1) = 1, \qquad P_l(-1) = (-1)^l, \qquad P_l(-x) = (-1)^l P_l(x);$$

$$-1 \le P_l(x) \le +1, \qquad -1 \le x \le +1. \tag{II.77}$$

5 ⇒ 1. Dimostriamo ora la *formula generatrice*

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l = \frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}, \qquad |h|<1. \tag{II.78}$$

Infatti, scriviamo $F(x,h)$ per la parte a sinistra della (III.78). Per $|h|<1$ è permessa la derivazione termine a termine rispetto ad h, grazie alla (III.77). Si trovano facilmente le seguenti espressioni:

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)xP_l(x)h^l = xF(x,h)+2xh\sum_{l=0}^{\infty} l\,P_l(x)h^{l-1} = xF(x,h)+2xh\frac{\partial F}{\partial h};$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)P_{l+1}(x)h^l = \sum_{l=1}^{\infty} l\,P_l(x)h^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty} l\,P_l(x)h^{l-1} = \frac{\partial F}{\partial h};$$

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{\infty} l\,P_{l-1}(x)h^l &= h^2\sum_{l=1}^{\infty}(l-1)P_{l-1}(x)h^{l-2} + h\sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)h^{l-1}\\ &= h^2\frac{\partial F}{\partial h} + hF(x,h).\end{aligned}$$

Applicando la (III.76) si ha

$$xF(x,h) = (1-2xh+h^2)\frac{\partial F}{\partial h} + hF(x,h),$$

dove $F(x,0)=P_0(x)=1$. Oppure:

$$\frac{\partial F/\partial h}{F(x,h)} = \frac{x-h}{1-2xh+h^2}, \qquad F(x,0)=1.$$

La soluzione unica di questo problema di Cauchy è la funzione $F(x,h)$ data dalla parte a destra della (III.78).

1 ⇒ 2. Scrivendo $F(x,h)$ per la parte a destra nella (III.78) risulta (dopo alcuni calcoli)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -h\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)^2 (hF(x,h)).$$

In altre parole,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l\right) = -\sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)P_l(x)h^l.$$

Ciò implica l'equazione differenziale. Infine, sostituendo $x=1$ nella (III.78) si ha

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(1)h^l = \frac{1}{\sqrt{(1-h)^2}} = \frac{1}{1-h},$$

implicando $P_l(1)=1$.

5.3 Funzioni di Legendre associate

Sostituiamo $\mathcal{P}(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2} z(\xi)$ nella (III.73). Risulta

$$\boxed{(1-\xi^2)z''(\xi) - 2(m+1)\xi z'(\xi) + (l-m)(l+m+1)z(\xi) = 0.} \qquad \text{(II.79)}$$

Moltiplicando la (III.79) per $(1-\xi^2)^m$, otteniamo per $\mathcal{P} = \mathcal{P}_l$

$$\left[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_l'\right]' = -(l-m)(l+m+1)(1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l. \qquad \text{(II.80)}$$

Per $m = 0$ risulta l'equazione differenziale per il polinomio di Legendre di grado l:

$$(1-\xi^2)P_l''(\xi) - 2\xi P_l'(\xi) + l(l+1)P_l(\xi) = 0.$$

Calcolando la derivata m-esima $z = P_l^{(m)}$ di quest'equazione otteniamo

$$(1-\xi^2)z''(\xi) - 2(m+1)z'(\xi) + (l-m)(l+m+1)z(\xi) = 0.$$

Quindi le funzioni $(d/d\xi)^m P_l(\xi)$ sono soluzioni della (III.79). Moltiplicando la (III.80) per $P_{l'}(\xi)$ e la (III.80) con l' invece di l per $P_l(\xi)$ e sottraendo, otteniamo

$$\begin{aligned}[(l-l')(l+l'+1)]\,(1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l(\xi)\mathcal{P}_{l'}(\xi) = \mathcal{P}_l(\xi)\left[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_{l'}'\right]' \\ - \mathcal{P}_{l'}(\xi)\left[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_l'\right]'.\end{aligned}$$

Integrando quest'equazione tra -1 e $+1$ e applicando l'integrazione per parti risulta

$$[(l-l')(l+l'+1)] \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^m \mathcal{P}_l(\xi)\mathcal{P}_{l'}(\xi)\, d\xi = 0.$$

Quindi, se $P_l(\xi)$ sono i polinomi di Legendre, i polinomi $(d/d\xi)^m P_{l+m}(\xi)$ $(l = 0, 1, 2, \cdots)$ costituiscono un sistemi di polinomi ortogonali (di grado l) rispetto al peso $w(\xi) = (1-\xi^2)^m$.

Troviamo ora la costante di normalizzazione. Si ha

$$\begin{aligned}
&\boxed{\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) P_{l'}^{(m)}(\xi)\, d\xi} \\
&= \left[(1-\xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) P_{l'}^{(m-1)}(\xi)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{l'}^{(m-1)}(\xi)\left[(1-\xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi)\right]' d\xi \\
&= (l-m-1)(l+m)\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{m-1} P_l^{(m-1)}(\xi) P_{l'}^{(m-1)}(\xi)\, d\xi \\
&= (l+m)(l-m+1)(l+m-1)(l-m+2)\times \\
&\times \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{m-2} P_l^{(m-2)}(\xi) P_{l'}^{(m-2)}(\xi)\, d\xi \\
&= \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{1} P_l(\xi)P_{l'}(\xi)\, d\xi \boxed{= \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l.l'}.}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left(\frac{2(l+m)+1}{2}\,\frac{l!}{(l+2m)!}\right)^{1/2}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m P_{l+m}(\xi), \qquad l=0,1,2,\cdots,$$

è il sistema ortonormale dei polinomi rispetto al peso $(1-\xi^2)^m$ [con coefficiente di ξ^l positivo].

5.4 Le funzioni sferiche per $n=3$: Completezza

Nella letteratura ci sono diverse normalizzazioni delle funzioni sferiche in $\mathbb{R}^3$. Qui ne scegliamo una. Poniamo

$$\boxed{Y_l^m(\varphi,\theta)=\begin{cases} P_l^m(\cos\varphi)(\operatorname{sen}\varphi)^m\,\cos(m\theta), & m=0,1,\cdots,l;\\ P_l^{|m|}(\cos\varphi)(\operatorname{sen}\varphi)^{|m|}\operatorname{sen}(|m|\theta), & m=-1,-2,\cdots,-l,\end{cases}}$$

dove $l=0,1,2,\cdots$. Le funzioni sferiche Y_l^m $(m=0,\pm1,\cdots,\pm l)$ di ordine l sono linearmente indipendenti e le loro combinazioni lineari

$$Y_l(s)=\sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)}Y_l^m(s)$$

a coefficienti arbitrari $a_l^{(m)}$ sono anch'esse funzioni sferiche di ordine l.

Le funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ formano un sistema ortogonale e completo in $L^2(S^2)$, ed inoltre

$$\boxed{\|Y_l^m\|^2_{L^2(S^2)}=2\pi\frac{1+\delta_{0,m}}{2l+1}\,\frac{(l+|m|)!}{l-|m|)!}.}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}\|Y_l^m\|^2&=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}|Y_l^m(\theta,\varphi)|^2\,d\theta\,d\varphi\\ &=\int_{-1}^1 P_l^{|m|}(\xi)^2(1-\xi^2)^m\,d\xi\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\cos^2 m\theta\\ \operatorname{sen}^2 m\theta\end{Bmatrix}d\theta=2\pi\frac{1+\delta_{0,m}}{2l+1}\,\frac{l+|m|)!}{(l-|m|)!}.\end{aligned}$$

La completezza di un sistema ortogonale di funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ significa che ogni funzione f appartenente a $L^2(S^2)$ può essere sviluppata in serie di Fourier di queste funzioni:

$$f(s)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_l^{(m)}Y_l^m(s)=\sum_{l=0}^{\infty}Y_l(s),$$

convergente in $L^2(S^2)$. I coefficienti $a_l^{(m)}$ sono calcolati mediante la formula

$$a_l^{(m)} = \frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0,m})}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi)Y_l^m(\theta,\varphi)\operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, d\varphi.$$

Le funzioni sferiche Y_l^m, $m = 0, \pm 1, \cdots, \pm l$, sono le autofunzioni del cosiddetto *operatore di Beltrami*,

$$\boxed{L_B \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},}$$

che corrisponde all'autovalore $\lambda = l(l+1)$ di moltiplicità $2l+1$.

6 Polinomi di Hermite

Studiamo ora l'equazione

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2)u = 0, \tag{II.81}$$

dove u, z e ν non hanno più lo stesso significato come prima. Sostituendo

$$u = e^{-z^2/2}\, v, \tag{II.82}$$

risulta l'equazione

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0. \tag{II.83}$$

Per $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ la (III.83) si dice *equazione differenziale di Hermite*. Le soluzioni della (III.81) si dicono funzioni parabolico-cilindriche.

Sostituendo $v(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$ nella (III.83) si trova la seguente espressione per il coefficiente di z^l:

$$(l+2)(l+1)c_{l+2} + 2(\nu - l)c_l = 0. \tag{II.84}$$

La (III.84) è una relazione di ricorrenza che ci consente a calcolare tutti i coefficienti c_l dai coefficienti $c_0 = v(0)$ e $c_1 = v'(0)$. Si vede facilmente che esistono soluzioni polinomiali se e solo se $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$. Tali soluzioni hanno la proprietà $v(-z) = (-1)^n v(z)$ e hanno il grado n (cioè, $c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \ldots = 0$).

Definiamo ora

$$\boxed{H_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\left(\frac{d}{dz}\right)^n \{e^{-z^2}\}.} \tag{II.85}$$

Allora $H_n(z)$ è un polinomio di grado n, ha il coefficiente principale positivo e soddisfa $H_n(-z) = (-1)^n H_n(z)$. Derivando l'equazione $w' + 2zw = 0$ (che ha la soluzione $w(z) \sim e^{-z^2}$) $n+1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ risulta

$$\boxed{u'' + 2zu' + 2(n+1)u = 0.}$$

Poi si sostituisca $u = e^{-z^2} v$. Infine risulta l'equazione (III.83) per $\nu = n$:

$$v'' - 2zv' + 2nv = 0. \tag{II.86}$$

In altre parole, il polinomio di Hermite $H_n(z)$ soddisfa l'equazione differenziale di Hermite (III.86). La (III.85) si dice formula di Rodriguez.

Scriviamo ora la (III.83) nella forma

$$(e^{-z^2} v')' = -2n\, e^{-z^2}\, v.$$

Allora

$$2(n-m)H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} = (e^{-z^2} H_m')' H_n(z) - (e^{-z^2} H_n')' H_m(z).$$

Calcolando l'integrale rispetto a z si ottiene

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)H_m(z)e^{-z^2}\, dz = \Big[e^{-z^2}\left(H_m'(z)H_n(z) - H_n'(z)H_m(z)\right)\Big]_{z=-\infty}^{\infty}$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{-z^2} H_m'(z)H_n'(z) - e^{-z^2} H_n'(z)H_m'(z)\Big)\, dz = 0.$$

Quindi i polinomi di Hermite formano un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}; e^{-z^2}\, dz)$. Per calcolare la costante di normalizzazione si applichino la formula di Rodriguez (III.85) e n integrazioni per parti, risultando nella seguente successione di passaggi:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)^2 e^{-z^2}\, dz &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1}\left[H_n^{(j-1)}(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-j}\{e^{-z^2}\}\right]_{z=-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^n H_n(z)\right) e^{-z^2}\, dz \\ &= \underbrace{\Big[p(z)e^{-z^2}\Big]_{z=-\infty}^{\infty}}_{=0} + c_n\, n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = c_n\, n!\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

dove $p(z)$ è un polinomio e c_n è il coefficiente principale di $H_n(z)$ (cioè, $H_n(z) = c_n z^n + \ldots$). Calcoliamo ora i coefficienti c_n. Derivando la formula di Rodriguez (III.85) si arriva all'identità

$$\boxed{H_n'(z) = 2zH_n(z) - H_{n+1}(z).} \tag{II.87}$$

Confrontando i coefficienti di z^{n+1} nella (III.87) otteniamo $0 = 2c_n - c_{n+1}$, mentre $c_0 = 1$. Quindi $c_n = 2^n$. Infine si arriva alla seguente formula di ortogonalità:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z) e^{-z^2}\, dz = 2^n (n!) \sqrt{\pi}\, \delta_{n,m},} \tag{II.88}$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

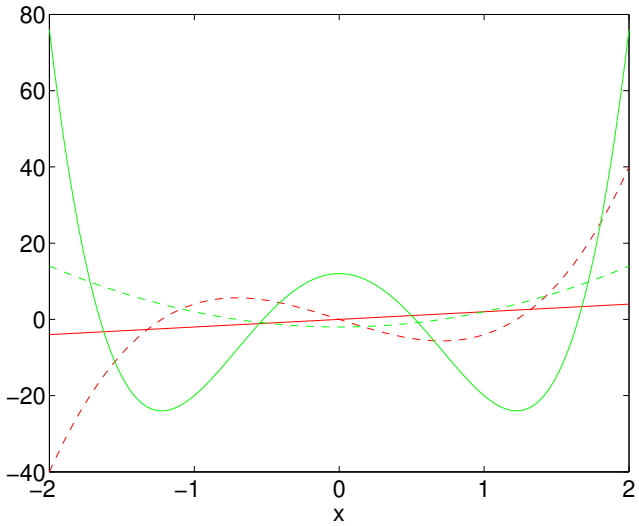

Figura II.4: I polinomi di Hermite di grado 1, 2, 3 e 4. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

Derivando la (III.86) rispetto a z e scrivendo il risultato come un'equazione differenziale per v' si ottiene

$$(v')'' - 2z(v')' + 2(n-1)(v') = 0.$$

Dunque $H_n'(z)$ e $H_{n-1}(z)$ sono soluzioni della stessa equazione differenziale che ha soltanto una singola soluzione polinomiale linearmente indipendente. Di conseguenza, $H_n'(z) = \text{cost.} H_{n-1}(z)$. Siccome $H_n(z) = 2^n\, z^n + \ldots$ e $H_{n-1}(z) = 2^{n-1}\, z^{n-1} + \ldots$, risulta $n\, 2^n = \text{cost.} 2^{n-1}$ e quindi cost. $= 2n$. In altre parole,

$$\boxed{H_n'(z) = 2n\, H_{n-1}(z).} \tag{II.89}$$

Dalle equazioni (III.87) e (III.89) arriviamo alla formula di ricorrenza

$$\boxed{2zH_n(z) = H_{n+1}(z) + 2nH_{n-1}(z),} \tag{II.90}$$

dove $H_0(z) = 1$ e $H_1(z) = 2z$.

Dimostriamo ora la formula generatrice

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!}\, t^n, \qquad t \in \mathbb{C}. \tag{II.91}$$

Infatti, ponendo $F(z,t) = e^{2zt-t^2}$ e scrivendo

$$F(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(z)}{n!}\, t^n \tag{II.92}$$

per opportuni coeffienti $h_n(z)$, risultano

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2tF(z,t),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n'(z)}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h_{n-1}(z)}{(n-1)!}\, t^n.$$

Quindi $h_n(z)$ è un polinomio in z di grado n e

$$h_n'(z) = 2nh_{n-1}(z). \tag{II.93}$$

Dalla (III.92) risulta che $h_n(0)$ coincide con la derivata n-esima di e^{-t^2} per $t = 0$, cioè con 0 se n è dispari, e con $(-1)^{n/2}(n!)/(n/2)!$ se n è pari. Dalla formula di Rodriguez (III.85) si vede facilmente che $H_n(0) = h_n(0)$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Utilizzando le espressioni (III.89) e (III.93) arriviamo alla identità $H_n(z) = h_n(z)$ e quindi alla formula generatrice (III.91).

7 Polinomi di Laguerre

I *polinomi di Laguerre* si definiscono tramite la seguente formula di Rodriguez:

$$\boxed{L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha}e^{-x}\}.} \tag{II.94}$$

Si dimostra facilmente che la (III.94) rappresenta un polinomio di grado n per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La regola di Leibnitz ci dà subito la rappresentazione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n(x^n/n!) + \ldots$. Ci limitiamo al caso $\alpha > -1$.

La funzione $w(x) = x^{n+\alpha}e^{-x}$ soddisfa l'equazione differenziale

$$xw' + (x - n - \alpha)w = 0. \tag{II.95}$$

Derivando la (III.95) $n+1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ si arriva all'equazione differenziale

$$xu'' + (x+1-\alpha)u' + (n+1)u = 0.$$

Sostituendo $u = x^\alpha e^{-x} v$ in quest'ultima equazione si ottiene la seguente *equazione differenziale di Laguerre*:

$$\boxed{xv'' + (\alpha+1-x)v' + nv = 0.} \tag{II.96}$$

Di conseguenza, $L_n^{(\alpha)}(x)$ è una soluzione dell'equazione (III.96).

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$xv'' + (\alpha+1-x)v' + \nu v = 0. \tag{II.97}$$

Sostituendo $v(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l$ si trova la seguente espressione per il coefficiente di x^l:

$$(l+1)(l+\alpha+1)c_{l+1} + (\nu - l)c_l = 0.$$

Quindi abbiamo trovato la formula di ricorrenza

$$\frac{c_{l+1}}{c_l} = \frac{l-\nu}{(l+1)(l+\alpha+1)}, \tag{II.98}$$

che ci consente a calcolare tutti i coeffienti c_l dal coefficiente iniziale $c_0 = v(0)$; bisogna richiedere $\alpha > -1$ per garantire la positività del denominatore nella parte a destra della (III.98). Risulta una soluzione polinomiale di grado $n = 0, 1, 2, \ldots$ se e solo se $\nu = n$.

Scrivendo la (III.96) nella forma

$$\left(x^{\alpha+1}e^{-x}v'\right)' + nx^\alpha e^{-x} v = 0, \tag{II.99}$$

otteniamo

$$(n–m)x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x)\left(x^{\alpha+1}e^{-x}L_m^{(\alpha)\prime}\right)' – L_m^{(\alpha)}(x)\left(x^{\alpha+1}e^{-x}L_n^{(\alpha)\prime}\right)'.$$

Calcolando l'integrale sull'intervallo $(0,\infty)$ [dove l'ipotesi $\alpha > -1$ serve per la convergenza dell'integrale] si ottiene

$$\begin{aligned}
&(n-m)\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x}\,dx \\
&= \left[L_n^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_m^{(\alpha)\prime}(x) - L_m^{(\alpha)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{(\alpha)\prime}(x)\right]_{x=0}^{\infty} \\
&- \int_0^\infty \left\{L_n^{(\alpha)\prime}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_m^{(\alpha)\prime}(x) - L_m^{(\alpha)\prime}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{(\alpha)\prime}(x)\right\}\,dx = 0,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $x^{\alpha+1} \to 0$ per $x \to 0^+$. Quindi per $\alpha > -1$ i polinomi di Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ costituiscono un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x}\, dx)$.

Per calcolare la costante di normalizzazione facciamo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)^2\, x^\alpha e^{-x}\, dx = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{(n!)^2} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}\right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n L_n^{(\alpha)}(x)\right) x^{n+\alpha} e^{-x}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{(n!)^2} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x)\right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n L_n^{(\alpha)}(x)\right) \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x}\, dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo fatto n integrazioni per parti, utilizzato la (III.94) con $\alpha + j$ al posto di α, applicato l'espressione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^n/n!) + \ldots$ e l'identità (A.1). In altre parole,

$$\boxed{\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x}\, dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{n,m},} \tag{II.100}$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

Derivando la (III.96) si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$x(v')'' + (\alpha + 2 - x)(v')' + (n-1)(v') = 0.$$

Quindi $L_n^{(\alpha)\prime}(x)$ è proporzionale a $L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$. Siccome

$$L_n^{(\alpha)\prime}(x) = \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots, \qquad L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots,$$

risulta per $\alpha > -1$

$$L_n^{(\alpha)\prime}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \tag{II.101}$$

L'ortogonalità di $L_n^{(\alpha)}(x)$ a tutti i polinomi di grado minore di n nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x}\, dx)$ conduce all'identità

$$x L_n^{(\alpha)}(x) = A_n^{(\alpha)} L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + B_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(x) + C_n^{(\alpha)} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{II.102}$$

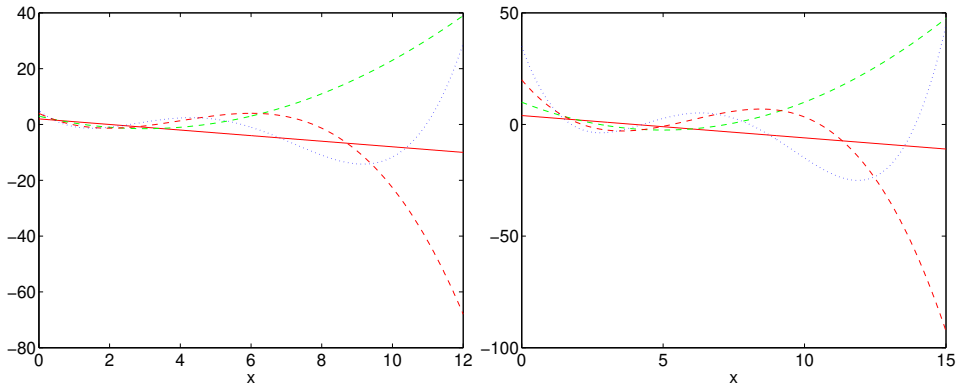

Figura II.5: I polinomi di Laguerre di grado 1, 2, 3 e 4 per $\alpha = 1$ (panello sinistro) e $\alpha = 3$ (panello destro). Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$ e A_n, B_n e C_n sono opportune costanti da determinare. Calcoliamo ora il seguente integrale:

$$
\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(x)\, x^\alpha e^{-x}\, dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1-j} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+1+\alpha} e^{-x}\, dx \\
&= \left[\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (n+1-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n+1-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) \int_0^\infty x^{n+1+\alpha} e^{-x}\, dx \\
&= -\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!},
\end{aligned}
$$

dove abbiamo utilizzato $x L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^{n+1}/n!) + \ldots$. Poi calcoliamo l'integrale:

$$
D_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x)^2\, x^\alpha e^{-x}\, dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!}\int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha}e^{-x}\}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(xL_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j}\{x^{n+\alpha}e^{-x}\}\right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{xL_n^{(\alpha)}(x)\}\right) x^{n+\alpha}e^{-x}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}(xL_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x)(-1)^{n-j}(n-j)!x^{\alpha+j}e^{-x}L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x)\right]_{x=0}^{\infty} \\
&+ \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{xL_n^{(\alpha)}(x)\}\right) x^{n+\alpha}e^{-x}\,dx \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty \left((n+1)!\,x - n(n+\alpha)n!\right) x^{n+\alpha}e^{-x}\,dx \\
&= \frac{(n+1)\Gamma(n+\alpha+2) - n(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \\
&= \frac{(2n+1+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}
$$

dove abbiamo utilizzato $xL_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n((x^{n+1} - n(n+\alpha)x^n)/n!) + \ldots$. Dalla (III.102) e le espressioni per $C_n^{(\alpha)}$ e $D_n^{(\alpha)}$ seguono $A_n^{(\alpha)} = -(n+1)$, $B_n^{(\alpha)} = 2n+1+\alpha$ e $C_n^{(\alpha)} = -(n+\alpha)$. Dunque risulta la formula di ricorrenza

$$
\boxed{(2n+1+\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x),} \qquad \text{(II.103)}
$$

dove $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = 1+\alpha-x$.

Per dimostrare la validità della formula generatrice

$$
(1-t)^{-(1+\alpha)}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n, \qquad |t|<1, \qquad \text{(II.104)}
$$

partiamo dalla serie di funzioni

$$
F(x,t) = (1-t)^{-(1+\alpha)}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)t^n, \qquad |t|<1, \qquad \text{(II.105)}
$$

dove $c_n(x)\,n!$ è la derivata parziale n-esima di $F(x,t)$ rispetto a t per $t=0$. Sostituendo la serie (III.105) nella equazione

$$
(1-t)^2\frac{\partial F}{\partial t} + [x-(1+\alpha)(1-t)]\,F = 0,
$$

otteniamo le seguenti espressioni per i coefficienti t^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ e per il coefficiente di t^0:

$$\begin{cases} (n+1)c_{n+1}(x) + (x - 2n - \alpha - 1)c_n(x) + (n+\alpha)c_{n-1}(x), \\ c_1(x) + (x - \alpha - 1)c_0(x) = 0, \end{cases}$$

dove $c_0(x) = 1$. Quindi $c_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ per $n = 0, 1, 2, \cdots$ (vedi la (III.103)).

Infine, per esprimere i polinomi di Hermite in quelli di Laguerre riscriviamo i prodotti scalari tra quest'ultimi utilizzando la trasformazione $x = t^2$:

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x}\, dx = \int_{-\infty}^\infty L_n^{(\alpha)}(t^2) L_m^{(\alpha)}(t^2) |t|^{2\alpha+1} e^{-t^2}\, dt, \tag{II.106}$$

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x}\, dx = \int_{-\infty}^\infty t L_n^{(\alpha)}(t^2) t L_m^{(\alpha)}(t^2) |t|^{2\alpha-1} e^{-t^2}\, dt. \tag{II.107}$$

Per fare scomparire i fattori $|t|^{2\alpha\pm1}$ in (III.106) e (III.107) scegliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (III.106) e $\alpha = \frac{1}{2}$ in (III.107). Quindi $H_{2n}(t)$ è proporzionale a $L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2)$ e $H_{2n+1}(t)$ è proporzionale a $tL_n^{(\frac{1}{2})}(t^2)$. Confrontando i coefficienti principali otteniamo

$$H_{2n}(t) = 2^{2n}\, n!(-1)^n L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2), \tag{II.108}$$

$$H_{2n+1}(t) = 2^{2n+1}\, n!(-1)^n\, t L_n^{(\frac{1}{2})}(t^2). \tag{II.109}$$

8 Polinomi di Chebyshev

I polinomi di Chebyshev di prima specie $T_n(x)$ e di seconda specie $U_n(x)$ si definiscono nel seguente modo:[8]

$$\boxed{T_n(x) = \cos(nt),} \qquad \boxed{U_n(x) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t},} \tag{II.110}$$

where $x = \cos(t)$. In tal caso $T_n(x)$ e $U_n(x)$ sono polinomi di x di grado n che hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \\ U_0(x) &= 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x). \end{aligned}$$

[8] Per $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ si hanno le definizioni alternative $T_n(x) = \cosh(nt)$ e $U_n(x) = \sinh((n+1)t)/\sinh t$ per $x = \cosh t$.

La formula di ricorrenza è facile da verificare:

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) \\
&= 2\cos(t)\cos(nt) = 2xT_n(x), \\
U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+2)t)}{\sin(t)} + \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \\
&= \frac{2\cos(t)\sin((n+1)t)}{\sin(t)} = 2xU_n(x).
\end{aligned}$$

Si vede subito che $-1 \leq T_n(x) \leq +1$ per $x \in [-1, 1]$, mentre $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$ e $U_n(x) = 2^n x^n + \ldots$ per $n \in \mathbb{N}$.

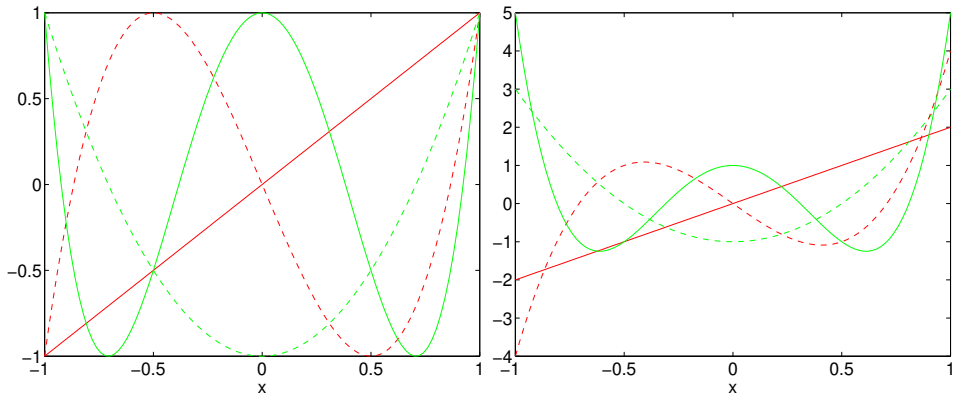

Figura II.6: I polinomi di Chebyshev di prima e seconda specia di grado 1, 2, 3 e 4. Nel panello sinistro si trovano i grafici dei polinomi di Chebyshev di prima specie e nel panello destro quelli di seconda specie. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio. Inoltre, i polinomi di Chebyshev di prima specie hanno ± 1 come i loro valori estremi.

Sono verificate le relazioni di ortogonalità

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\,dt &= \frac{\pi}{2}(1+\delta_{n,0})\delta_{n,m}, \\
\int_0^\pi \sin((n+1)t)\sin(m+1)t)\,dt &= \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

Sostituendo $x = \cos(t)$ otteniamo

$$\boxed{\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}(1+\delta_{n,0})\delta_{n,m},} \tag{II.111}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\delta_{n,m}.} \tag{II.112}$$

Quindi $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sono i polinomi ortogonali su $[-1,1]$ con peso $(1-x^2)^{-1/2}$ e $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sono i polinomi ortogonali su $[-1,1]$ con peso $(1-x^2)^{1/2}$, tranne per fattori costanti.

Le funzioni $\cos(nt)$ e $\sin(nt)$ soddisfano all'equazione differenziale $u''(t) + n^2u(t) = 0$. Sostituendo $x = \cos(t)$ e utilizzando le definizioni per $T_n(x)$ e $U_n(x)$ otteniamo

$$\boxed{\begin{cases} (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0, \\ (1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n^2U_n(x) = 0. \end{cases}}$$

In forma Sturm-Liouville abbiamo

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)^{1/2}T_n'(x)\right) = -n^2\dfrac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)^{3/2}U_n'(x)\right) = -n^2\sqrt{1-x^2}\,U_n(x). \end{cases}}$$

9 Polinomi Ortogonali Generali

Sia I un intervallo della retta reale e w una funzione positiva quasi ovunque su I tale che $\int_I |x|^{2n}w(x)\,dx < \infty$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Allora i polinomi sono tutti elementi dello spazio di Hilbert $L^2(I; w\,dx)$. Infatti, i polinomi costituiscono un sottospazio lineare denso in $L^2(I; w\,dx)$, un fatto che non dimostriamo. Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dove $\psi_n(x) = x^n$, si ottengono i polinomi ortogonali $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ rispetto al peso w, dove il grado di p_n è uguale ad n e i coefficienti principali sono tutti positivi. Data una funzione $f \in L^2(I; w\,dx)$ e definendo i coefficienti

$$c_n = \int_I f(x)p_n(x)w(x)\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_I |f(x)|^2 w(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

convergente nel senso che

$$\lim_{N\to\infty} \int_I \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n p_n(x) \right|^2 w(x)\, dx = 0.$$

I polinomi ortogonali sono stati studiati nel libro di Szegő [14]. Alcune classi di polinomi ortogonali hanno la proprietà aggiuntiva che appaiono come le autofunzioni di un problema di Sturm-Liouville su un opportuno intervallo I della retta reale. Ce l'abbiamo già visto per quanto riguardano i polinomi di Legendre, i polinomi associati di Legendre, e quelli di Hermite, Laguerre e Chebyshev. A quelli si aggiungono i polinomi di Gegenbauer (anche detti polinomi ultrasferici[9]) e i polinomi di Jacobi.

Nome dei polinomi	I	$w(x)$
Legendre	$(-1,1)$	1
Chebyshev di 1^a specie	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{-1/2}$
Chebyshev di 2^a specie	$(-1,1)$	$(1-x^2)^{1/2}$
Legendre associati	$(-1,1)$	$(1-x^2)^m$ per $m = 1,2,3,\ldots$
Jacobi	$(-1,1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ per $\alpha,\beta > -1$
Gegenbauer o ultrasferici	$(-1,1)$	$(1-x^2)^\lambda$ per $\lambda > -1$
Laguerre	$(0,\infty)$	$x^\alpha e^{-x}$ per $\alpha > -1$
Hermite	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}

Infine dimostriamo alcune proprietà degli zeri dei polinomi ortogonali.

Lemma II.1 *Si ha* $(f, p_n)_{L^2(I;w\,dx)} = 0$ *per ciascun polinomio* f *di grado* $< n$.

Dimostrazione. Sia f un polinomio di grado $< n$. Allora f è una combinazione lineare dei polinomi $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$. Siccome $(p_j, p_n) = 0$ in $L^2(I; w\,dx)$ per $j = 0, 1, \cdots, n-1$, risulta $(f, p_n) = 0$. □

Teorema II.2 *Gli zeri del polinomio* p_n *sono tutti semplici e contenuti all'interno dell'intervallo* I.

Dimostrazione. Sia $I = (a, b)$ dove $-\infty \le a < b \le +\infty$. Supponiamo che p_n ha m (con $m < n$) zeri $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ in (a, b) e $n - m$ zeri in $\mathbb{C} \setminus (a, b)$. Allora p_n ammette la rappresentazione

$$p_n(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m) q(x),$$

[9] I polinomi ortogonali su $I = (-1.1)$ con $w(x) = (1-x^2)^\lambda$ per cui $2\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, appaiono come funzioni sferiche di dimensione $\ge 2\lambda + 3$.

dove q è un polinomio di grado $n-m$ che non cambia segno in (a,b); dunque $q(x) \geq 0$ per $x \in (a,b)$. Consideriamo il polinomio f definito da

$$f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m).$$

Secondo il Lemma III.1 risulta $(f,p_n)=0$. In particolare,

$$0 = (f,p_n) = c\int_I [(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m)]^2 q(x)w(x)\,dx,$$

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa. Ciò implica che $c\int_I [(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m)]^2 q(x)w(x) = 0$ quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude pertanto che tutti gli zeri di p_n appartengono ad (a,b).

Per escludere l'esistenza di zeri multipli di p_n, rappresentiamo p_n come

$$p_n(x) = c(x-\beta_1)^{m_1}\cdots(x-\beta_r)^{m_r},$$

dove $\beta_1,\cdots,\beta_r$ sono gli zeri distinti di p_n e $m_1+\cdots+m_r=n$. Bisogna dimostrare che $r=n$, $m_1=\cdots=m_n=1$ e $c>0$. Se esiste un indice j con $m_j>1$, definiamo $n_j=0$ se m_j è pari e $n_j=1$ se m_j è dispari (cioè, se $m_j=3,5,7,\cdots$). Poi consideriamo il polinomio g definito da

$$g(x) = (x-\beta_1)^{m_1}\cdots(x-\beta_{j-1})^{m_{j-1}}(x-\beta_j)^{n_j}(x-\beta_{j+1})^{m_{j+1}}\cdots(x-\beta_r)^{m_r}.$$

Siccome il grado di g è strettamente minore di n, si ha $(g,p_n)=0$. In altre parole l'integrale

$$c\int_I \underbrace{(x-\beta_1)^{2m_1}\cdots(x-\beta_{j-1})^{2m_{j-1}}(x-\beta_j)^{m_j+n_j}(x-\beta_{j+1})^{2m_{j+1}}\cdots(x-\beta_r)^{2m_r}}_{\text{espressione non negativa, poichè } m_j+n_j \text{ è pari}}dx$$

vale zero. Quindi la funzione sotto il segno dell'integrale si annulla quasi ovunque. Contraddizione. Quindi tutti gli n zeri di p_n sono semplici. □

I polinomi ortogonali soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini.

Teorema II.3 *Sia $\alpha_n = (xp_{n+1},p_n)$, $c_n = (xp_n,p_n)$ e $\alpha_{-1}=0$. Allora*

$$(x-c_n)p_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \alpha_{n-1}p_{n-1}(x), \qquad n=0,1,2,\cdots.$$

Inoltre, se $I=(-h,h)$ e w è pari, allora $p_n(-x)=(-1)^n p_n(x)$ e $c_n=0$.

Dimostrazione. Siccome $xp_n(x)$ è un polinomio di grado $n+1$, è una combinazione lineare di $p_0,p_1,\cdots,p_n,p_{n+1}$. Purtroppo

$$(xp_n,p_j) = \int_I p_n(x)\cdot xp_j(x)w(x)\,dx = 0, \qquad j<n-1,$$

poichè $xp_j(x)$ con $j < n-1$ è un polinomio di grado $< n$. Quindi $xp_n(x)$ è una combinazione lineare di soltanto tre polinomi ortogonali: p_{n-1}, p_n, p_{n+1}. Scriviamo

$$xp_n(x) = c_n p_n(x) + \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_{n-1}(x),$$

dove non c'è il terzo termine nella parte a destra per $n = 0$. Si vede facilmente che

$$\begin{cases} \alpha_n = (xp_n, p_{n+1}) \\ \beta_n = (xp_n, p_{n-1}) = (xp_{n-1}, p_n) = \alpha_{n-1} \\ c_n = (xp_n, p_n). \end{cases}$$

In generale, se $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ sono i polinomi ortogonali rispetto al peso w su I, allora $\{(-1)^j p_j(-x)\}_{j=0}^{\infty}$ sono i polinomi ortogonali rispetto al peso $w(-x)$ su $-I$. Assumiamo ora che $I = (-h, h)$ (potenzialmente con $h = +\infty$) e w sia pari. Allora $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$ e dunque

$$c_n = \int_I \underbrace{x \overbrace{p_n(x)^2}^{pari} w(x)}_{dispari} \, dx = 0,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Introduciamo ora la funzione bivariata

$$K_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n} p_j(x) p_j(y). \tag{II.113}$$

Lemma II.4 *Vale la formula di Christoffel-Darboux*

$$K_n(x, y) = \alpha_n \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}, \tag{II.114}$$

dove $\alpha_n = (xp_n, p_{n+1})$. *Inoltre,*

$$K_n(x, x) = \alpha_n \left(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x) \right). \tag{II.115}$$

Dimostrazione. Il Teorema III.3 e la (III.113) implicano che

$$\begin{aligned} (x - y)K_n(x, y) &= \sum_{j=0}^{n} \left(\alpha_j p_{j+1}(x) + \alpha_{j-1} p_{j-1}(x) + c_j p_j(x) \right) p_j(y) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n} p_j(x) \left(\alpha_j p_{j+1}(y) + \alpha_{j-1} p_{j-1}(y) + c_j p_j(y) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\alpha_j p_{j+1}(x) p_j(y) - \alpha_{j-1} p_{j-1}(y) p_j(x) \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=0}^{n}\left(\alpha_{j-1}p_{j-1}(x)p_j(y)-\alpha_j p_{j+1}(y)p_j(x)\right)\\
&+\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\left(c_j p_j(x)p_j(y)-c_j p_j(y)p_j(x)\right)}_{=0}\\
&=\alpha_n\left(p_{n+1}(x)p_n(y)-p_n(x)p_{n+1}(y)\right).
\end{aligned}
$$

La (III.115) ne segue utilizzando il Teorema di De L'Hôpital. □

Il Lemma III.4 conduce alla seguente proprietà degli zeri dei polinomi ortogonali.

Teorema II.5 *Tra ogni coppia di zeri consecutivi del polinomio $p_{n+1}(x)$ cade esattamente uno zero del polinomio $p_n(x)$. In particolare, i polinomi $p_n(x)$ e $p_{n+1}(x)$ non hanno zeri in comune.*

Dimostrazione. Ci ricordiamo che gli zeri dei polinomi $p_n(x)$ e $p_{n+1}(x)$ sono tutti reali e semplici. Siano ora $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < \xi_{n+1}$ gli zeri del polinomio $p_{n+1}(x)$. Allora la (III.113) e (III.115) implicano che per $k = 1, 2, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
0 &< \sum_{j=0}^{n} p_j(\xi_k)^2 = \alpha_n p'_{n+1}(\xi_k)p_n(\xi_k),\\
0 &< \sum_{j=0}^{n} p_j(\xi_{k+1})^2 = \alpha_n p'_{n+1}(\xi_{k+1})p_n(\xi_{k+1}).
\end{aligned}
$$

Siccome ξ_k e ξ_{k+1} sono due zeri consecutivi (**e semplici**) del polinomio $p_{n+1}(x)$, risulta che $p'_{n+1}(\xi_k)$ e $p'_{n+1}(\xi_{k+1})$ non si annullano e hanno segni opposti. Poichè $\alpha_n \neq 0$, risulta che $p_n(\xi_k)$ e $p_n(x_{k+1})$ non si annullano e hanno segni opposti. Dunque i polinomi $p_n(x)$ e $p_{n+1}(x)$ non hanno zeri in comune e gli intervalli (ξ_k, ξ_{k+1}) $(k = 1, \ldots, n)$ contengono uno zero del polinomio $p_n(x)$. □

Capitolo III

EQUAZIONI INTEGRALI

1 Proprietà Elementari e Iterazione

Le equazioni contenenti la funzione incognita sotto il segno dell'integrale sono dette *equazioni integrali*. Molti problemi della fisica matematica possono essere ridotti ad equazioni integrali lineari della forma

$$\int_\Omega \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{III.1}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x), \tag{III.2}$$

rispetto alla funzione incognita $\varphi(x)$ in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. L'equazione (IV.1) si dice *equazione integrale di prima specie*, mentre l'equazione (IV.2) si dice *equazione di Fredholm di seconda specie*. Le funzioni note $\mathcal{K}(x,y)$ e $f(x)$ sono dette *nucleo* e *termine noto* dell'equazione integrale; λ è un parametro complesso.

L'equazione integrale (IV.2) per $f = 0$

$$\varphi(x) = \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{III.3}$$

si dice equazione integrale di Fredholm *omogenea* di seconda specie corrispondente all'equazione (IV.2). Le equazioni integrali di Fredholm di seconda specie

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_\Omega \mathcal{K}^*(x,y)\psi(y)\,dy + g(x), \tag{III.4}$$

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_\Omega \mathcal{K}^*(x,y)\psi(y)\,dy, \tag{III.5}$$

dove $\mathcal{K}^*(x,y) = \overline{\mathcal{K}(y,x)}$, sono dette *aggiunte* alle equazioni (IV.2) e (IV.3), rispettivamente. Il nucleo $\mathcal{K}^*(x,y)$ si dice *nucleo coniugato aggiunto* al nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. Il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ si dice *hermitiano* se $\mathcal{K}^*(x,y) = \mathcal{K}(x,y)$, cioè se $\overline{\mathcal{K}(y,x)} = \mathcal{K}(x,y)$ quasi ovunque. Il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ si dice *reale e simmetrico* se $\mathcal{K}(x,y)$ è reale e $\mathcal{K}(y,x) = \mathcal{K}(x,y)$ quasi ovunque. Ovviamente un nucleo reale e simmetrico è hermitiano.

Scriveremo le equazioni (IV.2), (IV.3), (IV.4) e (IV.5) in forma contratta, utilizzando la notazione d'operatore:

$$\begin{cases} \varphi = \lambda K\varphi + f, & \qquad \varphi = \lambda K\varphi, \\ \psi = \overline{\lambda} K^*\psi + g, & \qquad \psi = \overline{\lambda} K^*\psi, \end{cases}$$

dove gli operatori integrali K e K^* sono determinati dai nuclei $\mathcal{K}(x,y)$ e $\mathcal{K}^*(x,y)$, rispettivamente:

$$(Kf)(x) = \int_\Omega \mathcal{K}(x,y) f(y)\, dy, \qquad (K^*f)(x) = \int_\Omega \mathcal{K}^*(x,y) f(y)\, dy.$$

Tra poco metteremo opportune condizioni sul dominio Ω e sul nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ affinché gli operatori lineari K e K^* siano limitati in un opportuno spazio di Banach (o di Hilbert) di funzioni $f(x)$ definite in Ω. In particolare, verranno considerati gli spazi $L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ e $C(\overline{\Omega})$.

Supponiamo che nell'equazione integrale (IV.2) la regione Ω sia limitata in $\mathbb{R}^n$, la funzione f appartenga allo spazio $L^2(\Omega)$ ed il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ sia continuo su $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ (diremo *continui* questi nuclei).

Lemma III.1 *L'operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ trasferisce $L^2(\Omega)$ in $C(\overline{\Omega})$ (e, di conseguenza, $C(\overline{\Omega})$ in $C(\overline{\Omega})$ e $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$. Dunque, K è limitato come operatore lineare tra questi spazi, ed inoltre*

$$\|Kf\|_C \le M\sqrt{m(\Omega)}\|f\|_2, \qquad f \in L^2(\Omega), \tag{III.6}$$

$$\|Kf\|_C \le Mm(\Omega)\|f\|_C, \qquad f \in C(\overline{\Omega}), \tag{III.7}$$

$$\|Kf\|_2 \le Mm(\Omega)\|f\|_2, \qquad f \in L^2(\Omega), \tag{III.8}$$

dove $M = \max\limits_{x,y \in \overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} |\mathcal{K}(x,y)|$ e $m(\Omega)$ è la misura di Ω.

Il lemma si descrive tramite il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccccc} C(\overline{\Omega}) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^2(\Omega) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^1(\Omega) & \xrightarrow{K} & C(\overline{\Omega}) \\ L^2(\Omega) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^1(\Omega) & \xrightarrow{K} & C(\overline{\Omega}) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^2(\Omega) \\ L^1(\Omega) & \xrightarrow{K} & C(\overline{\Omega}) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^2(\Omega) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^1(\Omega) \end{array}$$

Dimostrazione. Siccome $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ è compatto,[1] il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è uniformemente continuo in $(x, y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Ci ricordiamo che una funzione continua definita su uno spazio compatto è uniformemente continua. Quindi, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|\mathcal{K}(x_1, y_1) - \mathcal{K}(x_2, y_2)| < \varepsilon$ se $\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| < \delta$. Di conseguenza, se $f \in L^2(\Omega)$, per $|x_1 - x_2| < \delta$ si ha la stima

$$\begin{aligned} |(Kf)(x_1) - (Kf)(x_2)| &\leq \int_\Omega |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)|\, |f(y)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_\Omega |f(y)| dy \leq \varepsilon \sqrt{M(\Omega)}\, \|f\|_2, \end{aligned}$$

e quindi K trasferisce $L^2(\Omega)$ in $C(\overline{\Omega})$.

Per $f \in C(\overline{\Omega})$ si trova la stima

$$\|f\|_2^2 = \int_\Omega |f(x)|^2\, dx \leq m(\Omega) \|f\|_C^2, \qquad f \in C(\overline{\Omega}),$$

implicando $\|f\|_2 \leq \sqrt{m(\Omega)}\, \|f\|_C$. Dunque $C(\overline{\Omega})$ è contenuto in $L^2(\Omega)$, dove l'operatore di immersione è limitato di norma limitata superiormente da $\sqrt{m(\Omega)}$. □

Cerchiamo la soluzione dell'equazione (IV.2) mediante il metodo delle approssimazioni successive, ponendo $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(x, y) \varphi^{(p-1)}(y)\, dy + f(x) \equiv \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \qquad p = 1, 2, \cdots. \tag{III.9}$$

Quindi

$$\varphi^{(p)} = \sum_{j=0}^{p} \lambda^j K^j f, \qquad p = 0, 1, 2, \cdots, \tag{III.10}$$

dove K^j denotano le potenze j-esime dell'operatore K. Secondo il Lemma IV.1, le iterazioni di $f \in L^2(\Omega)$ soddisfano la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \|K^p f\|_2 &= \|K(K^{p-1} f)\|_2 \leq M m(\Omega) \|K^{p-1} f\|_2 \\ &\leq (M m(\Omega))^2 \|K^{p-2} f\|_2 \leq \cdots \leq (M m(\Omega))^p \|f\|_2, \end{aligned}$$

cioè

$$\|K^p f\|_2 \leq (M m(\Omega))^p \|f\|_2, \qquad p = 0, 1, 2, \cdots. \tag{III.11}$$

[1] Per i sottoinsiemi di uno spazio euclideo, *compatto* vuol dire *chiuso e limitato*.

Da questa disuguaglianza segue che la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K^j f)(x), \qquad x \in \overline{\Omega}, \tag{III.12}$$

detta *serie di Neumann*, è maggiorata nella norma L^2 dalla serie numerica

$$\|f\|_2 \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j (Mm(\Omega))^j = \frac{\|f\|_2}{1 - |\lambda| Mm(\Omega)}, \tag{III.13}$$

che converge nel disco $|\lambda| < 1/Mm(\Omega)$.

Stabiliamo preliminarmente che è valida la seguente uguaglianza:

$$(Kf, g) = (f, K^* g), \qquad f, g \in L^2(\Omega). \tag{III.14}$$

Infatti, se f e g appartengono a $L^2(\Omega)$, conformemente al Lemma IV.1, anche Kf e K^*g appartengono a $L^2(\Omega)$ e quindi si ha

$$\begin{aligned}
(Kf, g) &= \int_\Omega (Kf)(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_\Omega \left[\int_\Omega \mathcal{K}(x,y) f(y)\, dy\right] \overline{g(x)}\, dx \\
&= \int_\Omega f(y) \left[\int_\Omega \mathcal{K}(x,y)\overline{g(x)}\, dx\right] dy = \int_\Omega f(y) \overline{\left[\int_\Omega \mathcal{K}^*(y,x) g(x)\, dx\right]}\, dy \\
&= \int_\Omega f(x)\overline{(K^*g)(x)}\, dx = (f, K^* g).
\end{aligned}$$

Lemma III.2 *Se K_1 e K_2 sono operatori integrali con nuclei continui $\mathcal{K}_1(x,y)$ e $\mathcal{K}_2(x,y)$, rispettivamente, l'operatore $K_3 = K_2 K_1$ è un operatore integrale con nucleo continuo*

$$\mathcal{K}_3(x,y) = \int_\Omega \mathcal{K}_2(x,y')\mathcal{K}_1(y',y)\, dy'. \tag{III.15}$$

In questo caso è valida la seguente formula:

$$(K_2 K_1)^* = K_1^* K_2^*. \tag{III.16}$$

Dimostrazione. Per tutte le $f \in L^2(\Omega)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
(K_3 f)(x) = (K_2 K_1 f)(x) &= \int_\Omega \mathcal{K}_2(x,y') \int_\Omega \mathcal{K}_1(y',y) f(y)\, dy\, dy' \\
&= \int_\Omega \int_\Omega \left[\mathcal{K}_2(x,y')\mathcal{K}_1(y',y)\, dy'\right] f(y)\, dy,
\end{aligned}$$

da cui segue la formula (IV.15). È evidente che il nucleo $\mathcal{K}_3(x,y)$ è continuo per $(x,y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, per $i = 1, 2$ esiste $\delta_i > 0$ tale che

$|\mathcal{K}_i(x_1,y_1) - \mathcal{K}_i(x_2,y_2)| < \varepsilon/([M_1+M_2]m(\Omega))$ se $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta_i$. Quindi, se $\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta = \min(\delta_1,\delta_2)$, risulta

$$|\mathcal{K}_3(x_1,y_1) - \mathcal{K}_3(x_2,y_2)| \le \int_\Omega |\mathcal{K}_2(x_1,y') - \mathcal{K}_2(x_2,y')||\mathcal{K}_1(y',y_1)|\,dy'$$
$$+ \int_\Omega |\mathcal{K}_2(x_2,y')||\mathcal{K}_1(y',y_1) - \mathcal{K}_1(y',y_2)|\,dy' < \frac{[M_2 m(\Omega) + M_1 m(\Omega)]\varepsilon}{[M_1+M_2]m(\Omega)} = \varepsilon,$$

implicando la continuità uniforme di $\mathcal{K}_3(x,y)$.

Prendendo in considerazione l'uguaglianza (IV.14), per tutte le f e g appartenenti a $L^2(\Omega)$ si ottiene

$$(f, K_3^* g) = (K_3 f, g) = (K_2 K_1 f, g) = (K_1 f, K_2^* g) = (f, K_1^* K_2^* g),\ \ f,g \in L^2(\Omega),$$

cioè $(f, K_3^* g - K_1^* K_2^* g) = 0$ per tutte le $f,g \in L^2(\Omega)$, e, quindi, $K_3^* = K_1^* K_2^*$, il che equivale all'uguaglianza (IV.16). Il lemma è dimostrato. □

Dal Lemma IV.2 appena dimostrato segue che gli operatori $K^p = K(K^{p-1}) = (K^{p-1})K$, $p = 2,3,\cdots$, sono operatori integrali ed i loro nuclei $\mathcal{K}_p(x,y)$ sono continui e soddisfano le relazioni di ricorrenza $\mathcal{K}_1(x,y) = \mathcal{K}(x,y)$,

$$\mathcal{K}_p(x,y) = \int_\Omega \mathcal{K}(x,y')\mathcal{K}_{p-1}(y',y)\,dy' = \int_\Omega \mathcal{K}_{p-1}(x,y')\mathcal{K}(y',y)\,dy'. \qquad \text{(III.17)}$$

I nuclei $\mathcal{K}_p(x,y)$ sono detti *nuclei iterati* del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$.

Dalle relazioni di ricorrenza (IV.17) segue che i nuclei iterati soddisfano la disuguaglianza

$$|\mathcal{K}_p(x,y)| \le M^p m(\Omega)^{p-1}, \qquad p = 1,2,\cdots. \qquad \text{(III.18)}$$

Dalla (IV.18) segue che la serie

$$\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \mathcal{K}_{p+1}(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}, \qquad \text{(III.19)}$$

è maggiorata mediante la serie numerica

$$\sum_{p=0}^{\infty} |\lambda|^p M^{p+1} m(\Omega)^k,$$

convergente nel disco $|\lambda| < 1/Mm(\Omega)$. Perciò la serie (IV.19) è uniformemente (anche totalmente) convergente in $(x,y,\lambda) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| <$

$(1/Mm(\Omega)) - \varepsilon\}$, per $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Di conseguenza, la sua somma è continua in $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| < (1/Mm(\Omega))\}$ ed analitica in λ nel disco $|\lambda| < 1/Mm(\Omega)$. Indichiamo la somma della serie (IV.19) con $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$:

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \mathcal{K}_{p+1}(x, y).$$

La funzione $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ è detta *risolvente* del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.

Teorema III.3 *La soluzione φ dell'equazione integrale* (IV.2) *è unica nella classe $L^2(\Omega)$ per $|\lambda| < 1/Mm(\Omega)$ e per qualunque $f \in L^2(\Omega)$ è rappresentata con il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ mediante l'equazione*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega \mathcal{R}(x, y; \lambda) f(y)\, dy, \tag{III.20}$$

in altre parole, è valida la seguente equazione operatoriale:

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R(\lambda), \qquad |\lambda| < (1/Mm(\Omega)), \tag{III.21}$$

dove $R(\lambda)$ è un operatore integrale con nucleo $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$.

Si può dimostrare che il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ di un nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ ammette un prolungamento meromorfo in tutto il piano della variabile complessa λ ed inoltre i suoi poli sono i numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.[2]

2 Equazioni integrali di Volterra

Supponiamo che $n = 1$, la regione G sia l'intervallo limtato $(0, a)$ ed il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ si annulli nel triangolo $0 < x < y < a$. Questo nucleo si dice *nucleo di Volterra*. L'equazione (IV.2) con nucleo di Volterra ha la forma

$$\boxed{\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)\, dy + f(x)} \tag{III.22}$$

e è detta *equazione integrale di Volterra* di seconda specie.

Supponiamo che nell'equazione (IV.22) sia $f \in C([0, a])$ e che il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ sia continuo nel triangolo chiuso $0 \le y \le x \le a$. Allora $|\mathcal{K}(x, y)| \le M$ per un'opportuna costante M e l'operatore integrale

$$(Kf)(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x, y) f(y)\, dy$$

[2] λ si dice numero caratteristico di K se esiste $0 \neq \varphi \in L^1(\Omega)$ tale che $\varphi = \lambda K\varphi$. In tal caso $\lambda \neq 0$, $1/\lambda$ è autovalore di K e $\varphi \in C(\overline{\Omega})$.

trasferisce $C([0,a])$ in $C([0,a])$.

Definiamo ora le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}$:

$$\varphi^{(0)} = f, \qquad \varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^k f = \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \qquad p = 1, 2, \cdots . \tag{III.23}$$

Le iterazioni $K^p f$ appartengono a $C([0,a])$ e soddisfano la stima

$$|(K^p f)(x)| \le \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \qquad x \in [0,a], \qquad p = 0, 1, \cdots . \tag{III.24}$$

Dimostriamo la stima (IV.24) per induzione rispetto a p. Per $p = 0$, la stima (IV.24) è valida. Supponendola valida per $p-1$, dimostriamo la sua validità per p:

$$\begin{aligned} |(K^p f)(x)| = \big|(K(K^{p-1} f))(x)\big| &\le \int_0^x |\mathcal{K}(x,y)||(K^{p-1} f)(y)|\, dy \\ &\le M\|f\|_C M^{p-1} \int_0^x \frac{y^{p-1}}{(p-1)!}\, dy = \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}. \end{aligned}$$

Dalla stima (IV.24) segue che la serie di Neumann (IV.10) è maggiorata su $[0,a]$ mediante la serie numerica convergente

$$\|f\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \frac{(Ma)^k}{k!} = \|f\|_C e^{|\lambda| Ma} \tag{III.25}$$

e per questa ragione è uniformente (infatti, totalmente) convergente in $x \in [0,a]$ per λ qualsiasi, definendo una funzione continua $\varphi(x)$. Dunque, in virtù della (IV.23), le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}$ per $p \to \infty$ tendono uniformemente alla funzione φ:

$$\lim_{p\to\infty} \max_{x\in[0,a]} |\varphi^{(p)}(x) - \varphi(x)| = 0, \qquad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x). \tag{III.26}$$

Qui, in virtù della (IV.25), è valida la disuguaglianza

$$\|\varphi\|_C \le \|f\|_C e^{|\lambda| Ma}. \tag{III.27}$$

Formuliamo i risultati ottenuti nella forma del seguente

Teorema III.4 *Ogni equazione integrale di Volterra* (IV.22) *con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ nel triangolo $\{(x,y) : 0 \le y \le x \le a\}$ per λ qualsiasi ha un'unica soluzione φ nella classe $C([0,a])$ per qualunque termine noto $f \in C([0,a])$. Questa soluzione è data dalla serie di Neumann uniformemente convergente* (IV.26) *soddisfa la disuguaglianza* (IV.27)*. Dunque un nucleo di Volterra continuo non ha numeri caratteristici.*

Risolviamo ora l'equazione di Volterra

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \varphi(y)\, dy + f(x), \qquad 0 \le x \le a.$$

Se $f \in C^1([0,a])$, allora l'equazione integrale si riduce al problema di Cauchy

$$\varphi'(x) = \lambda\varphi(x) + f'(x), \qquad \varphi(0) = f(0).$$

La sua soluzione unica ha la forma

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= e^{\lambda x} f(0) + \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f'(y)\, dy \\ &= e^{\lambda x} f(0) + \left[e^{\lambda(x-y)} f(y)\right]_{y=0}^{x} + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y)\, dy \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y)\, dy.\end{aligned}$$

Quest'ultima espressione si generalizza facilmente a $f \in C([0,a])$.

3 Equazioni Integrali con Nucleo Hermitiano

Un nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è detto *hermitiano* se questo nucleo coincide con il suo coniugato hermitiano, $\mathcal{K}(x,y) = \mathcal{K}^*(x,y) = \overline{\mathcal{K}(y,x)}$. La corrispondente equazione integrale

$$\boxed{\varphi(x) = \lambda \int_\Omega \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\, dy + f(x)} \tag{III.28}$$

per λ reali coincide con la sua aggiunta, essendo $K^* = K$ un operatore autoaggiunto nello spazio $L^2(\Omega)$. Se il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è continuo, K è anche limitato su $L^2(\Omega)$. I numeri caratteristici e le autofunzioni trovati sono anche i numeri caratteristici e le autofunzioni se la (IV.28) viene considerata nello spazio $L^2(\Omega)$ per un nucleo continuo ed hermitiano qualsiasi.

a. Operatori integrali con nucleo continuo hermitiano: Compattezza. Supponiamo che K sia un operatore integrale con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$. Quest'operatore trasferisce $L^2(\Omega)$ (Ω è una regione limitata) in $L^2(\Omega)$ (vedi il Lemma IV.1) ed è autoaggiunto:

$$(Kf, g) = (f, Kg), \qquad f, g \in L^2(\Omega). \tag{III.29}$$

Inversamente, se un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ è autoaggiunto, questo nucleo è hermitiano. Infatti, dalla (IV.29) (valida anche per

$f, g \in C(\overline{\Omega})$) segue che $\mathcal{K}(x,y)$ e $\mathcal{K}^*(x,y)$ sono ambedue il nucleo dell'operatore integrale K e quindi $\mathcal{K}(x,y) = \mathcal{K}^*(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

Ne segue facilmente che tutti i nuclei iterati $\mathcal{K}_p(x,y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$ sono anch'essi hermitiani:

$$\mathcal{K}_p^*(x,y) = (\mathcal{K}^*)_p(x,y) = \mathcal{K}_p(x,y).$$

Sia M un compatto.[1] Un sottoinsieme $\mathcal{M}$ (cioè, un insieme di funzioni continue su M) si dice *equicontinuo* su M se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{M}$, non appena $|x_1 - x_2| < \delta$ per $x_1, x_2 \in M$. In particolare, $f \in C(M)$ è (uniformemente) continua se e solo se l'insieme $\mathcal{M} = \{f\}$ è equicontinuo.

Lemma III.5 *Un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ trasferisce ogni insieme limitato appartenente a $L^2(\Omega)$ in un insieme limitato in $C(\overline{\Omega})$ e equicontinuo su $\overline{\Omega}$.*

Dimostrazione. Sia B un insieme limitato in $L^2(\Omega)$: $\exists A : \|f\|_p \leq A$ per ogni $f \in B$. Dal Lemma IV.1 segue che $\|Kf\|_C \leq Mm(\Omega)^{1/2} A$, $f \in B$, $p = 1, 2$, e quindi K trasferisce B in un insieme limitato in $C(\overline{\Omega})$. Inoltre, visto che il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è uniformemente continuo su $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, per un $\varepsilon > 0$ qualsiasi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\mathcal{K}(x',y) - \mathcal{K}(x'',y)| < \frac{\varepsilon}{A(m(\Omega))^{1/2}},$$

quando $|x' - x''| < \delta$ e $\{x', x'', y\} \subset \overline{\Omega}$. Da ciò, utilizzando la disuguaglianza (IV.6), in cui $\mathcal{K}(x,y)$ è sostituito con $|\mathcal{K}(x',y) - \mathcal{K}(x'',y)|$, per ogni $f \in B$ si ottiene

$$\begin{aligned} |(Kf)(x') - (Kf)(x'')| &= \left| \int_\Omega [\mathcal{K}(x',y) - \mathcal{K}(x'',y)]\, f(y)\, dy \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon (m(\Omega))^{(p-1)/p} \|f\|_p}{A(m(\Omega))^{(p-1)/p}} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

quando $|x' - x''| < \delta$ e $\{x', x'', y\} \subset \overline{\Omega}$. Ciò vuol dire che l'insieme $\{Kf : f \in B\}$ è equicontinuo su $\overline{\Omega}$. □

Teorema III.6 (Teorema di Ascoli-Arzelà) *Se un insieme infinito B è limitato in $C(M)$ dove M è un compatto, ed è equicontinuo su M, da quest'insieme si può estrarre una successione convergente in $C(M)$.*[3]

[3] In altre parole, se un insieme B è limitato in $C(M)$ dove M è un compatto, ed è equicontinuo su M, la sua chiusura in $C(M)$ è compatta.

Dimostrazione. Come è noto, ogni sottoinsieme chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$ ha un sottoinsieme denso numerabile $\{x_n : n = 1, 2, \cdots\}$. Per ipotesi, l'insieme di numeri $\{f(x_1) : f \in B\}$ è limitato. Quindi esiste una successione $\{f_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ tale che $f_k^{(1)}(x_1)$ è convergente se $k \to \infty$. Inoltre, visto che l'insieme di numeri $\{f_k^{(1)}(x_2) : k = 1, 2, \cdots\}$ è limitato, estraiamo dalla $\{f_k^{(1)}\}$ una sottosuccessione $\{f_k^{(2)}\}$ tale che $\{f_k^{(2)}(x_2)\}$ è convergente. Continuando così, troviamo le successioni $\{f_k^{(m)}\}$ in B, dove $n = 1, 2, \cdots$ e $\{f_k^{(n+1)}\}$ è una sottosuccessione della $\{f_k^{(n)}\}$, tale che $\{f_k^{(n)}(x_n)\}$ è convergente se $n \to \infty$.

Consideriamo ora la successione diagonale $\{g_k\}$ in B dove $g_k = f_k^{(k)}$, $k = 1, 2, \cdots$. Per un qualunque punto x_i la successione numerica $\{g_k(x_i)\}$ converge se $k \to \infty$, poichè, per costruzione, per $k \geq i$, questa successione è una sottosuccessione della successione convergente $\{f_k^{(i)}(x_i)\}$.

Dimostriamo ora che la successione di g_k, $k = 1, 2, \cdots$, è uniformemente convergente su M. Supponiamo che sia $\varepsilon > 0$. Visto che questa successione è equicontinua su M, esiste $\delta > 0$ tale che per $k = 1, 2, \cdots$ si ha

$$|g_k(x) - g_k(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{III.30}$$

quando $|x - x'| < \delta$ e $x, x' \in M$. Essendo M compatto, dall'insieme di punti $x_1, x_2, \cdots$ si può scegliere un numero finito di questi punti, $x_1, x_2, \cdots, x_l$, $l = l(\varepsilon)$, in modo che, per ogni punto $x \in M$ esista un punto x_i, $1 \leq i \leq l$, tale che $|x - x_i| < \delta$. Ricordando che la successione di $g_k(x)$, $k = 1, 2, \cdots$, converge ai punti $x_1, \cdots, x_l$, concludiamo che esiste un numero $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$|g_k(x_i) - g_p(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad k, p \geq N, \ i = 1, 2, \cdots, l. \tag{III.31}$$

Sia ora x un punto arbitrario dell'insieme M. Scegliendo un punto x_i, $1 \leq i \leq l$, tale che $|x - x_i| < \delta$, in virtù delle (IV.30) e (IV.31) si ottiene

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g_p(x)| &\leq |g_k(x) - g_k(x_i)| + |g_k(x_i) - g_p(x_i)| + |g_p(x_i) - g_p(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \qquad k, p \geq N, \end{aligned}$$

dove N non dipende da $x \in M$. Ciò significa che la successione di g_k, $k = 1, 2, \cdots$, è una successione di Cauchy in $C(M)$. Siccome $C(M)$ è uno spazio di Banach, la successione converge uniformemente su M. □

Il teorema di Ascoli-Arzelà esprime la proprietà di *compattezza* di un qualunque insieme limitato e equicontinuo in $C(M)$. Inoltre, il Lemma IV.5 afferma che un operatore integrale con nucleo continuo trasferisce ogni insieme limitato in $L^2(\Omega)$ in un sottoinsieme di $C(\overline{\Omega})$ con chiusura (in $C(\overline{\Omega})$) compatta.

c. Equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano: Il principio variazionale. In questo paragrafo descriviamo i numeri caratteristici di un operatore integrale con nucleo hermitiano.

Teorema III.7 (Principio di Rayleigh-Ritz) *Per ciascun nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y) \not\equiv 0$ l'operatore integrale K ha almeno un numero caratteristico e il numero caratteristico λ_1 più piccolo in modulo soddisfa il principio variazionale*

$$\boxed{\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{0 \neq f \in L^2(\Omega)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2}.} \tag{III.32}$$

Dimostrazione. Sia

$$\nu = \sup_{\|f\|_2=1} \|Kf\|_2. \tag{III.33}$$

Dalla (IV.8) segue che $\|Kf\|_2 \leq M\, m(\Omega)$ sulle funzioni di $L^2(\Omega)$ di norma 1 e quindi $\nu \leq M\, m(\Omega)$. È inoltre evidente che $\nu \geq 0$. Dimostriamo che $\nu > 0$. Infatti, se $\nu = 0$, allora, in virtù della (IV.33), avremmo $\|Kf\|_2 = 0$, cioè $Kf = 0$ per tutte le $f \in L^2(\Omega)$, e quindi $\mathcal{K}(x,y) = 0$, $x, y \in \Omega$, il che contraddice l'ipotesi.

Dalla definizione della ν segue l'esistenza di una successione di f_k, $k = 1, 2, \cdots$, $\|f_k\|_2 = 1$, tale che

$$\|Kf_k\|_2 \to \nu, \qquad k \to +\infty; \tag{III.34}$$

inoltre, è valida la disuguaglianza

$$\|K^2 f\|_2 = \left\| K\left(\frac{Kf}{\|Kf\|_2}\right)\right\|_2 \|Kf\|_2 \leq \nu \|Kf\|_2, \qquad f \in L^2(\Omega). \tag{III.35}$$

Dimostriamo ora che

$$K^2 f_k - \nu^2 f_k \to 0, \qquad k \to +\infty, \text{ in } L^2(\Omega). \tag{III.36}$$

Infatti, utilizzando le (IV.29), (IV.34) e (IV.35), si ottiene

$$\begin{aligned}
\|K^2 f_k - \nu^2 f_k\|_2^2 &= (K^2 f_k - \nu^2 f_k, K^2 f_k - \nu^2 f_k) \\
&= (K^2 f_k, K^2 f_k) + \nu^4 (f_k, f_k) - \nu^2 (f_k, K^2 f_k) - \nu^2 (K^2 f_k, f_k) \\
&= \|K^2 f_k\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2 (Kf_k, Kf_k) \\
&\leq \nu^2 \|Kf_k\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2 \|Kf_k\|_2^2 \\
&= \nu^4 - \nu^2 \|Kf_k\|_2^2 \to 0, \qquad k \to +\infty,
\end{aligned}$$

il che è equivalente alla relazione limite (IV.36).

Conformemente al Lemma IV.5, la successione delle funzioni Kf_k, $k = 1, 2, \cdots$, è limitata in $C(\overline{\Omega})$ e equicontinua su $\overline{\Omega}$. Ma in questo caso, **in base al teorema di Ascoli-Arzelà**, esiste anche una sottosuccessione $\psi_i = Kf_{k_i}$, $i = 1, 2, \cdots$, che converge in $C(\overline{\Omega})$ ad una funzione $\psi \in C(\overline{\Omega})$, $\|\psi - \psi_i\|_C \to 0$, $i \to \infty$. Da ciò, utilizzando le (IV.6) e (IV.7), e la relazione (IV.36), si ottiene

$$\begin{aligned}
&\|K^2\psi - \nu^2\psi\|_C \le \|K^2(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2\|\psi - \psi_i\|_C + \|K^2\psi_i - \nu^2\psi_i\|_C \\
&\le M\, m(\Omega)\|K(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2\|\psi - \psi_i\|_C + \|K(K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i})\|_C \\
&\le (M^2 m(\Omega)^2 + \nu^2)\|\psi - \psi_i\|_C + M\sqrt{m(\Omega)}\|K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}\|_2 \to 0,\ i \to +\infty,
\end{aligned}$$

e, di conseguenza,

$$K^2\psi = \nu^2\psi.$$

Dimostriamo che $\psi \neq 0$. Dalla relazione limite (IV.36) segue che

$$K\psi_i - \nu^2 f_{k_i} \to 0, \qquad i \to +\infty \text{ in } L^2(\Omega),$$

e, di conseguenza, $\|K\psi_i\|_2 \to \nu^2$, $i \to +\infty$. D'altra parte, dal Lemma IV.1 segue che $\|K\psi_i\|_2 \to \|K\psi\|_2$, $i \to +\infty$. Quindi, $\|K\psi\|_2 = \nu^2 > 0$, da cui segue che $\psi \neq 0$.

Dunque, la funzione ψ costruita è un'autofunzione del nucleo $\mathcal{K}_2(x, y)$ corrispondente all'autovalore ν^2. Ma, allora, almeno uno dei numeri $\pm\nu$ è autovalore del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. In tal modo, il numero caratteristico λ_1 costruito è uguale a $1/\nu$ in modulo e, quindi, in virtù della (IV.33), soddisfa il principio variazionale (IV.32).

Non resta altro che stabilire che λ_1 è il numero caratteristico più piccolo in modulo del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. Infatti, se λ_0 e φ_0 sono il numero caratteristico e la corrispondente autofunzione, cioè $\lambda_0 K\varphi_0 = \varphi_0$, allora, in virtù della (IV.32), si ha

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2} \ge \frac{\|K\varphi_0\|_2}{\|\varphi_0\|_2} = \frac{1}{|\lambda_0|},$$

e quindi $|\lambda_1| \le |\lambda_0|$. □

Considerando il teorema sopra dimostrato, per le equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$, si ottengono le seguenti asserzioni:

L'insieme dei numeri caratteristici $\{\lambda_k\}$ non è vuoto, è situato sull'asse reale, e non ha punti di accumulazione finiti; ogni numero caratteristico è di moltiplicità finita ed il sistema di autofunzioni $\{\varphi_k\}$ può essere scelto ortonormale:

$$(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{k,i}. \tag{III.37}$$

Se $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, l'equazione (IV.28) *è univocamente risolvibile per un termine noto $f \in C(\overline{\Omega})$ qualsiasi. Se $\lambda = \lambda_k$, per la risolvibilità dell'equazione* (IV.28) *è necessario e sufficiente che*

$$(f, \varphi_{k+1}) = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots, r_k - 1, \tag{III.38}$$

dove $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_{k+r_k-1}$ sono autofunzioni corrispondenti al numero caratteristico λ_k e r_k è la moltiplicità di λ_k.

Sia $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ un nucleo integrale hermitiano e sia K il corrispondente operatore integrale in $L^2(\Omega)$. Allora esistono un numero caratteristico $0 \neq \lambda_1 \in \mathbb{R}$ e un'autofunzione $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ di norma 1 tali che

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{\|f\|_2=1} \|Kf\|_2 = \|K\varphi_1\|.$$

Poniamo

$$\mathcal{K}_1(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \frac{\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(y)}}{\lambda_1}.$$

Se $\mathcal{K}_1(x, y) \equiv 0$, allora λ_1 è l'unico numero caratteristico di K e $\mathcal{K}(x, y) = \varphi_1(x)\overline{\varphi_1(y)}/\lambda_1$ è un nucleo degenere. Se $\mathcal{K}_1(x, y) \not\equiv 0$ e K_1 è il corrispondente operatore integrale, allora esistono un numero caratteristico $0 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ e un'autofunzione $\varphi_2 \in L^2(\Omega)$ di norma 1 e ortogonale a φ_1 tali che

$$\frac{1}{|\lambda_2|} = \sup_{\|f\|_2=1} \|K_1 f\|_2 = \|K\varphi_2\|.$$

Poniamo

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \mathcal{K}_1(x, y) - \frac{\varphi_2(x)\overline{\varphi_2(y)}}{\lambda_2}.$$

Se $\mathcal{K}_2(x, y) \equiv 0$, allora λ_1 e λ_2 sono gli unici numeri caratteristici di K e

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}}{\lambda_j}.$$

Se $\mathcal{K}_2(x, y) \not\equiv 0$ e K_2 è il corrispondente operatore integrale, allora esistono un numero caratteristico $0 \neq \lambda_3 \in \mathbb{R}$ con $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ e un'autofunzione $\varphi_3 \in L^2(\Omega)$ di norma 1 e ortogonale a φ_1 e φ_2 tali che

$$\frac{1}{|\lambda_3|} = \sup_{\|f\|_2=1} \|K_2 f\|_2 = \|K\varphi_3\|,$$

ECC. Supponiamo di aver trovato i numeri caratteristici $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (con $0 < |\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_p|$) e il sistema ortonormale $\{\varphi_1, \ldots, \lambda_p\}$ tali che $\lambda_j = \lambda_j K\varphi_j$ $(j = 1, \ldots, p)$. Poniamo

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \mathcal{K}_{p-1}(x, y) - \frac{\varphi_p(x)\overline{\varphi_p(y)}}{\lambda_p}.$$

Se $\mathcal{K}_p(x, y) \equiv 0$, allora $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sono gli unici numeri caratteristici di K e

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}}{\lambda_j}.$$

Se $\mathcal{K}_p(x, y) \not\equiv 0$ e K_p è il corrispondente operatore integrale, allora esistono un numero caratteristico $0 \neq \lambda_{p+1} \in \mathbb{R}$ con $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_p| \leq |\lambda_{p+1}|$ e un'autofunzione $\varphi_{p+1} \in L^2(\Omega)$ di norma 1 e ortogonale a $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ tali che

$$\frac{1}{|\lambda_{p+1}|} = \sup_{\|f\|_2=1} \|K_p f\|_2 = \|K\varphi_{p+1}\|.$$

Se l'applicazione ripetuta del principio di Rayleigh-Ritz viene abortito dopo p passaggi, abbiamo trovato tutti i p numeri caratteristici $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (con $0 < |\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_p|$) con il corrispondente sistema ortonormale di autofunzioni $\varphi_1, \ldots, \lambda_p$, mentre il nucleo integrale di partenza

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}}{\lambda_j}$$

è degenere. Se non si abortisce la procedura, troviamo un numero infinito di numeri caratteristici $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ in ordine di valor assoluto crescente con il corrispondente sistema ortonormale $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ di autofunzioni. Almeno formalmente si può scrivere

$$\boxed{\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}}{\lambda_j}.}$$

In tutti i casi vale

$$\boxed{\frac{1}{|\lambda_j|} = \sup_{\substack{\|f\|_2=1 \\ f\perp\varphi_1,\ldots,f\perp\varphi_{j-1}}} \|Kf\|_2 = \|K\varphi_j\|_2,}$$

dove $j = 2, 3, \ldots, p \leq +\infty$.

Studiamo ora la condizione sotto cui è una **base** ortonormale il sistema ortonormale delle autofunzioni φ_j. Se $K\psi = 0$, allora

$$(\psi, \varphi_j) = \frac{1}{\lambda_j}(\psi, K\varphi_j) = \frac{1}{\lambda_j}(K\psi, \varphi_j) = 0.$$

D'altra parte, se $(\psi, \varphi_j) = 0$ per ogni j, allora

$$K\psi = \sum_j (\psi, \varphi_j)\varphi_j = 0.$$

In altre parole,

$$\{\psi \in L^2(\Omega) : K\psi = 0\} = \{\psi \in L^2(\Omega) : \psi \perp \varphi_j \text{ per ogni } j\}.$$

Di conseguenza, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ è una base ortonormale se e solo se $\psi = 0$ è l'unico vettore ortogonale a tutte le autofunzioni φ_j se e solo se $\psi = 0$ è l'unico vettore tale che $K\psi = 0$. Dunque $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ è base ortonormale di $L^2(\Omega)$ se e solo se zero non è autovalore di K.

4 Teorema di Hilbert-Schmidt

Supponiamo che $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ siano i numeri caratteristici del nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ disposti in ordine di crescita del loro modulo, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots$, e che $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ siano le corrispondenti autofunzioni ortonormali, $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{kl}$.

Come sappiamo, i numeri caratteristici λ_k sono reali e le autofunzioni $\varphi_k(x)$ sono continue su $\overline{\Omega}$; in questo caso l'insieme $\{\lambda_k\}$ è finito o numerabile; nell'ultimo caso si ha $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Inoltre, in virtù della (IV.32), è valida la disuguaglianza

$$\|Kf\|_2 \leq \frac{1}{|\lambda_1|}\|f\|_2, \qquad f \in L^2(\Omega). \tag{III.39}$$

Notiamo un'altra disuguaglianza, e cioè[4]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_\Omega |\mathcal{K}(x, y)|^2 \, dy, \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{III.40}$$

Nel seguito verrà infatti dimostrato che vale l'uguaglianza nella (IV.40).

[4] Se il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ ha un numero finito di numeri caratteristici , $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$, poniamo $\lambda_k = +\infty$ per $k > N$.

Introduciamo ora la successione di nuclei continui hermitiani

$$\mathcal{K}^{(p)}(x,y) = \mathcal{K}(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \qquad p = 1, 2, \cdots, \qquad . \tag{III.41}$$

I corrispondenti operatori integrali $K^{(p)}$ hermitiani soddisfano

$$K^{(p)} f = Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i, \qquad f \in L^2(\Omega). \tag{III.42}$$

Dimostriamo che $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots$, e $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \cdots$ costituiscono tutti i numeri caratteristici e tutte le autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$. Infatti, in virtù della (IV.42) abbiamo

$$K^{(p)}\varphi_k = K\varphi_k - \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_k, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i = K\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k, \qquad k \geq p+1,$$

di modo che λ_k e φ_k, $k \geq p+1$, siano numeri caratteristici ed autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$. Inversamente, siano λ_0 e φ_0 un numero caratteristico e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$, e cioè, in virtù della (IV.42), si avrà

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)}\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_0)}{\lambda_i} \varphi_i. \tag{III.43}$$

Da qui per $k = 1, 2, \cdots, p$ si ottiene

$$\begin{aligned}(\varphi_0, \varphi_k) &= \lambda_0 (K\varphi_0, \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_k)}{\lambda_i} \\ &= \lambda_0 (\varphi_0, K\varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \delta_{ik} = \frac{\lambda_0}{\lambda_k}(\varphi_0, \varphi_k) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k}(\varphi_0, \varphi_k) = 0,\end{aligned}$$

e quindi, in virtù della (IV.43), $\lambda_0 = \lambda_0 K\varphi_0$. Dunque, λ_0 e φ_0 sono il numero caratteristico e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. Visto che φ_0 è ortogonale a tutte le autofunzioni $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$, ne segue che λ_0 coincide con uno de numeri caratteristici $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots$ e φ_0 può essere considerata uguale a φ_k per $k \geq p+1$. Dunque, λ_{p+1} è il numero caratteristico più piccolo del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$ in modulo. Applicando la disuguaglianza (IV.39) a questo nucleo e tenendo conto della (IV.42), si ottiene la disuguaglianza

$$\|K^{(p)} f\|_2 = \left\| Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_2 \leq \frac{\|f\|_2}{|\lambda_{p+1}|}, \qquad f \in L^2(\Omega), \tag{III.44}$$

dove $p = 1, 2, \cdots$.

Supponiamo che il nucleo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ abbia un numero finito di numeri caratteristici: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$. Da quanto abbiamo dimostrato, il nucleo hermitiano $\mathcal{K}^{(N)}(x, y)$ non ha numeri caratteristici, e quindi, in base al Teorema IV.7, si ha $\mathcal{K}^{(N)}(x, y) \equiv 0$, in modo che, in virtù della (IV.41), si ha

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \tag{III.45}$$

il che significa che il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è degenere.

Da ciò, e ricordando anche che un nucleo degenere ha sempre un numero finito di numeri caratteristici, formuliamo il seguente risultato: *affinché un nucleo continuo hermitiano sia degenere, è necessario e sufficiente che questo nucleo abbia un numero finito di numeri caratteristici.*

Dimostriamo che *il nucleo iterato $\mathcal{K}_2(x, y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ può essere sviluppato in una serie bilineare in termini delle autofunzioni di questo nucleo,*

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k^2}, \tag{III.46}$$

e la serie è uniformemente convergente su $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

Tenendo conto del fatto che, in virtù della (IV.17), si ha

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \int_\Omega \mathcal{K}(x, y')\mathcal{K}(y', x)\, dy' = \int_\Omega \mathcal{K}(x, y')\overline{\mathcal{K}(x, y')}\, dy' = \int_\Omega |\mathcal{K}(x, y)|^2\, dy,$$

si ottiene l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = \int_\Omega |\mathcal{K}(x, y)|^2\, dy. \tag{III.47}$$

Dal teorema di Dini[5] segue che la serie (IV.47) è uniformemente convergente in $x \in \overline{\Omega}$, poichè la parte a destra è una funzione continua in $x \in \overline{\Omega}$. Integrando termine a termine la serie uniformemente convergente (IV.47) e tenendo conto della normalizzazione delle autofunzioni, si ottiene la formula

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_\Omega \int_\Omega |\mathcal{K}(x, y)|^2\, dxdy.} \tag{III.48}$$

Dimostriamo or il seguente risultato.

[5]Teorema di Dini: Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione *crescente* di funzioni continue definite su un compatto. Se esiste $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e f è continua sul compatto, allora la convergenza è uniforme.

Teorema III.8 (Teorema di Hilbert-Schmidt) *Se una funzione f appartiene all'immagine di un operatore integrale K di nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$, cioè $f = Kh$, la sua serie in termini delle autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è uniformemente convergente su $\overline{G}$ alla funzione*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x). \tag{III.49}$$

Dimostrazione. Visto che $f = Kh$, $h \in L^2(G)$, in base al Lemma IV.1, $f \in C(\overline{G})$ ed i coefficienti di Fourier delle funzioni f e h in termini delle autofunzioni $\{\varphi_k\}$ del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ sono collegati con la relazione

$$(f, \varphi_k) = (Kh, \varphi_k) = (h, K\varphi_k) = \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}. \tag{III.50}$$

Se il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ ha un numero finito di autovalori, si ha, in virtù della (IV.45),

$$f(x) = (Kh)(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x),$$

ed il teorema di Hilbert-Schmidt è dimostrato.

Supponiamo ora che il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ abbia un numero infinito di autovalori. In questo caso $|\lambda_k| \to +\infty$, $k \to +\infty$. Perciò la serie (IV.49) converge a f nella norma di $L^2(G)$:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{p} (f, \varphi_k)\varphi_k \right\|_2 = \left\| Kh - \sum_{k=1}^{p} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k \right\|_2 \le \frac{\|h\|_2}{|\lambda_{p+1}|} \to 0, \qquad p \to +\infty.$$

Resta da dimostrare che la serie (IV.49) converge in modo uniforme su $\overline{G}$. Utilizzando la disuguaglianza di Schwartz e la (IV.40), si ottiene, per tutti i valori di p e q e per ogni $x \in \overline{G}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)| \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \le \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{k=p}^{q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right]^{1/2} \\ &\le \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2} \left[\int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2 \, dy \right]^{1/2} \le M\sqrt{m(G)} \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{III.51}$$

Il primo membro della disuguaglianza (IV.51) tende a zero per $p, q \to +\infty$. Ciò significa che la serie (IV.49) è puntualmente convergente su $\overline{G}$. Siccome il maggiorante in (IV.51) non dipende da $x \in \overline{G}$, la convergenza risulta uniforme in $x \in \overline{G}$. □

Capitolo IV

PROBLEMI DI STURM-LIOUVILLE

Prima di studiare alcuni problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico (in particolare le equazioni di Laplace, di Poisson, delle onde e di Schrödinger nello spazio e nel piano), trattiamo i corrispondenti problemi unidimensionali.

1 Problema di Sturm-Liouville

Il cosiddetto *problema di Sturm-Liouville* ha la forma[1]

$$Lu \stackrel{\text{def}}{\equiv} -(pu')' + qu = \lambda u, \qquad 0 < x < \ell, \tag{IV.1}$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0, \tag{IV.2}$$

dove h_1, h_2, H_1, H_2 sono costanti non negative tali che $h_1 + h_2 > 0$ e $H_1 + H_2 > 0$.[2] Assumiano che $p \in C^1[0,\ell]$, $p(x) > 0$ per ogni $x \in [0,\ell]$, e $q \in C[0,\ell]$ è reale. Come dominio dell'operatore L prendiamo

$$\mathcal{M}_L = \left\{ u \in C^2(0,\ell) \cap C^1[0,\ell] : \begin{array}{r} u'' \in L^2(0,\ell) \\ h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \\ H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0 \end{array} \right\}.$$

Se $h_2 = H_2 = 0$ (cioè $u(0) = u(\ell) = 0$), abbiamo le *condizioni di Dirichlet*. Se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè $u'(0) = u'(\ell)$), stiamo parlando delle *condizioni di Neumann*. Gli altri casi si dicono *condizioni miste* oppure *condizioni di Robin*.

[1] Ci limitiamo ora al problema di Sturm-Liouville con condizioni al contorno separate.

[2] Potremmo scegliere angoli $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tali che $h_1 = \cos\alpha$, $h_2 = \sin\alpha$, $H_1 = \cos\beta$ e $H_2 = \sin\beta$.

L'operatore L è hermitiano, cioè $(Lf, g) = (f, Lg)$ per ogni $f, g \in \mathcal{M}_L$. Infatti,

$$\begin{aligned}(Lf, g) - (f, Lg) &= \int_0^\ell [-(pf')'\overline{g} + qf\overline{g}]\, dx - \int_0^\ell [-f(p\overline{g}')' + f(q\overline{g})]\, dx \\ &= [-(pf')\overline{g} + f(p\overline{g}')]_0^\ell + \int_0^\ell [pf'\overline{g}' - f'p\overline{g}']\, dx \\ &= [-(pf')\overline{g} + f(p\overline{g}')]_0^\ell = [p(f\overline{g}' - f'\overline{g})]_0^\ell\,,\end{aligned}$$

la quale si cancella se le condizioni (V.2) sono ambedue di tipo Dirichlet o Neumann (se non valgono $h_1, h_2 \in (0,1)$ e $H_1, H_2 \in (0,1)$). Per $h_2, H_2 > 0$, sostituiamo $f'(\ell) = (-H_1/H_2)f(\ell)$ e $f'(0) = (h_1/h_2)f(0)$ e analogamente $g'(\ell) = (-H_1/H_2)g(\ell)$ e $g'(0) = (h_1/h_2)g(0)$, risultando in $(Lf, g) - (f, Lg) = 0$.

L'integrale d'energia assume la seguente forma:

$$(Lf, f) = \int_0^\ell \left(p|f'|^2 + q|f|^2\right)\, dx + \frac{h_1}{h_2}p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2}p(\ell)|f(\ell)|^2, \quad f \in \mathcal{M}_L, \tag{IV.3}$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Se $q(x) \geq q_{min}$ per ogni $x \in [0, \ell]$, l'integrale d'energia (Lf, f) soddisfa

$$(Lf, f) \geq q_{min}\|f\|_2^2, \qquad f \in \mathcal{M}_L.$$

Quindi tutti gli autovalori di L (che hanno un'autofunzione in $\mathcal{M}_L$) sono reali e cadono nell'intervallo $[q_{min}, +\infty)$. Se q_{min} fosse un autovalore di L con la corrispondente autofunzione $0 \neq f \in \mathcal{M}_L$, allora la (V.3) implicherebbe che valgono le condizioni di Neumann negli estremi dell'intervallo ($h_2 = H_2 = 0$), $q(x) \equiv q_{min}$ è costante e l'autofunzione stessa è constante. In tutti gli altri casi gli autovalori cadono nell'intervallo $(q_{min}, +\infty)$.

1.1 Funzione di Green

Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L. Consideriamo il problema al contorno

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f(x), \qquad 0 < x < \ell, \tag{IV.4}$$

$$h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \qquad H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0, \tag{IV.5}$$

dove $f \in C(0, \ell) \cap L^2(0, \ell)$. Dato che $\lambda = 0$ non è autovalore dell'operatore L, la soluzione del problema al contorno (V.4)-(V.5) nella classe $\mathcal{M}_L$ è unica. Costruiamo ora la soluzione di questo problema.

Siano v_1 e v_2 soluzioni non nulle (reali) dell'equazione omogenea $Lv = 0$ che soddisfano le condizioni

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0, \qquad H_1 v_2(\ell) + H_2 v_2'(\ell) = 0. \tag{IV.6}$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie segue che queste soluzioni esistono ed appartengono alla classe $C^2[0,\ell]$. Le soluzioni lineari v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti, nel caso contrario $v_1(x) = cv_2(x)$ per qualche $0 \neq c \in \mathbb{R}$ e, di conseguenza, in base alla (V.6) la soluzione v_1 soddisfa anche la seconda condizione al contorno (V.5). Ciò significa che v_1 è un'autofunzione dell'operatore L corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$, contrariamente all'ipotesi; inoltre segue che in tal caso $v_1 \in \mathcal{M}_L$. Perciò il determinante Wronskiano vale

$$w(x) = \det \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0, \qquad x \in [0,\ell].$$

Allora ò $(pw)'(x) = (v_1(pv_2') - v_2(pv_1'))' = v_1(pv_2')' - v_2(pv_1')' = -v_1 q v_2 + v_2 q v_1 \equiv 0$. Quindi risulta l'identità

$$pw \equiv p(0)w(0), \qquad x \in [0,\ell]. \tag{IV.7}$$

Cercheremo la soluzione del problema (V.4)-(V.5) per mezzo del metodo della variazione delle costanti,

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x). \tag{IV.8}$$

Allora $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ soddisfano il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(x)/p(x) \end{bmatrix} \tag{IV.9}$$

con determinante $w(x) \neq 0$. Risolvendo questo sistema ed utilizzando l'identità (V.7), si ottiene

$$c_1'(x) = \frac{v_2(x)f(x)}{pw}, \qquad c_2'(x) = -\frac{v_1(x)f(x)}{pw}. \tag{IV.10}$$

Per soddisfare le condizioni al contorno (V.5), osserviamo che esistono due costanti d'integrazione c_1 e c_2 tali che

$$u(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) - \frac{v_1(x)}{pw}\int_x^\ell v_2(y)f(y)\,dy - \frac{v_2(x)}{pw}\int_0^x v_1(y)f(y)\,dy.$$

Calcolando la derivata si trova

$$u'(x) = c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) - \frac{v_1'(x)}{pw} \int_x^\ell f(y) v_2(y)\, dy - \frac{v_2'(x)}{pw} \int_0^x v_1(y) f(y)\, dy.$$

Tenendo conto dalle condizioni (V.6), otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= h_1 u(0) - h_2 u'(0) = c_1 \left[h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0) \right]; \\ 0 &= H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = c_1 \left[H_1 v_2(\ell) + H_2 v_2'(\ell) \right], \end{aligned}$$

e quindi, in virtù del fatto che le espressioni tra parentesi quadrate non si annullano, troviamo $c_1 = c_2 = 0$. In altre parole,

$$u(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y) f(y)\, dy, \tag{IV.11}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x,y) &= -\frac{1}{pw} \begin{cases} v_1(x) v_2(y), & 0 \le x < y \le \ell, \\ v_2(x) v_1(y), & 0 \le y < x \le \ell, \end{cases} \\ &= -\frac{1}{pw} v_1(\min(x,y)) v_2(\max(x,y)). \end{aligned} \tag{IV.12}$$

La funzione $\mathcal{G}(x,y)$ è detta *funzione di Green* del problema al contorno (V.4)-(V.5) o dell'operatore L. Questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Inoltre, vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial \mathcal{G}(y+0,y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}(y-0,y)}{\partial x} = -\frac{w(y)}{pw} = -\frac{1}{p(y)}, \qquad y \in (0,\ell). \tag{IV.13}$$

Consideriamo l'operatore integrale G su $L^2(0,\ell)$ con nucleo $\mathcal{G}(x,y)$. Allora questo nucleo è reale, simmetrico e continuo. Dunque G è un operatore lineare autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L^2(0,\ell)$. Siccome $u = Gf$ appartiene ad $\mathcal{M}_L$ per ogni $f \in C(0,\ell) \cap L^2(0,\ell)$, il dominio $\mathcal{M}_L$ è strettamente contenuto nell'immagine dell'operatore integrale G. Ne segue facilmente che l'immagine di G (cioè, $\{Gf : f \in L^2(0,\ell)\}$) coincide con il dominio dell'estensione autoaggiunta $\overline{L}$ di L. Infatti, $\overline{L} = G^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_L = D(L) & \xrightarrow{L} & C[0,\ell] \\ \text{imm.} \big\downarrow & & \big\downarrow \text{imm.} \\ G[L^2(0,\ell)] = D(\overline{L}) & \xrightarrow[\overline{L}=G^{-1}]{} & L^2(0,\ell) \end{array}$$

Nel caso in cui $\lambda = 0$ è autovalore del problema (V.4)-(V.5), bisogna scegliere qualche $\mu \in \mathbb{R}$ che non è autovalore, e riscrivere (V.4)-(V.5) nella forma equivalente

$$(L-\mu)u \equiv -(pu')' + (q-\mu)u = f(x) - \mu u(x), \qquad 0 < x < \ell, \tag{IV.14}$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \tag{IV.15}$$

Partendo dalle due soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $(L-\mu)u = 0$ che soddisfano le condizioni (V.6) e quindi sono linearmente indipendenti, arriviamo ad una funzione di Green $\mathcal{G}(x, y; \mu)$ ed un operatore integrale $G(\mu)$ dipendente di μ tali che

$$u = G(\mu)\,[f - \mu u]\,.$$

Quest'ultima si può scrivere nella forma dell'equazione integrale di Fredholm

$$u(x) + \mu \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) u(y)\, dy = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) f(y)\, dy, \qquad 0 \le x \le \ell. \tag{IV.16}$$

Il dominio dell'estensione autoaggiunta $\overline{L}$ di L [o di $L - \mu$] coincide con l'immagine dell'operatore integrale $G(\mu)$.

Esempio IV.9 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$-u'' = f(x), \qquad h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0.$$

Le soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $-u'' = 0$ che soddisfano le condizioni (V.6), hanno la forma (tranne un fattore costante)

$$v_1(x) = h_1 x + h_2, \qquad v_2(x) = H_1 \ell + H_2 - H_1 x,$$

e quindi $w(x) = -h_1(H_1\ell + H_2) - h_2 H_1$ si annulla se e solo se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè, condizioni di Neumann in ambedue gli estremi). Se $h_1 + H_1 > 0$, si trova per la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_1(H_1\ell + H_2) + h_2 H_1}[h_1 x + x_2][H_1(\ell - y) + H_2], & 0 \le x < y \le \ell, \\ \dfrac{1}{h_1(H_1\ell + H_2) + h_2 H_1}[H_1(\ell - x) + H_2][h_1 y + h_2], & 0 \le y < x \le \ell. \end{cases}$$

Per trovare gli autovalori, cerchiamo le soluzioni $v_1(x, \lambda)$ e $v_2(x, \lambda)$ dell'equazione omogenea $-u'' = \lambda u$ che soddisfano le condizioni (V.6), mentre $\lambda > 0$. Otteniamo

$$\begin{aligned} v_1(x, \lambda) &= h_2\sqrt{\lambda}\,\cos(x\sqrt{\lambda}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda}); \\ v_2(x, \lambda) &= H_2\sqrt{\lambda}\,\cos((\ell - x)\sqrt{\lambda}) + H_1 \sin((\ell - x)\sqrt{\lambda}), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} w(x) &= v_1(0,\lambda)v_2'(0,\lambda) - v_1'(0,\lambda)v_2(0,\lambda) \\ &= \sqrt{\lambda}\left[(h_2H_2\lambda - h_1H_1)\sin(\ell\sqrt{\lambda}) - (h_2H_1 + h_1H_2)\sqrt{\lambda}\cos(\ell\sqrt{\lambda})\right]. \end{aligned}$$

Un numero $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se $w(x) \equiv 0$. Sotto le condizioni di Dirichlet ($h_2 = H_2 = 0$) e sotto quelle di Neumann ($h_1 = H_1 = 0$) segue

$$\sin(\ell\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Quindi gli autovalori e le autofunzioni sono

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \qquad \begin{cases} n = 1,2,3,\cdots, & u_n(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right), \quad \text{[Dirichlet]} \\ n = 0,1,2,\cdots, & u_n(x) = \cos\left(\dfrac{n\pi x}{\ell}\right). \quad \text{[Neumann]} \end{cases}$$

Sotto le altre condizioni (cioè, se $h_2H_1 + h_1H_2 > 0$), $\lambda = 0$ non è mai autovalore e $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se è una radice positiva dell'equazione transcedente[3]

$$\operatorname{cotg}(\ell\sqrt{\lambda}) = \frac{h_2H_2\lambda - h_1H_1}{(h_2H_1 + h_1H_2)\sqrt{\lambda}}.$$

C'è un numero infinito di tali radici (infatti, una successione crescente λ_n che tende a $+\infty$) ed ogni radice corrispondente all'autofunzione

$$u_n(x,\lambda) = h_2\sqrt{\lambda_n}\cos(x\sqrt{\lambda_n}) + h_1\sin(x\sqrt{\lambda_n}).$$

Le radici $\sqrt{\lambda_n}$ si trovano più facilmente nel modo grafico. Non ci sono autovalori fuori dell'intervallo $[0,+\infty)$.

1.2 Riduzione ad un'equazione integrale

Facciamo vedere che il problema di Sturm-Liouville può essere ridotto ad un'equazione integrale di Fredholm con nucleo reale, simmetrico e continuo $\mathcal{G}(x,y)$.

Teorema IV.10 *Il problema al contorno*

$$Lu = \lambda u + f, \qquad u \in D(\overline{L}), \qquad f \in C(0,\ell) \cap L^2(0,\ell), \tag{IV.17}$$

[3]Ponendo $x = \sqrt{\lambda}$, $\alpha = h_2H_1 + h_1H_2 > 0$, $\beta = h_2H_2 \geq 0$ e $\gamma = h_1H_1 \geq 0$ con $\beta + \gamma > 0$, si vede subito che i grafici di $(\alpha x)/(\beta x^2 - \gamma)$ e $\operatorname{tg}(\ell x)$ hanno un numero infinito di punti di intersezione $x > 0$.

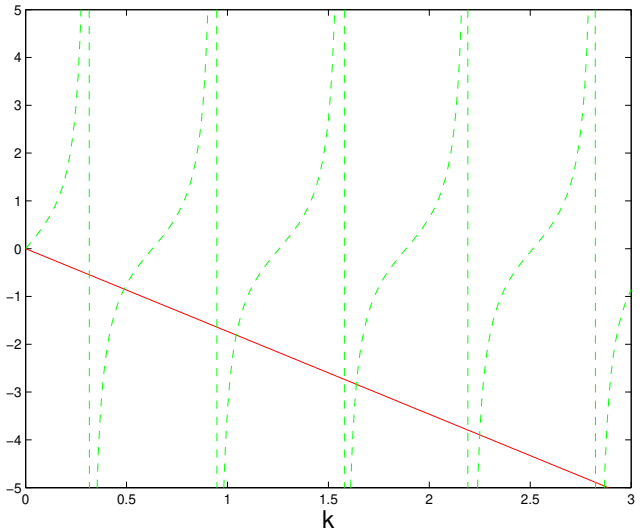

Figura IV.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni $y = \tan(xL)$ e $y = -k\tan\alpha$ per $L = 5$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Gli autovalori sono i valori di $k > 0$ corrispondenti ai loro punti di intersezione.

con la condizione che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)u(y)\,dy + \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)f(y)\,dy, \qquad u \in L^2(0,\ell), \quad \text{(IV.18)}$$

dove $\mathcal{G}(x,y)$ è la funzione di Green dell'operatore L. Inoltre, le soluzioni u dei problemi equivalenti (V.17) *e* (V.18) *appartengono ad $\mathcal{M}_L$.*

Dimostrazione. Se $u(x)$ è una soluzione del problema al contorno (V.17), allora

$$u(x) = (G[\lambda u + f])(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)[\lambda u(y) + f(y)]\,dy, \qquad 0 \le x \le \ell,$$

cioè $u(x)$ soddisfa l'equazione integrale (V.18).

Inversamente, supponiamo che la funzione $u_0 \in L^2(0,\ell)$ soddisfi l'equazione integrale (V.18). Se G denota l'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}(x,y)$, allora $u_0 = G(\lambda u_0 + f) \in D(\overline{L})$ e $\overline{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. Dall'uguaglianza

$$u_0(x) = -\frac{v_1(x)\displaystyle\int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy + v_2(x)\int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy}{p(0)w(0)}$$

segue che $u_0 \in C[0,\ell]$, poichè le funzioni sotto il segno degli integrali appartengono ad $L^1(0,\ell)$. In tal caso segue dall'equazione precedente che $u_0 \in C^1[0,\ell]$ con derivata

$$u_0'(x) = -\frac{v_1'(x)\displaystyle\int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy + v_2'(x)\int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)]\,dy}{p(0)w(0)}.$$

Da quell'ultima equazione segue che $u_0 \in C^2[0,\ell]$. Inoltre, dalla (V.6) segue che $u_0(x)$ soddisfa le condizioni al contorno (V.2). Dunque $u_0 \in \mathcal{M}_L$. Di conseguenza, $Lu_0 = \overline{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. □

Applicando il teorema precedente al caso $f = 0$, concludiamo che ogni autofunzione dell'operatore L (in principio appartenente a $D(\overline{L})$) appartiene ad $\mathcal{M}_L$. Inoltre, tutte le autofunzioni appartengono a $C[0,\ell]$. Quindi il problema al contorno per $f = 0$ (cioè, il problema agli autovalori) è equivalente a quello agli autovalori dell'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x,y)u(y)\,dy \tag{IV.19}$$

in $C[0,\ell]$ oppure in $L^2(0,\ell)$, a condizione che $\lambda = 0$ non sia autovalore dell'operatore L.

Eliminiamo ora l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L. Per farlo, sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non è un autovalore. Allora $\mu = 0$ non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q - \mu_0)u = \mu u, \tag{IV.20}$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \tag{IV.21}$$

Ma $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$ e $D(\overline{L}) = D(\overline{L_1})$. Quindi il problema di Sturm-Liouville (V.1)-(V.2) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = (\lambda - \mu_0)\int_0^\ell \mathcal{G}_1(x,y)u(y)\,dy, \tag{IV.22}$$

dove $\mathcal{G}_1(x,y)$ è la funzione di Green dell'operatore L_1.

1.3 Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni

Abbiamo dunque stabilito l'equivalenza tra il problema di Sturm-Liouvville omogeneo ed il problema agli autovalori per l'equazione integrale omogenea (V.22) con nucleo integrale $\mathcal{G}_1(x,y)$ reale, simmetrico e continuo. Gli autovalori

λ del problema (V.1)-(V.2) sono collegati ai numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{G}_1(x,y)$ con la relazione $\mu = \lambda - \mu_0$, mentre le corrispondenti autofunzioni coincidono. Quindi, per il problema di Sturm-Liouville sono validi tutti gli enunciati della teoria delle equazioni integrali con nucleo continuo, reale e simmetrico. In particolare[4] *l'insieme degli autovalori* $\{\lambda_k\}$ *di questo problema non è vuoto e non ha punti di accumulazione finiti; gli autovalori sono reali e sono anche di moltiplicità finita; le autofunzioni possono essere scelte reali ed ortonormali ed appartengono a* $C^2[0,\ell]$.

Il problema di Sturm-Liouville ha alcune proprietà specifiche.

1) *Gli autovalori appartengono all'intervallo* $[q_{\min},\infty)$ *dove* $q_{\min} = \min\limits_{x\in[0,\ell]} q(x)$. Infatti, per $f \in \mathcal{M}_L$ si ha

$$\begin{aligned}(Lf,f) &= \int_0^\ell \left(p|f'|^2 + q|f|^2\right)\,dx + \frac{h_1}{h_2}p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2}p(\ell)|f(\ell)|^2 \\ &\geq q_{\min}\|f\|_2^2,\end{aligned}$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Quindi, se λ è un autovalore di L con corrispondente autofunzione u, allora $u \in \mathcal{M}_L$ e $\lambda\|u\|_2^2 = (Lu,u) \geq q_{\min}\|u\|_2^2$, e dunque $\lambda \geq q_{\min}$.

2) *L'insieme degli autovalori è infinito numerabile.* Infatti, se quest'insieme fosse finito, $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_N\}$, il nucleo $\mathcal{G}_1(x,y)$ sarebbe degenere:

$$\mathcal{G}_1(x,y) = \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k+1}, \tag{IV.23}$$

dove $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ sono i corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome $\varphi_k \in C^2[0,\ell]$, risulterebbe una contraddizione con la (V.13):

$$\frac{\partial\mathcal{G}_1(y+0,y)}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{G}_1(y+0,y)}{\partial x} = 0, \qquad y \in (0,\ell).$$

3) *Ogni autovalore è semplice.* Sia λ_0 un autovalore. Allora la corrispondente autofunzione u sofddisfa $Lu = \lambda_0 u$ e le due condizioni al contorno (V.6) [per $v_1 = v_2 = u$]. Ciascuna di queste condizioni definisce un sottospazio di $L^2(0,\ell)$ di dimensione 1. Quindi l'autospazio corrispondente all'autovalore λ_0 è unidimensionale.

[4] Sfruttiamo il fatto che il corrispondente operatore integrale K è compatto e autoaggiunto su $L^2(\Omega)$. Ciò si deve alla stima $\int_\Omega\int_\Omega |\mathcal{G}_1(x,y)|^2\,dx\,dy < +\infty$.

Le condizioni al contorno (V.2) si dicono *separate*, poichè riguardano i valori e le derivate della u in estremi diversi dell'intervallo $(0, \ell)$. Più generalmente, per $u, v \in C^2[0, \ell]$ risulta dopo due integrazioni per parti:

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \left[p\left(u\overline{v}' - u'\overline{v}\right)\right]_0^\ell .$$

La parte a destra si annulla se u, v soddisfano le condizioni separate (V.2). Purtroppo si annullano anche se consideriamo le condizioni non separate

$$\sqrt{p(0)}\, u(0) = \pm\sqrt{p(\ell)}\, u(\ell), \qquad \sqrt{p(0)}\, u'(0) = \pm\sqrt{p(\ell)}\, u'(\ell),$$

per la u e per la v, dove bisogna scegliere il segno $+$ due volte oppure il segno meno due volte. In tal caso si può introdurre il dominio $\mathcal{M}_L$ ed estenderlo ad un dominio su cui l'operatore differenziale L è autoaggiunto. Per esempio, consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = u(\ell), \qquad u'(0) = u'(\ell).$$

In tal caso gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{2n\pi}{\ell}\right)^2, & n = 0, 1, 2, \cdots \\ u_0 = 1, \qquad u_n(x) = c_1 \cos\left(\dfrac{2n\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\dfrac{2n\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \cdots . \end{cases}$$

Tranne per l'autovalore $\lambda_0 = 0$, tutti gli autospazi hanno la dimensione 2. D'altra parte, per il problema di Sturm-Liouville con condizioni antiperiodiche

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = -u(\ell), \qquad u'(0) = -u'(\ell),$$

gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{(2n-1)\pi}{\ell}\right)^2, & n = 1, 2, 3, \cdots \\ u_n(x) = c_1 \cos\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\dfrac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \cdots . \end{cases}$$

In questo caso tutti gli autospazi hanno la dimensione 2.

Siano $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ gli autovalori della L e $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome il problema agli autovalori è equivalente a quello per un'equazione integrale con nucleo continuo reale e simmetrico, il sistema delle autofunzioni è completo in $L^2(0, \ell)$. In altre parole, ogni funzione $f \in L^2(0, \ell)$ può essere sviluppata in una serie

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k, \tag{IV.24}$$

dove

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f,\varphi_k)|^2 , \qquad \lim_{N\to+\infty} \int_0^\ell \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} (f,\varphi_k)\varphi_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

Esempio IV.11 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni periodiche

$$-u'' = \lambda u, \qquad u(0) = u(\ell), \qquad u'(0) = u'(\ell).$$

Allora gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate sono:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \lambda_n^c = \lambda_n^s = \left(\dfrac{2n\pi}{\ell}\right)^2, \\ \varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}, & \varphi_n^c(x) = \left(\dfrac{2}{\ell}\right)^{1/2} \cos\left(\dfrac{2n\pi x}{\ell}\right), \ \varphi_n^s(x) = \left(\dfrac{2}{\ell}\right)^{1/2} \sin\left(\dfrac{2n\pi x}{\ell}\right), \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \cdots$. Per $f \in L^2(0,\ell)$ risulta la serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) \right),$$

dove

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\ell f(x)\, dx,$$
$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx, \ b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

2 Problemi di Sturm-Liouville singolari

Finora ci siamo limitati ai problemi di Sturm-Liouville detti *regolari*. Ciò vuol dire che l'equazione differenziale ha la forma

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \qquad 0 < x < \ell, \tag{IV.25}$$

dove $p \in C^1[0,l]$ è strettamente positiva (anche agli estremi dell'intervallo $[0,l]$) e $q \in C[0,l]$ è una funzione reale. Nelle applicazioni appaiono, purtroppo, problemi di Sturm-Liouville in cui la funzione p è positiva all'interno dell'intervallo $(0,l)$ e si annulla ad uno (o ambedue) degli estremi. Esistono anche applicazioni importanti in cui l'intervallo è illimitato. Tali problemi di Sturm-Liouville si dicono *singolari*.

La teoria dei problemi di Sturm-Liouville singolari è stata principalmente sviluppata da Weyl (1908). L'esistenza di uno zero della p all'estremo $x = 0$

implica l'impossibilità di convertire l'equazione differenziale in un'equazione della forma $y'' + \ldots = 0$ con condizioni iniziali di tipo $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_1$. Ciò compromette in modo serio la costruzione della funzione di Green e la conversione del problema di Sturm-Liouville in un'equazione integrale con nucleo hermitiano. Un'altra difficoltà è la descrizione delle condizioni al contorno che conducono ad un operatore autoaggiunto e quindi ad una teoria spettrale. La terza difficoltà consiste nella possibilità dell'esistenza di spettro continuo. Ciò capita in particolare per l'equazione di Schrödinger radiale con potenziale che tende a zero se $|x| \to \infty$, per cui $\mathbb{R}^+$ è lo spettro continuo dell'operatore di Sturm-Liouville. Tutto quanto vuol dire che non c'è alcuna speranza di una teoria generale. Invece bisogna trattare le applicazioni in modo ad hoc.

Esempio IV.12 Sia $\nu \geq 0$. Consideriamo il problema al contorno

$$L_\nu u \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x} u = \lambda x u, \qquad 0 < x < 1, \tag{IV.26}$$

$$u(x) = O(x^\gamma), \qquad x \to 0; \qquad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \tag{IV.27}$$

dove $\gamma = \min(\nu, 1)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. Sia $\mathcal{M}_{L_\nu}$ l'insieme di tutte le funzioni $u \in C^2((0,1]) \cap L^2((0,1); x\,dx)$ che soddisfano alle condizioni al contorno (V.27) e la condizione $x^{-1/2} L_\nu u \in L^2(0,1)$. Quest'insieme è denso nello spazio di Hilbert $L^2((0,1); x\,dx)$ in cui verrà studiato il problema al contorno.

Dimostriamo ora che l'operatore L_ν è positivo. Infatti, nel prodotto scalare di $L^2(0,1)$ si ha per $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$

$$\begin{aligned}
(L_\nu u, u) &= -\int_0^1 (xu')'\overline{u}\,dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x}\,dx \\
&= \int_0^1 x|u'|^2\,dx - [xu'\overline{u}]_{x=0}^1 + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x}\,dx \\
&= \int_0^1 x|u'|^2\,dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x}\,dx + \frac{\alpha}{\beta}|u(1)|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, tutti gli autovalori dell'operatore L_ν sono non negativi. Affinchè $\lambda = 0$ sia autovalore dell'operatore L_ν, è necessario e sufficiente che $\nu = 0$ ed $\alpha = 0$ [condizione di Neumann all'estremo $x = 1$]; a quest'autovalore corrisponde l'autofunzione costante. Gli autovalori sono anche semplici. Discutiamo ora il caso $\lambda > 0$. In tal caso le uniche soluzioni della (V.26) limitate per $x \to 0^+$ sono i multipli della funzione $J_\nu(x)$. Una tale soluzione soddisfa la condizione (V.27) se e solo se

$$\alpha J_\nu(\sqrt{\lambda}) + \beta\sqrt{\lambda}\, J_\nu'(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

cioè, se e solo se $\mu = \sqrt{\lambda}$ è una radice dell'equazione (III.43). Enumerando questi zeri da $0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \cdots$, otteniamo gli autovalori (soltanto quelli diversi da 0) $\lambda_k^{(\nu)} = [\mu_k^{(\nu)}]^2$ e le corrispondenti autofunzioni $J_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)$ ($k = 1, 2, \cdots$). Per $\nu = \alpha = 0$ si aggiunga l'autovalore $\lambda_0^{(0)} = 0$ con la corrispondente autofunzione costante.

Per $\nu = 0$ le funzioni $v_1(x) = 1$ e $v_2(x) = \beta - \alpha \log(x)$ soddisfano all'equazione (V.26) e, rispettativamente, alla prima e alla seconda condizione (V.27). Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale $L_0 u \equiv -(xu')' = xf(x)$ hanno la forma

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x), \tag{IV.28}$$

dove

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = -f(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{IV.29}$$

Sia $\alpha > 0$ (cioè, escludiamo la condizione di Neumann in $x = 1$). Dunque $c_1'(x) = [\log(x) - \frac{\beta}{\alpha}]xf(x)$ e $c_2'(x) = xf(x)/\alpha$. Quindi

$$c_1(x) = c_1 + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha}\right] yf(y)\, dy, \qquad c_2(x) = c_2 - \frac{1}{\alpha}\int_x^1 yf(y)\, dy.$$

Siccome

$$\begin{aligned} u(x) = &\left(-\alpha c_2 + \int_0^1 yf(y)\, dy\right)\log(x) + c_1 + \beta c_2 \\ &+ \int_0^x [\log(y) - \frac{\beta}{\alpha}]yf(y)\, dy - \frac{\beta}{\alpha}\int_x^1 yf(y)\, dy - (\log x)\int_0^x yf(y)\, dy, \end{aligned}$$

si ha $c_2 = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 yf(y)\, dy$, e dunque

$$u(x) = c_1 + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha}\right] yf(y)\, dy - \left[\log(x) - \frac{\beta}{\alpha}\right]\int_0^x yf(y)\, dy.$$

La seconda condizione

$$0 = u(1) + \frac{\beta}{\alpha}u'(1) = c_1 + \int_0^1 \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha}\right] yf(y)\, dy$$

ci dà la costante c_1. Infine

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y)f(y)\, ydy, \tag{IV.30}$$

dove la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{\beta}{\alpha} - \log\max(x, y) > 0.$$

Quindi il problema (V.26)-(V.27) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) - \lambda \int_0^1 \mathcal{G}(x,y)u(y)\, ydy = \int_0^1 \mathcal{G}(x,y)f(y)\, ydy,$$

da risolvere nello spazio di Hilbert $L^2((0,1); x\, dx)$. Per $\nu > 0$ l'espressione esatta della funzione di Green si trova in [4].

Esempio IV.13 Consideriamo ora il problema al contorno

$$Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = \lambda u, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{IV.31}$$

su un intervallo illimitato, dove $\mu > 0$. Sia $\mathcal{M}_L$ l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$ tali che la sua derivata seconda (distribuzionale) $u'' \in L^2(\mathbb{R})$. Allora $v_1(x) = e^{\mu x}$ e $v_2(x) = e^{-\mu x}$ soddisfano all'equazione $v_j'' + \mu^2 v_j = 0$ per $j = 1, 2$. Le soluzioni dell'equazione $Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = f$ hanno tutte la forma

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x),$$

dove

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}.$$

Quindi $c_1'(x) = -e^{-\mu x} f(x)/2\mu$ e $c_2'(x) = e^{\mu x} f(x)/2\mu$. Di conseguenza,

$$c_1(x) = c_1 + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{-\mu y} f(y)\, dy, \qquad c_2(x) = c_2 + \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^x e^{\mu y} f(y)\, dy.$$

Dunque

$$u(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{\mu(x-y)} f(y)\, dy + \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^x e^{-\mu(x-y)} f(y)\, dy. \tag{IV.32}$$

Affinchè $u \in L^2(\mathbb{R})$, ci vuole $c_1 = c_2 = 0$. Quindi

$$u(x) = \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y)\, dy. \tag{IV.33}$$

Si osservi che $\mathcal{G}(x,y) = e^{-\mu|x-y|}/2\mu$ prende il posto della funzione di Green.

Esempio IV.14 Consideriamo ora il problema al contorno

$$\begin{cases} Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = \lambda u, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0) = 0, & \text{Dirichlet}, \\ u'(0) = 0, & \text{Neumann}, \\ (\cos\alpha)u(0) - (\sin\alpha)u'(0) = 0, & \text{Condizione mista}, \end{cases} \tag{IV.34}$$

su un intervallo illimitato, dove $\mu > 0$ e $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Sia $\mathcal{M}_L$ l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$ tali che la sua derivata seconda[5] $u'' \in L^2(\mathbb{R}^*)$ e $(\cos\alpha)u(0) = (\sin\alpha)u'(0)$. Seguendo il metodo dell'esempio precedente troviamo al posto della (V.32)

$$u(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu}\int_x^\infty e^{\mu(x-y)} f(y)\,dy + \frac{1}{2\mu}\int_0^x e^{-\mu(x-y)} f(y)\,dy. \tag{IV.35}$$

Affinchè $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, ci vuole $c_1 = 0$. Quindi

$$u(x) = c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu}\int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y)\,dy. \tag{IV.36}$$

Ora sostituiamo la condizione al contorno in $x = 0$. Il risultato finale è

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y)\,dy - \dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y)\,dy, & \text{Dirichlet,} \\ \dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y)\,dy + \dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y)\,dy, & \text{Neumann,} \\ \dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y)\,dy + F(\mu,\alpha)\displaystyle\int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y)\,dy, & \text{mista,} \end{cases} \tag{IV.37}$$

dove

$$F(\mu,\alpha) = \frac{\mu\sin\alpha - \cos\alpha}{2\mu[\mu\sin\alpha + \cos\alpha]}.$$

Quindi la combinazione lineare convessa

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x,y) &= \frac{e^{-\mu|x-y|} + 2\mu F(\mu,\alpha) e^{-\mu(x+y)}}{2\mu} \\ &= \frac{\mu\sin\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}\mathcal{G}_{\text{Neumann}}(x,y) + \frac{\cos\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}\mathcal{G}_{\text{Dirichlet}}(x,y) \end{aligned}$$

delle funzioni di Green nei casi delle condizioni di Dirichlet e Neumann prende il posto della funzione di Green.

[5] Si intende la derivata seconda distribuzionale.

Capitolo V

FUNZIONI DI GREEN

1 Classificazione delle equazioni alle derivate parziali

Consideriamo un'equazione differenziale quasi-lineare (lineare in tutte le sue derivate di ordine maggiore) del secondo ordine

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \tag{V.1}$$

a coefficienti continui $a_{ij}(x)$ definiti su un aperto $G \subset \mathbb{R}^n$. L'equazione (VI.1) soddisfa la condizione di simmetria

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \text{ reale}, \qquad x \in G. \tag{V.2}$$

Esempi importanti dell'equazione (VI.1) sono l'equazione di Poisson n-dimensionale[1]

$$\Delta u = -f, \tag{V.3}$$

dove $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ (la delta di Kronecker), l'equazione delle onde n-dimensionale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f, \tag{V.4}$$

dove $a_{00}(x) = 1$ (essendo t la coordinata zero-esima), $a_{ii}(x) = -c^2$ ($i = 1, \cdots, n$), e $a_{ij}(x) = 0$ per $i \neq j$, e l'equazione del calore n-dimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \tag{V.5}$$

[1] Δ è l'operatore di Laplace: $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \nabla \cdot \nabla = \operatorname{div} \operatorname{grad}$.

dove $a_{00}(x) = 0$ (essendo t la coordinata zero-esima), $a_{ii}(x) = a^2$ $(i = 1, \cdots, n)$, e $a_{ij}(x) = 0$ per $i \neq j$.

All'equazione (VI.1) si associa la matrice $n \times n$

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n, \tag{V.6}$$

che dipende soltanto dai termini con le derivate parziale del secondo ordine. Grazie alla (VI.2), la matrice $A(x)$ è reale e simmetrica. Quindi $A(x)$ ha n autovalori reali $\lambda_1(x), \cdots, \lambda_n(x)$. Inoltre esiste una matrice ortogonale $O(x)$ (cioè, $O(x)^T = O(x)^{-1}$ e la $O(x)$ è reale) tale che

$$O(x)^{-1}A(x)O(x) = \text{diag}\,(\lambda_1(x), \cdots, \lambda_n(x)), \tag{V.7}$$

dove la parte a destra è una matrice diagonale. La colonna j-esima della $O(x)$ è un autovettore (di norma euclidea 1) della $A(x)$ corrispondente all'autovalore $\lambda_j(x)$ $(j = 1, \cdots, n)$. Le colonne della $O(x)$ costituiscono una base ortonormale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

Introduciamo la seguente classificazione delle equazioni (VI.1) che soddisfano la (VI.2). Tale equazione si dice

a. *ellittica* se tutti gli autovalori $\lambda_j(x)$ sono diversi da zero e hanno lo stesso segno.

b. *iperbolica* se tutti gli autovalori $\lambda_j(x)$ sono diversi da zero, ma non tutti hanno lo stesso segno. La (VI.1) si dice *di tipo iperbolico normale* se è iperbolica e tutti gli autovalori tranne uno hanno lo stesso segno.

c. *parabolica* se almeno uno degli autovalori (ma non tutti) si annullano. La (VI.1) si dice *di tipo parabolico normale* se è parabolica e tutti gli autovalori non nulli hanno lo stesso segno.

Torniamo agli esempi (VI.3), (VI.4) e (VI.5):

(VI.3): Si ha $A(x) = \text{diag}\,(1, \cdots, 1)$ di ordine n. Tutti gli autovalori sono uguali ad 1 e quindi l'equazione di Poisson è ellittica.

(VI.4): Si ha $A(x) = \text{diag}\,(1, -c^2, \cdots, -c^2)$ di ordine $n+1$. Uno degli autovalori è uguale ad 1 e gli altri sono uguali a $-c^2$. Quindi l'equazione delle onde è di tipo iperbolico normale.

(VI.5): Si ha $A(x) = \text{diag}\,(0, -a^2, \cdots, -a^2)$ di ordine $n+1$. Uno degli autovalori si annulla e gli altri sono uguali a $-a^2$. Quindi l'equazione del calore è di tipo parabolico normale.

Osserviamo che in principio la classificazione della (VI.1) dipende dalla scelta del punto $x \in G$. Per la maggior parte delle equazioni della fisica matematica il segno degli autovalori (spesso gli autovalori stessi) e dunque la classificazione non dipende da $x \in G$ (tranne in qualche punto eccezionale, spesso di frontiera). Un'eccezione notevole è *l'equazione di Tricomi*

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{V.8}$$

dove $(x, y) \in G = \mathbb{R}^2$. In tal caso $A(x, y) = \operatorname{diag}(y, 1)$, $\lambda_1(x, y) = y$ e $\lambda_2(x, y) = 1$. Quindi la (VI.8) è ellittica se $y > 0$, parabolica se $y = 0$ e iperbolica se $y < 0$.

2 Problemi agli autovalori multidimensionali

2.1 Impostazione del problema agli autovalori

Consideriamo il seguente problema al contorno omogeneo lineare per un'equazione di tipo ellittico:

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u, \qquad x \in \Omega, \tag{V.9}$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\bigg|_{\partial\Omega} = 0. \tag{V.10}$$

Supponiamo che

$$\begin{cases} p \in C^1(\overline{\Omega}), \quad q \in C(\overline{\Omega}); \qquad p(x) > 0, \quad q(x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ \alpha \in C(\partial\Omega), \quad \beta \in C(\partial\Omega), \\ \alpha(x) \geq 0, \quad \beta(x) \geq 0, \quad \alpha(x) + \beta(x) > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{V.11}$$

Sia $\partial\Omega_0 = \{x \in \partial\Omega : \min(\alpha(x), \beta(x)) > 0\}$. In alcuni casi supponiamo inoltre che $q(x) \geq 0$ per $x \in \overline{\Omega}$. Notiamo i seguenti casi particolari:

$$\begin{cases} \alpha(x) \equiv 1, \ \beta(x) \equiv 0, \quad \text{quindi } u = 0, \ x \in \partial\Omega, \qquad \text{[condizione di Dirichlet]} \\ \alpha(x) \equiv 0, \ \beta(x) \equiv 1, \quad \text{quindi } \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \ x \in \partial\Omega, \qquad \text{[condizione di Neumann].} \end{cases}$$

Il problema (VI.9)-(VI.10) consiste nel trovare una funzione $u(x)$ di classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ che soddisfi l'equazione (VI.9) in Ω e la condizione (VI.10) sulla frontiera $\partial\Omega$. Evidentemente, il problema (VI.9)-(VI.10) ha sempre la soluzione nulla, e questa soluzione non ha alcun interesse. Perciò il problema

(VI.9)-(VI.10) deve essere considerato come un problema agli autovalori per l'operatore

$$L = -\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,) + q.$$

Tutte le funzioni f di classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ che soddisfano la condizione al contorno (VI.10) e la condizione $Lf \in L^2(\Omega)$ costituiscono il *dominio* $\mathcal{M}_L$ dell'operatore L. Siccome lo spazio vettoriale $\mathcal{D}(\Omega)$ di tutte le funzioni di classe $C^\infty(\Omega)$ di supporto compatto (cioè, che si annullano fuori di un compatto contenuto in Ω) è denso in $L^2(\Omega)$ ed è contenuto in $\mathcal{M}_L$, $\mathcal{M}_L$ è denso in $L^2(\Omega)$.

In generale, il dominio $\mathcal{M}_L$ di L non è abbastanza grande per trovare tutte le autofunzioni. Per questa ragione bisogna estendere l'operatore L ad un dominio abbastanza grande per contenere le autofunzioni.

2.2 Formule di Green

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e $v \in C^1(\overline{\Omega})$, è valida la *prima formula di Green*:

$$\int_\Omega v\,Lu\,dx = \int_\Omega p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx - \int_{\partial\Omega} pv\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS + \int_\Omega quv\,dx. \qquad \text{(V.12)}$$

Per dimostrare la formula (VI.12) prendiamo una regione arbitraria Ω' con frontiera $\partial\Omega'$ una superficie regolare a tratti tale che $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Visto che $u \in C^2(\Omega)$, si ha anche $u \in C^2(\overline{\Omega'})$ e, di conseguenza,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} v\,Lu\,dx &= \int_{\Omega'} v\,[-\mathrm{div}\,(p\,\mathrm{grad}\,u) + qu]\;dx \\ &= -\int_{\Omega'} \mathrm{div}\,(pv\,\mathrm{grad}\,u)\,dx + \int_{\Omega'} p\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + \int_{\Omega'} quv\,dx.\end{aligned}$$

Utilizzando il teorema della divergenza (di Gauss) si ottiene

$$\int_{\Omega'} v\,Lu\,dx = \int_{\Omega'} p\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx - \int_{\partial\Omega'} pv\frac{\partial u}{\partial n'}\,dS' + \int_{\Omega'} quv\,dx,$$

dove $\partial\Omega'$ è la frontiera di Ω'. Facendo tendere Ω' a Ω nell'uguaglianza ottenuta ed utilizzando il fatto che $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, concludiamo che il limite del secondo membro esiste. Quindi esiste anche il limite del primo membro ed è valida l'uguaglianza (VI.12). In tal caso l'integrale del primo membro della (VI.12) deve essere considerato improprio. I limiti non dipendono della maniera in cui Ω' tende a Ω, poichè gli integrali nelle parte a destra della (VI.12) sono assolutamente convergenti.

Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, è valida la *seconda formula di Green*:

$$\int_\Omega (v\,Lu - u\,Lv)\,dx = \int_{\partial\Omega} p\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \tag{V.13}$$

Per dimostrare la formula (VI.13), scambiamo u e v nella (VI.12):

$$\int_\Omega u\,Lv\,dx = \int_\Omega p\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx - \int_{\partial\Omega} pu\frac{\partial v}{\partial n}\,dS + \int_\Omega qvu\,dx, \tag{V.14}$$

e sottraiamo l'uguaglianza ottenuta della (VI.14). Come risultato, si ottiene la seconda formula di Green (VI.13).

In particolare per $p(x) \equiv 1$ e $q(x) \equiv 0$, le formule (VI.12) e (VI.13) di Green si trasformano nelle seguenti uguaglianze:

$$\int_\Omega v\,\Delta u\,dx = -\int_\Omega p\sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS, \tag{V.15}$$

$$\int_\Omega (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS. \tag{V.16}$$

2.3 Proprietà dell'operatore L

1. *L'operatore L è hermitiano*:

$$(Lf, g) = (f, Lg), \qquad f, g \in \mathcal{M}_L. \tag{V.17}$$

Infatti, visto che $f, \overline{g} \in \mathcal{M}_L$, si ha $Lf \in L^2(\Omega)$ e $L\overline{g} = \overline{Lg} \in L^2(\Omega)$. In tal caso la seconda formula di Green (VI.13), per $u = f$ e $v = \overline{g}$, assume la forma

$$(Lf, g) - (f, Lg) = \int_\Omega (\overline{g}\,Lf - f\,\overline{Lg})\,dx = \int_{\partial\Omega} p\left(f\frac{\partial\overline{g}}{\partial n} - \overline{g}\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS. \tag{V.18}$$

Per dimostrare che si annulla l'ultima parte della (VI.18), osserviamo che le funzioni f e $\overline{g}$ soddisfano le condizioni al contorno (VI.10):

$$\left(\alpha f + \beta\frac{\partial f}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left(\alpha\overline{g} + \beta\frac{\partial\overline{g}}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{V.19}$$

Per l'ipotesi (VI.11), $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ per $x \in \partial\Omega$. Perciò per ogni $x \in \partial\Omega$ il sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari (VI.19) ha una soluzione non nulla $(\alpha(x), \beta(x))$, si annulla il suo determinante, cioè

$$\det\begin{bmatrix} f & \dfrac{\partial f}{\partial n} \\ \overline{g} & \dfrac{\partial\overline{g}}{\partial n}\end{bmatrix} = \left(f\frac{\partial\overline{g}}{\partial n} - \overline{g}\frac{\partial f}{\partial n}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Di conseguenza è hermitiano l'operatore L.

2. Sia $f \in \mathcal{M}_L$. Ponendo $u = f$ e $v = \overline{f}$ nella prima formula di Green (VI.12) e tenendo conto del fatto che $f \in L^2(\Omega)$, si ottiene

$$(Lf, f) = \int_\Omega p|\mathrm{grad}\, f|^2\, dx - \int_{\partial\Omega} pf\frac{\partial \overline{f}}{\partial n}\, dS + \int_\Omega q|f|^2\, dx. \tag{V.20}$$

Dalla condizione al contorno (VI.10) segue che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial n} = -\dfrac{\alpha}{\beta} f, & \beta(x) > 0,\ x \in \partial\Omega; \\ f = 0, & \beta(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sostituendo queste relazioni nell'uguaglianza (VI.20), si ottiene l'espressione per la forma quadratica

$$(Lf, f) = \int_\Omega \left(p|\mathrm{grad}\, f|^2 + q|f|^2\right)\, dx + \int_{\partial\Omega_0} p\frac{\alpha}{\beta}|f|^2\, dS, \qquad f \in \mathcal{M}_L, \tag{V.21}$$

dove $\partial\Omega_0$ è la parte di $\partial\Omega$ in cui $\min(\alpha(x), \beta(x)) > 0$. La forma quadratica (Lf, f), $f \in \mathcal{M}_L$, è detta *integrale d'energia*.

3. Ritorniamo adesso all'operatore di Sturm-Liouville L con dominio $\mathcal{M}_L$. Allora L è hermitiano su $L^2(\Omega)$ con dominio denso in $L^2(\Omega)$ che ha la seguente proprietà: $(Lf, f) \geq q_{\min}\|f\|_2^2$ per $f \in \mathcal{D}(L)$. In tal caso esiste un'unica estensione autoaggiunta $\overline{L}$ dell'operatore L tale che $(\overline{L}f, f) \geq q_{\min}\|f\|_2^2$ per $f \in \mathcal{D}(\overline{L})$. Le autofunzioni del problema al contorno (VI.9)-(VI.10) si cercano nel dominio $D(\overline{L})$.

Proposizione V.1 *Abbiamo le seguenti proprietà:*

a) Tutti gli autovalori sono reali e sono contenuti nell'intervallo $[q_{min}, \infty)$, *dove* $q_{min} = \min\{q(x) : x \in \overline{\Omega}\}$.

b) Le autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro.

c) Le autofunzioni possono essere scelte reali.

d) Affinchè $\lambda = q_{min}$ *è autovalore di* L, *è necessario e sufficiente che* q *sia costante ed* $\alpha(x) \equiv 0$. *In tal caso l'autofunzione è costante.*

Dimostrazione. Per dimostrare la parte (a), sia $f \in D(\overline{L})$ tale che $\overline{L}f = \lambda f$ e $f \not\equiv 0$. Allora $(\lambda - \overline{\lambda})\|f\|_2 = (\overline{L}f, f) - (f, \overline{L}f) = 0$, e quindi $\lambda = \overline{\lambda}$ è

reale. Inoltre, se $q(x) \geq q_{\min}$ per ogni $x \in \partial\Omega$ e λ è autovalore corrispondente all'autofunzione f (cioè, $f \not\equiv 0$ e $\overline{L}f = \lambda f$), allora

$$\lambda \|f\|_2^2 = (\overline{L}f, f) \geq q_{\min} \|f\|_2^2.$$

Per dimostrare la parte (b), consideriamo $f, g \in D(\overline{L})$ non banali tali che $\overline{L}f = \lambda f$ e $\overline{L}g = \mu g$; in tal caso $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si controlla facilmente che $(\lambda - \mu)(f, g) = (\overline{L}f, g) - (f, \overline{L}g) = 0$ e quindi $\lambda = \mu$ oppure $(f, g) = 0$.

Per dimostrare la parte (c), se f è un'autofunzione, il fatto che il corrispondente autovalore è reale implica che anche $\overline{f}$ è una autofunzione. Siccome le parti reale ed immaginaria della f non si possono ambedue annullare quasi ovunque, una di loro è un'autofunzione reale.

Infine,[2] per dimostrare la parte (d), sia $\lambda = q_{\min}$ autovalore con correspondente autofunzione f. Allora dalla (VI.21) segue che $\operatorname{grad} f \equiv 0$ (cioè che f è costante) e $qf \equiv q_{\min} f$. □

3 Equazioni ellittiche

In Cap. V abbiamo espresso la soluzione unica del problema di Sturm-Liouville **unidimensionale**

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f, \qquad 0 < x < \ell, \tag{V.22a}$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \qquad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0, \tag{V.22b}$$

dove $\lambda = 0$ non è autovalore, nella forma

$$u(x) = (Gf)(x) = \int_0^L \mathcal{G}(x, y) u(y)\, dy, \tag{V.23}$$

dove la funzione di Green $\mathcal{G}(x, y)$ è reale, simmetrica e continua e quindi l'operatore integrale G è autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L^2(0, L)$. In questo capitolo estendiamo tali espressioni al caso multidimensionale per due operatori differenziali: quello di Laplace ($L = -\Delta$) e quello di Helmholtz ($L = -\Delta + k^2$). Nel caso unidimensionale indichiamo le funzioni di Green nel caso di condizioni al contorno non separate (per esempio, le condizioni periodiche o antiperiodiche).

Se $\lambda = 0$ è autovalore, la soluzione del problema (VI.22) esiste se e solo se f è ortogonale a tutte le autofunzioni corrispondenti all'autovalore $\lambda = 0$. Se questo autovalore è semplice e l'autofunzione è φ_0, allora esiste, per ogni $f \in L^2(0, L)$ che soddisfa $(f, \varphi_0) = 0$, un'unica soluzione u che soddisfa $(u, \varphi_0) = 0$. Tale soluzione verrà scritta nella forma (VI.23).

[2] Ci semplifichiamo la vita supponendo che $f \in \mathcal{M}_L$.

3.1 Equazioni di Laplace e di Poisson

Consideriamo il problema al contorno (di Dirichlet)

$$(Lu)(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\Delta u + q(x)u = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{V.24a}$$
$$u(x) = g(x), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{V.24b}$$

dove Ω è un sottoinsieme aperto, limitato e connesso in $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ un'ipersuperficie regolare a tratti. Cerchiamo prima la cosiddetta *funzione di Green* $\mathcal{G}_D(x,y)$ tale che

$$\begin{cases} L_y[\mathcal{G}_D(x,y)] = -\Delta_y \mathcal{G}_D(x,y) + q(y)\mathcal{G}_D(x,y) = \delta(x-y), \\ \mathcal{G}_D(x,y) = 0 \text{ per } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{V.25}$$

Allora

$$u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}_D(x,y) f(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{G}_D}{\partial n_y}(x,y) g(y)\, d\sigma(y). \tag{V.26}$$

Infatti, per $v(y) = \mathcal{G}_D(x,y)$ we have

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(y)v(y)\, dy &= -\int_\Omega v\Delta_y\, u\, dy + \int_\Omega q(y)u(y)v(y)\, dy \\ &= -\int_\Omega (v\Delta_y\, u - u\Delta_y\, v)\, dy + \int_\Omega u(-\Delta_y\, v + q(y)v(y))\, dy \\ &\stackrel{\text{(VI.16)}}{=} -\int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n_y} - u\frac{\partial v}{\partial n_y} \right) d\sigma_y + \int_\Omega u(y)\delta(x-y)\, dy \\ &= \int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial \mathcal{G}_D}{\partial n_y}(x,y)\, d\sigma_y + u(x), \end{aligned}$$

implicando la (VI.26).

Invece, se consideriamo il problema al contorno (di Neumann)

$$(Lu)(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\Delta u = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{V.27a}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n_x} = g(x), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{V.27b}$$

allora esiste una soluzione u del problema di Neumann (VI.27) se e solo se $\int_\Omega f(x)\, dx = 0$, cioè, se e solo se $(f, \varphi_0) = 0$ per $\varphi_0(x) \equiv 1$ autofunzione di L (con condizione di Neumann) corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$. L'unicità viene garantita richiedendo che $\int_\Omega u(x)\, dx = 0$. Cerchiamo ora la *funzione di*

Green $\mathcal{G}_N(x,y)$ tale che

$$L_y[\mathcal{G}_N(x,y)] = -\Delta_y \mathcal{G}_N(x,y) = \delta(x-y) - \frac{1}{m(\Omega)}, \tag{V.28a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_N}{\partial n_y}(x,y) = 0 \text{ per } y \in \partial\Omega, \tag{V.28b}$$

$$\int_\Omega \mathcal{G}_N(x,y)\,dx = 0, \tag{V.28c}$$

dove $m(\Omega)$ è la misura di Ω. Allora

$$u(x) = \int_\Omega \mathcal{G}_N(x,y) f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{G}_N}{\partial n_y}(x,y) g(y)\,d\sigma(y). \tag{V.29}$$

Infatti, per $v(y) = \mathcal{G}_N(x,y)$ we have

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(y)v(y)\,dy &= -\int_\Omega v\Delta_y\, u\,dy \\
&= -\int_\Omega (v\Delta_y\, u - u\Delta_y\, v)\,dy + \int_\Omega u(-\Delta_y\, v)\,dy \\
&\overset{\text{(VI.16)}}{=} -\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n_y} - u\frac{\partial v}{\partial n_y}\right)d\sigma_y + \int_\Omega u(y)\delta(x-y)\,dy \\
&- \frac{1}{m(\Omega)}\int_\Omega u(y)\,dy = \int_{\partial\Omega} g(y)\frac{\partial \mathcal{G}_N}{\partial n_y}(x,y)\,d\sigma_y + u(x),
\end{aligned}$$

piochè $\int_\Omega u(y)\,dy = 0$, implicando la (VI.29).

3.1.a Equazione di Poisson negli intervalli

Siano $\Omega = (0,L)$ e $Lu = -u''$ con le condizioni **antiperiodiche** $u(0) = -u(L)$ e $u'(0) = -u'(L)$. Allora $\lambda = 0$ non è autovalore, $v_1(x) = (L/2) - x$ soddisfa $Lv_1 = 0$ con $v_1(0) = -v_1(L)$, e $v_2(x) = 1$ soddisfa $Lv_2 = 0$ con $v_2'(0) = -v_2'(L)$, mentre il Wronskiano $v_1v_2' - v_1'v_2 = 1$. Ponendo $u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$ arriviamo al sistema lineare

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}$$

con soluzione $c_1'(x) = f(x)$ e $c_2'(x) = (x - \frac{1}{2}L)f(x)$. Quindi $c_1(x) = c_1 + \int_0^x f(y)\,dy$ e $c_2(x) = c_2 + \int_0^x (y - \frac{L}{2})f(y)\,dy$, e dunque

$$\begin{aligned}
u(x) &= c_1(\frac{1}{2}L - x) + c_2 + (\frac{1}{2}L - x)\int_0^x f(y)\,dy + \int_0^x (y - \frac{1}{2}L)f(y)\,dy, \\
u'(x) &= -c_1 - \int_0^x f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Sostituendo le condizioni al contorno otteniamo

$$c_1 = -\frac{1}{2}\int_0^L f(y)\,dy, \qquad c_2 = \frac{1}{2}\int_0^L (L-y)f(y)\,dy.$$

Di conseguenza,

$$u(x) = \int_0^L \mathcal{G}_{\text{antiper.}}(x,y)f(y)\,dy, \tag{V.30}$$

dove

$$\mathcal{G}_{\text{antiper.}}(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}L - |x-y|\right).$$

Al contrario, sotto le condizioni di **Neumann** $u'(0) = -u'(L) = 0$ risulta

$$c_1 = -\frac{1}{2}\int_0^L f(y)\,dy = 0,$$

ristringendo così l'insieme delle f per cui esiste una soluzione. Dunque

$$u(x) = c_2 + (\frac{1}{2}L - x)\int_0^x f(y)\,dy + \int_0^x (y - \frac{1}{2}L)f(y)\,dy = c_2 - \int_0^x (x-y)f(y)\,dy.$$

Imponendo la condizione $\int_0^L u(y)\,dy = 0$, otteniamo

$$c_2 = \frac{1}{2L}\int_0^L (L-y)^2 f(y)\,dy.$$

Quindi $u(x)$ ha la forma (VI.30), dove

$$\mathcal{G}_N(x,y) = \frac{1}{2L}(L - \max(x,y))^2.$$

Sotto le condizioni **periodiche** $u(0) = u(L)$ e $u'(0) = u'(L)$ partiamo dalle espressioni

$$u(x) = c_1 x + c_2 - \int_0^x \int_0^z f(y)\,dydz = c_1 x + c_2 - \int_0^x (x-y)f(y)\,dy,$$
$$u'(x) = c_1 - \int_0^x f(y)\,dy.$$

Quindi da $u'(0) = u'(L)$ segue la condizione necessaria $\int_0^L f(y)\,dy = 0$ per l'esistenza di una soluzione. Da $u(0) = u(L)$ seguono

$$c_1 = \frac{1}{L}\int_0^L (L-y)f(y)\,dy,$$
$$u(x) = c_2 + \frac{x}{L}\int_0^L (L-y)f(y)\,dy - \int_0^x (x-y)f(y)\,dy.$$

Per trovare la soluzione unica supponiamo che $\int_0^L u(y)\,dy = 0$. Allora

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2L}\int_0^L y(L-y)f(y)\,dy \\ &= -\frac{1}{2L}\int_0^L y(L-y)f(y)\,dy - \frac{1}{2L}x(L-x)\int_0^L f(y)\,dy. \end{aligned}$$

Quindi $u(x)$ ha la forma (VI.30), dove

$$\mathcal{G}_{\text{per.}}(x,y) = -\frac{1}{2L}|x-y|(L-|x-y|).$$

3.1.b Funzione di Green in $\mathbb{R}^n$

Introducendo $r = \|(x_1,\ldots,x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ e $\boldsymbol{\omega} = (x_1,\ldots,x_n)/r$, il Laplaciano ha la seguente forma:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}(L_B\psi)(\boldsymbol{\omega}), \tag{V.31}$$

dove L_B è il cosiddetto *operatore di Beltrami* n-dimensionale. Applicando il Laplaciano al polinomio omogeneo armonico $r^l y(\boldsymbol{\omega})$ di grado l (essendo $y(\boldsymbol{\omega})$ una funzione sferica) otteniamo

$$(L_B\,y)(\boldsymbol{\omega}) = l(l+n-2)y(\boldsymbol{\omega}), \qquad \boldsymbol{\omega}\in S^{n-1}. \tag{V.32}$$

Quindi le funzioni sferiche sono le autofunzioni dell'operatore di Beltrami.

Consideriamo ora l'equazione di Poisson

$$\Delta\mathcal{G}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\delta(r)}{\Omega_n\,r^{n-1}}, \tag{V.33}$$

dove $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $r=|\boldsymbol{x}|$ e $\Omega_n = m(S^{n-1})$.[3] Allora $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ dipende soltanto da $r=|\boldsymbol{x}|$ e

$$\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{d\mathcal{G}}{dr}\right) = -\frac{\delta(r)}{\Omega_n}, \qquad r>0. \tag{V.34}$$

[3] Sia V_n la misura della palla di raggio 1 in $\mathbb{R}^n$. Allora $V_n r^n = \int_0^r d\hat{r}\,\hat{r}^{n-1}\Omega_n = \Omega_n r^n/n$. Inoltre,

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} dx_3 \ldots \int_{-\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}} dx_n \\ &= \int_{-1}^1 dx_1\, V_{n-1}(\sqrt{1-x_1^2})^{n-1} = V_{n-1}B\left(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}\right) \\ &= V_{n-2}B\left(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}\right)B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right) = V_{n-2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{2\pi}{n}V_{n-2}. \end{aligned}$$

Quindi $\Omega_{2p} = 2\pi^p/(p-1)!$ e $\Omega_{2p+1} = \pi^p\,2^{2p+1}(p!)/(2p)!$

Risolvendo la (VI.34) sotto la condizione che $\mathcal{G}(r) \to 0$ per $r \to +\infty$ (solo fattibile se $n \geq 3$) e applicando il Teorema della Divergenza alla (VI.33), si trova[4]

$$\mathcal{G}(r) = \begin{cases} -(2\pi)^{-1}\log(r), & n = 2, \\ \dfrac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}}\,\dfrac{1}{r^{n-2}}, & n \geq 3, \\ 1/(4\pi r), & n = 3. \end{cases} \tag{V.35}$$

Quindi la soluzione dell'equazione $\Delta_y \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ nell'intero spazio è $\mathcal{G}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|)$. In altre parole, la soluzione unica dell'equazione di Poisson

$$\Delta u = -\rho(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

ha la seguente forma (per $n \geq 3$)

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}\, \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\rho(\boldsymbol{y}) = \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}\, \frac{\rho(\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^{n-2}}. \tag{V.36}$$

Per $n = 3$ otteniamo l'espressione

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{y}\, \frac{\rho(\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|}$$

nota dall'elettrodinamica.

Consideriamo ora l'equazione di Poisson n-dimensionale

$$-\Delta v = f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

dove Ω è un sottoinsieme aperto, limitato e connesso di $\mathbb{R}^n$ e la sua frontiera $\partial\Omega$ è un'ipersuperficie regolare a tratti. In generale la funzione

$$v(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

non soddisfa alle condizioni al contorno. Siano

$$v(\boldsymbol{x}_b) = \int_\Omega \mathcal{G}(\boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}, \tag{V.37a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\boldsymbol{x}_b) = \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n_x}(\boldsymbol{x}_b, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}, \tag{V.37b}$$

dove $\boldsymbol{x}_b \in \partial\Omega$. Sia

$$w(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}_{\mathrm{Dir}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y})\, d\sigma_y, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

[4]Per $n = 2$ la funzione di Green non tende a zero all'infinito, creando parecchi problemi tecnici nel trattamento dell'equazione di Poisson nell'intero piano.

la soluzione unica dell'equazione di Laplace $\Delta w = 0$ in Ω con condizione al contorno $w|_{\partial\Omega} = g$. Allora il problema al contorno

$$-\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{V.38a}$$

$$u(\boldsymbol{x}_b) = g(\boldsymbol{x}_b), \qquad \boldsymbol{x}_b \in \partial\Omega, \tag{V.38b}$$

ha la soluzione unica che ha la forma

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) &= \int_\Omega \mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} + \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}_{\mathrm{Dir}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \left(g(\boldsymbol{y}) - \int_\Omega \mathcal{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) f(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z} \right) d\sigma_y \\ &= \int_\Omega \left[\mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}_{\mathrm{Dir}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \mathcal{G}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\, d\sigma_z \right] f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \\ &+ \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}_{\mathrm{Dir}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y})\, d\sigma_y. \end{aligned} \tag{V.39}$$

Dunque se $g(\boldsymbol{x}) = 0$ per $x \in \partial\Omega$ [il problema di Dirichlet omogeneo], la funzione di Green $\mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ è da correggere da un termine regolare.

In modo analogo, sia

$$w(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}_{\mathrm{Neu}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) h(\boldsymbol{y})\, d\sigma_y, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

la soluzione dell'equazione di Laplace $\Delta w = 0$ in Ω con condizione al contorno $(\partial w/\partial n)|_{\partial\Omega} = h$, dove $\int_\Omega w(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = 0$. Una tale soluzione esiste (e è unica) se e solo se $\int_{\partial\Omega} h(\boldsymbol{y})\, d\sigma_y = 0$. Allora sotto la condizione $\int_{\partial\Omega} h(\boldsymbol{y})\, d\sigma_y = 0$ il problema al contorno

$$-\Delta u = f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{V.40a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}_b) = h(\boldsymbol{x}_b), \qquad \boldsymbol{x}_b \in \partial\Omega, \tag{V.40b}$$

$$\int_\Omega u(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} = 0, \tag{V.40c}$$

ha la soluzione unica che ha la forma

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) &= \int_\Omega \mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} + \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}_{\mathrm{Neu}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \left(h(\boldsymbol{y}) - \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n_y}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) f(\boldsymbol{z})\, d\boldsymbol{z} \right) d\sigma_y \\ &= \int_\Omega \left[\mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}_{\mathrm{Neu}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n_z}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\, d\sigma_z \right] f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \\ &+ \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}_{\mathrm{Neu}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) h(\boldsymbol{y})\, d\sigma_y. \end{aligned} \tag{V.41}$$

Dunque se $h(\boldsymbol{x}) = 0$ per $x \in \partial\Omega$ [il problema di Neumann omogeneo], la funzione di Green $\mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ è da correggere da un termine regolare.

Utilizzando il linguaggio dell'elettrodinamica consideriamo ora il potenziale di un dipolo. Sia $h > 0$ piccola. Consideriamo le cariche $-1/h$ e $1/h$ nei punti $\boldsymbol{x}_0$ e $\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{e}$, dove $\|\boldsymbol{e}\|_2 = 1$. Il corrispondente potenziale u soddisfa all'equazione di Poisson

$$-\Delta u = \frac{1}{h}\left\{\delta(\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{e})) - \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\right\}. \tag{V.42}$$

Per $h \to 0^+$ la parte a destra tende alla derivata di $\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ nella direzione $\boldsymbol{e}$ rispetto alla variabile $\boldsymbol{x}_0$. In altre parole, la parte a destra dell'equazione (VI.42) tende a

$$\boldsymbol{e} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}_0} \frac{1}{4\pi\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_2} = \frac{\boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{4\pi\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_2^3} = \frac{\cos\theta}{4\pi\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_2^2}$$

se $h \to 0^+$, dove θ è l'angolo tra i vettori $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ e $\boldsymbol{e}$. Partendo da una distribuzione di dipoli normali alla superficie $\partial\Omega$ (da una cosiddetta double layer) con densità $b \in L^1(\partial\Omega, d\sigma)$, otteniamo

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} b(\boldsymbol{\xi}) \frac{\cos(\text{angolo}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}, n(\boldsymbol{\xi})))}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}\|_2^2}\, d\sigma(\boldsymbol{\xi}). \tag{V.43}$$

L'espressione (VI.43) si dice double layer potential.[5]

Consideriamo ora una distribuzione di cariche su una superficie $\partial\Omega$. Allora il corrispondente potenziale (con densità $a \in L^1(\partial\Omega; d\sigma(\xi))$ ha la forma

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{a(\boldsymbol{\xi})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}\|_2}\, d\sigma(\boldsymbol{\xi}). \tag{V.44}$$

L'espressione (VI.44) si dice single layer potential.[4]

3.1.c Equazione di Laplace nel semipiano

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{V.45}$$

nel semipiano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ sotto la condizione $u(x, 0) = u_0(x)$. Siccome $e^{i\lambda x}e^{-|\lambda|y}$ è soluzione dell'equazione di Laplace limitata nel piano superiore qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$, rappresntiamo la soluzione della (VI.45) nella forma

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda)e^{i\lambda x}e^{-|\lambda|y}\, d\lambda,$$

[5] Questa espressione non rende conto di un'eventuale condizione al contorno. In tal caso ci vuole una correzione da un termine regolare come in (VI.39) e (VI.41).

dove $c \in L^2(\mathbb{R})$. Sostituendo $y = 0$ si ottiene

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} c(\lambda)\, d\lambda,$$

che vuol dire che $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ e $\|c\|_2 = (2\pi)^{1/2}\|u_0\|_2$. Invertendo la trasformata di Fourier si ha

$$c(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} u_0(x)\, dx.$$

Infine otteniamo

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x, \hat{x}; y) u_0(\hat{x})\, d\hat{x}, \tag{V.46}$$

dove la funzione di Green ha l'espressione

$$\mathcal{G}(x, \hat{x}; y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-\hat{x})} e^{-|\lambda| y}\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + (x - \hat{x})^2}. \tag{V.47}$$

Ovviamente sono operatori lineari limitati le trasformazioni $u_0 \mapsto u(\cdot, y)$ per ogni $y \geq 0$ (da $L^2(\mathbb{R})$ in se stesso) e $u_0 \mapsto u$ (da $L^2(\mathbb{R})$ in $l^2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\})$. Inoltre la trasformazione $u_0 \mapsto u(\cdot, y)$ è limitato da $BC(\mathbb{R})$ [oppure $C_0(\mathbb{R})$] in se stesso, uniformemente in $y \geq y_0$ per ogni $y_0 > 0$.

3.1.d Equazione di Laplace nel disco

Consideriamo l'equazione di Laplace (VI.45) nel disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < L\}$ sotto le condizioni al contorno

$$u = g \text{ sul bordo } \partial D. \tag{V.48}$$

Ponendo $\Omega = D$, assumiamo che g sia continua sulla circonferenza ∂D, e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. In coordinate polari l'equazione di Laplace ha la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

dove $0 \leq \theta < 2\pi$ (con periodicità) e $0 < r < L$ con continuità della soluzione per $r \to 0^+$. La separazione delle variabili conduce alle soluzioni $u_0(r)$, $u_m(r) \cos m\theta$ e $u_m(r) \sin m\theta$, dove $m = 0, 1, 2, \ldots$ e la funzione $u_m(r)$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_m}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} u_m(r) = 0. \tag{V.49}$$

L'equazione (VI.48) è un'equazione di Eulero $[r^2 u_m''(r) + r u_m'(r) - m^2 u_m(r) = 0]$ con la soluzione generale

$$u_m(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln(r), & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2\, r^{-m}, & m = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie. La continuità se $r \to 0^+$ conduce ad una soluzione costante se $m = 0$ e una proporzionale a r^m se $m = 1, 2, \ldots$. Quindi la soluzione generale ha la forma

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right), \tag{V.50}$$

dove $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ sono opportune costanti.

Sostituiamo $r = L$ in (VI.50) e applichiamo la condizione al contorno $u(L, \theta) = g(\theta)$. Risulta

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right). \tag{V.51}$$

Applicando la teoria delle serie di Fourier abbiamo for $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, d\theta \\ a_n L^n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \qquad b_n L^n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin n\theta\, d\theta, \end{cases}$$

dove la serie (VI.51) è uniformente convergente in $\theta \in [-\pi, \pi]$ se $g(\theta)$ è continua (con $g(-\pi) = g(\pi)$) e regolare a tratti.

Sostituiamo ora le espressioni per i coefficienti di Fourier nell'espressione per la $u(r, \theta)$. Risulta

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^n \left[\cos n\theta \cos n\hat{\theta} + \sin n\theta \sin n\hat{\theta}\right] \right) g(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^n \cos n(\theta - \hat{\theta}) \right] g(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{L} e^{i(\theta - \hat{\theta})}\right)^n + \left(\frac{r}{L} e^{-i(\theta - \hat{\theta})}\right)^n \right\} \right] g(\hat{\theta})\, d\hat{\theta} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[1+\left\{\frac{e^{i(\theta-\hat\theta)}\dfrac{r}{L}}{1-e^{i(\theta-\hat\theta)}\dfrac{r}{L}}+\frac{e^{-i(\theta-\hat\theta)}\dfrac{r}{L}}{1-e^{-i(\theta-\hat\theta)}\dfrac{r}{L}}\right\}\right] g(\hat\theta)\,d\hat\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\left(\dfrac{r}{L}\right)^2}{1-2\dfrac{r}{L}\cos(\theta-\hat\theta)+\left(\dfrac{r}{L}\right)^2} g(\hat\theta)\,d\hat\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{L^2-r^2}{L^2-2rL\cos(\theta-\hat\theta)+r^2} g(\hat\theta)\,d\hat\theta,
\end{aligned}
$$

il cosiddetto *integrale di Poisson*. Osserviamo che il nucleo di Poisson

$$
\frac{1}{2\pi}\,\frac{L^2-r^2}{L^2-2rL\cos(\theta-\hat\theta)+r^2}
$$

è simmetrico in r e L e simmetrico in θ e $\hat\theta$. Inoltre, è strettamente positivo; le sue uniche singolarità si trovano sulla circonferenza $r=L$ per $\theta=\hat\theta$.

Invece, se risolviamo l'equazione di Laplace in D sotto la condizione di Neumann

$$
\frac{\partial u}{\partial n} = h \text{ sul bordo } \partial D, \tag{V.52}
$$

ci vuole la condizione necessaria $\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\,d\theta = 0$ per l'esistenza della soluzione. Siccome la derivata normale esterna coincide con quella radiale, cerchiamo la soluzione $u(r,\theta)$ nella forma (VI.50) con $a_0=0$ (per garantirne l'unicità), dove

$$
h(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{V.53}
$$

Applicando la teoria delle serie di Fourier risultano

$$
na_nL^{n-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \qquad nb_nL^{n-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\sin n\theta\,d\theta,
$$

dove la serie (VI.53) è uniformemente convergente in $\theta\in[-\pi,\pi]$ se $h(\theta)$ è continua, regolare a tratti e periodica nel senso che $h(-\pi)=h(\pi)$. Sostituiamo ora le espressioni per i coefficienti di Fourier nell'espressione per la $u(r,\theta)$. Risulta

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{L}\right)^n\left[\cos n\theta\cos n\hat\theta+\sin n\theta\sin n\hat\theta\right] h(\hat\theta)\,d\hat\theta \\
&= \frac{L}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{L}\right)^n\cos n(\theta-\hat\theta)h(\hat\theta)\,d\hat\theta \\
&= -\frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(1-2\frac{r}{L}\cos(\theta-\hat\theta)+\frac{r^2}{L^2}\right)h(\hat\theta)\,d\hat\theta,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo utilizzato $\sum_{n=1}^{\infty}(z^n/n) = -\log(1-z)$ per $|z| < 1$.[6]

3.1.e Equazione di Laplace e funzioni analitiche

Ogni insieme aperto Ω in $\mathbb{R}^2$ corrisponde ad un unico insieme aperto $\tilde{\Omega}$ in $\mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$(x, y) \in \Omega \Longleftrightarrow x + iy \in \tilde{\Omega}, \qquad z \in \tilde{\Omega} \Longleftrightarrow (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \Omega.$$

Ad ogni funzione analitica $f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ corrispondono due funzioni $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ che soddisfano alle cosiddette *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{V.54}$$

Infatti, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ per $(x, y) \in \Omega$. Di conseguenza, u and v sono *funzioni armoniche* nel senso che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{V.55}$$

D'altra parte, ogni coppia di funzioni armoniche $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 che soddisfa alle equazioni di Cauchy-Riemann (VI.54) determina un'unica funzione analitica $f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ tale che $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ per $(x, y) \in \Omega$. Le funzioni armoniche u, v si dicono *coniugate armoniche*.[7]

Consideriamo ora $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < L\}$ e dunque $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < L\}$. Come nella Subsection 3.1.d, cerchiamo una funzione armonica $u : \Omega \to \mathbb{R}$ che soddisfa alla condizione di Dirichlet (VI.48). Sia $v : \Omega \to \mathbb{R}$ una coniugata armonica di u e sia $f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ la funzione analitica definita da $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ per $(x, y) \in \Omega$. Scegliendo $\rho \in (0, L)$, applichiamo ora la formula integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad |z| < \rho.$$

Sia $z^* = \rho^2/\overline{z}$. Allora $|z^*| = \rho^2/|\overline{z}| > \rho$. Dal Teorema di Cauchy segue

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}\, d\zeta = 0.$$

[6] Si intende il ramo del logaritmo che è una funzione analitica nel semipiano complesso destro con valore $\log(1) = 0$.

[7] Conoscendo u, si può trovare v dalle equazioni di Cauchy-Riemann, ma tranne un termine constante arbitrario.

Di conseguenza,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} \right] d\zeta. \tag{V.56}$$

Ponendo $\zeta = \rho e^{i\hat{\theta}}$ e $z = re^{i\theta}$ si calcola facilmente che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} &= \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \frac{\zeta\overline{\zeta}}{\overline{z}}} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta|\zeta - z|^2} \\
&= \frac{\rho^2 - r^2}{\rho e^{i\hat{\theta}}(\rho e^{i\hat{\theta}} - re^{i\theta})(\rho e^{-i\hat{\theta}} - re^{-i\theta})} \\
&= \frac{\rho^2 - r^2}{\rho e^{i\hat{\theta}}(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \hat{\theta}))}.
\end{aligned}$$

Sostituendolo nella (VI.56) otteniamo

$$\begin{aligned}
u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\hat{\theta}}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho e^{i\hat{\theta}}(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \hat{\theta}))} i\rho e^{i\hat{\theta}}\, d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\hat{\theta}}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \hat{\theta})}\, d\hat{\theta}.
\end{aligned}$$

Infine, per $\rho \to L^-$ risulta per $r \in [0, L)$ l'integrale di Poisson

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\hat{\theta}) \frac{L^2 - r^2}{L^2 + r^2 - 2Lr \cos(\theta - \hat{\theta})}\, d\hat{\theta}.$$

Sia Ξ un sottoinsieme aperto e semplicemente connesso[8] di $\mathbb{R}^2$ tali che $\Xi \subsetneqq \mathbb{R}^2$. Secondo il Teorema di Riemann ([10], Vol. III, Th. 1.2) esiste una trasformazione biunivoca *e analitica* $\tilde{\phi} : \tilde{\Xi} \to \tilde{\Omega}$. In tal caso anche la trasformazione inversa $\tilde{\phi}^{-1} : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Xi}$ è analitica. Le trasformazioni $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\phi}^{-1}$ si chiamano *trasformazioni conforme*. Definiamo ora $\phi : \Xi \to \Omega$ da

$$\phi(x, y) = (\operatorname{Re} \tilde{\phi}(x + iy), \operatorname{Im} \tilde{\phi}(x + iy)), \qquad (x, y) \in \Xi.$$

Allora ϕ induce una corrispondenza biunivoca tra funzioni armoniche in Ξ e funzioni armoniche in Ω. Le funzioni armoniche in Ξ sono le funzioni $\phi^{-1} \circ u \circ \phi$, dove u è armonica nel disco Ω. Conoscendo le trasformazioni conformi tra Ξ e il disco Ω tali che c'è anche la corrispondenza biunivoca tra i punti delle loro frontiera, si può risolvere l'equazione di Laplace in Ξ sotto la condizione di Dirichlet utilizzando le trasformazioni conformi e l'integrale di Poisson.

[8] Cioé, tale che il complementare $\mathbb{R}^2 \setminus \Xi$ è connesso, cioè un dominio senza buchi.

3.1.f Equazione di Laplace nella sfera n-dimensionale

Per $n \geq 2$ conviene cercare le soluzioni dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ nella regione sferica $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_2 < L\}$ nella seguente forma:

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{r}{L}\right)^l y(\boldsymbol{\omega}), \qquad r > 0,\ \boldsymbol{\omega} \in S^{n-1}, \tag{V.57}$$

dove $y(\boldsymbol{\omega})$ è una funzione sferica di grado $l = 0, 1, 2, \ldots$. Sia $N(l, n)$ il numero delle funzioni sferica di grado l in n variabili linearmente indipendenti.[9] Allora esiste una base ortonormale

$$\{y_{l,s}(\boldsymbol{\omega})\}_{s=1,\ldots,N(l,n);l=0,1,2,\ldots}$$

dello spazio di Hilbert $L^2(S^{n-1})$ che consiste esclusivamente in funzioni sferiche. Data la funzione $g \in L^2(S^{n-1})$, si ha lo sviluppo

$$g(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{N(l,n)} c_{l,s} y_{l,s}(\boldsymbol{\omega}),$$

dove

$$c_{l,s} = (g, y_{l,s}) = \int_{S^{n-1}} g(\boldsymbol{\omega}) \overline{y_{l,s}(\boldsymbol{\omega})}\, d\boldsymbol{\omega}.$$

In tal caso la funzione armonica $u(r, \boldsymbol{\omega})$ nelle regione sferica di raggio L che soddisfa alla condizione di Dirichlet $u(L, \boldsymbol{\omega}) = g(\boldsymbol{\omega})$ ha la forma

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^l \sum_{s=1}^{N(l,n)} c_{l,s} y_{l,s}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{S^{n-1}} \mathcal{G}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) g(\hat{\boldsymbol{\omega}})\, d\hat{\boldsymbol{\omega}}, \tag{V.58}$$

dove

$$\mathcal{G}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^l \sum_{s=1}^{N(l,n)} y_{l,s}(\boldsymbol{\omega}) \overline{y_{l,s}(\hat{\boldsymbol{\omega}})}. \tag{V.59}$$

La funzione armonica $u(r, \boldsymbol{\omega})$ nella regione aferica che soddisfa alla condizione al contorno $\frac{\partial u}{\partial r}(L, \boldsymbol{\omega}) = h(\boldsymbol{\omega})$ ha la forma[10]

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{L}{l} \left(\frac{r}{L}\right)^{l-1} \sum_{s=1}^{N(l,n)} c_{l,s} y_{l,s}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{S^{n-1}} \mathcal{H}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) g(\hat{\boldsymbol{\omega}})\, d\hat{\boldsymbol{\omega}}, \tag{V.60}$$

[9] Quindi $N(0, n) = 1$, $N(1, n) = n$, $N(l, 2) = 2$ per $l \geq 1$, $N(l, 3) = 2l + 1$, $N(l, 4) = (l + 1)^2$, e $N(l, n) = \frac{(2l+n-2)(l+n-3)!}{l!\,(n-2)!}$.

[10] Si spieghi poichè $\mathcal{G}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}})$ e $\mathcal{H}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}})$ dipendono soltanto da (r/L) e $\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}$.

dove

$$\mathcal{H}(r,\boldsymbol{\omega},\hat{\boldsymbol{\omega}}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{L}{l}\left(\frac{r}{L}\right)^{l-1} \sum_{s=1}^{N(l,n)} y_{l,s}(\boldsymbol{\omega})\overline{y_{l,s}(\hat{\boldsymbol{\omega}})}. \tag{V.61}$$

Per l'esistenza bisogna richiedere $\int_{S^{n-1}} h(\boldsymbol{\omega})\, d\boldsymbol{\omega} = 0$, mentre per l'unicità richiediamo $\int_\Omega u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 0$.

Per $n = 2$ abbiamo $N(l,2) = 2 - \delta_{l,0}$, $\boldsymbol{\omega} \equiv \theta \in [0, 2\pi]$, $y_{0,1}(\boldsymbol{\omega}) = (2\pi)^{-1/2}$, $y_{l,1}(\boldsymbol{\omega}) = \pi^{-1/2}\cos(l\theta)$, e $y_{l,2}(\theta) = \pi^{-1/2}\sin(l\theta)$. Dunque

$$\mathcal{G}(r,\theta,\hat{\theta}) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{r}{L}\right)^{l}\cos l(\theta-\hat{\theta})\right) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{L^2 - r^2}{L^2 - 2rL\cos(\theta-\hat{\theta}) + r^2},$$

$$\mathcal{H}(r,\theta,\hat{\theta}) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{L}{l}\left(\frac{r}{L}\right)^{l=1}\cos l(\theta-\hat{\theta}) = \frac{1}{2\pi}\,\log\frac{L^2}{L^2 - 2rL\cos(\theta-\hat{\theta}) + r^2}.$$

3.2 Equazione di Helmholtz

Utilizzando la (VI.31) e la (VI.32) e applicando la separazione delle variabili $\psi(r,\boldsymbol{\omega}) = R(r)\psi(\boldsymbol{\omega})$ (con $r > 0$ e $\boldsymbol{\omega} \in S^{n-1}$) all'equazione di Helmholtz n-dimensionale

$$\Delta\psi + k^2\psi = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2} + k^2\psi = 0, \tag{V.62}$$

otteniamo l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{l(l+n-2)}{r^2}\right)R(r) = 0, \tag{V.63}$$

mentre $y(\boldsymbol{\omega})$ è una funzione sferica di grado l in n variabili. Per $n = 2$ risulta l'equazione di Bessel di ordine l nella variabile kr. La sostituzione $R(r) = r^\gamma\tilde{R}(r)$ nella (VI.63) rende

$$\tilde{R}''(r) + \frac{2\gamma+n-1}{r}\tilde{R}'(r) + \left(k^2 - \frac{(l-\gamma)(l+\gamma+n-2)}{r^2}\right)\tilde{R}(r) = 0.$$

Per $\gamma = 1 - \frac{1}{2}n$ risulta l'equazione di Bessel di ordine $l - 1 + \frac{1}{2}n$ nella variabile kr

$$\tilde{R}''(r) + \frac{1}{r}\tilde{R}'(r) + \left(k^2 - \frac{(l-1+\frac{1}{2}n)^2}{r^2}\right)\tilde{R}(r) = 0. \tag{V.64}$$

Per risolvere l'equazione di Helmholtz non omogenea

$$\Delta u + k^2 u(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{V.65}$$

nella forma

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

bisogna introdurre una funzione $\mathcal{E}_n(r)$ tale che (i) $\mathcal{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathcal{E}_n(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|)$, (ii) vale l'equazione differenziale

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\mathcal{E}_n}{dr} \right) + k^2 \mathcal{E}_n(r) = -\frac{\delta(r)}{r^{n-1}\, \Omega_n},$$

dove Ω_n é la misura di S^{n-1}, e (iii) $\mathcal{E}_n(r)$ si comporta come onda sferica decrescente in R^n per $r \to +\infty$. Per le applicazioni in fisica e ingegneria in cui $\operatorname{Im} k \geq 0$, otteniamo per $n \geq 3$[11]

$$\mathcal{E}_n(r) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{k}{r} \right)^{(n-2)/2} H^{(1)}_{(n-2)/2}(kr). \tag{V.66}$$

Infatti, per $n = 2, 3$ risulta

$$\mathcal{E}_n(r) = \begin{cases} \frac{i}{4} H^{(1)}_0(kr), & n = 2, \\ \dfrac{e^{ikr}}{4\pi r}, & n = 3. \end{cases} \tag{V.67}$$

Per $n = 3$ la soluzione dell'equazione di Helmholtz (VI.65) ha la forma

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{ik\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|} f(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{V.68}$$

Consideriamo l'equazione di Helmholtz tredimensionale

$$\Delta u + k^2 u = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L_B u + k^2 u = 0, \tag{V.69}$$

dove $\operatorname{Im} k \geq 0$, $r = \|\boldsymbol{x}\|_2 > r_0 (> 0)$ e L_B è l'operatore di Beltrami. Allora

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} u_{l,m}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \tag{V.70}$$

dove

$$u_{l,m}(r) = \int_{S^2} u(r, \theta, \varphi) \overline{Y_{l,m}(\theta, \varphi)}\, \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta.$$

[11] Per $n \geq 3$ e $k \to 0$ deve risultare la (VI.35). Ciò necessita uno studio del comportamento asintotico della funzione $H^{(1)}_{(n-2)/2}(kr)$ per $k \to 0$.

Sosituendo la (VI.70) nella (VI.69) e utilizzando $L_B Y_l^m = l(l+1)Y_l^m$ otteniamo

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du_{l,m}}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)u_{l,m}(r) = 0. \tag{V.71}$$

Ponendo $u_{l,m}(r) = r^{-1/2}v_{l,m}(r)$ si arriva all'equazione di Bessel

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_{l,m}}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2}\right)v_{l,m}(r) = 0.$$

La limitatezza della soluzione per $r \to +\infty$ (per $\operatorname{Im} k \geq 0$) implica che $v_{l,m}(r) \sim H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(kr)$. Di conseguenza

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{l,m} r^{-1/2} H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(kr) Y_l^m(\theta,\varphi). \tag{V.72}$$

Nel caso n-dimensionale ($n \geq 2$) abbiamo invece della (VI.69)

$$\Delta u + k^2 u = \frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^{n-1}}L_B u + k^2 u = 0, \tag{V.73}$$

dove $\operatorname{Im} k \geq 0$, $r = \|\boldsymbol{x}\|_2 > r_0 (> 0)$ e L_B è l'operatore di Beltrami n-dimensionale. Sviluppando la soluzione della (VI.73) in funzioni sferiche (con $L_B y_l = l(l+n-2)y_l$, dove $l = 0, 1, 2, \ldots$ è il grado del polinomio armonico omogeneo in n variabile che determina y_l), otteniamo invece della (VI.71)

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{du_{l,\boldsymbol{m}}}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{l(l+n-2)}{r^{n-1}}\right)u_{l,\boldsymbol{m}}(r) = 0, \tag{V.74}$$

dove $\boldsymbol{m}$ parametrizza gli altri indici della funzione sferica. Ponendo $u_{l,\boldsymbol{m}}(r) = r^{-(n-2)/2}v_{l,\boldsymbol{m}}(r)$ arriviamo all'equazione di Bessel

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_{l,\boldsymbol{m}}}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{[l+\frac{1}{2}(n-2)]^2}{r^2}\right)v_{l,\boldsymbol{m}}(r) = 0.$$

Dunque

$$u_{l,\boldsymbol{m}}(r) \sim r^{-(n-2)/2} H_{l+\frac{1}{2}(n-2)}(kr).$$

Di conseguenza,

$$u(r,\boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\boldsymbol{m}} a_{l,\boldsymbol{m}} r^{-(n-2)/2} H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}(n-2)}(kr) y_l^{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{\omega}), \tag{V.75}$$

dove $\boldsymbol{\omega} \in S^{n-1}$. Per $n = 2$ le funzioni sferiche coincidono con quelle trigonometriche; in questo caso risulta

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2}H_0^{(1)}(kr) + \sum_{l=1}^{\infty}\left(a_l H_l^{(1)}(kr)\cos(l\theta) + b_l H_l^{(1)}(kr)\sin(l\theta)\right).$$

4 Equazioni paraboliche

L'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f,$$

dove $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $a > 0$ e $t > 0$, ha una delle seguenti condizioni iniziali:

a. La condizione iniziale $u(x, t = 0) = u_0(x)$ per $x \in \Omega$;

b. La condizione al contorno $u|_S = u_S$ [specificando la temperatura al bordo], oppure $(\partial u/\partial n)|_S = -(u_1/k)$ [specificando il flusso di calore attraversa il bordo], oppure $k(\partial u/\partial n) + h(u - u_{\text{amb}})|_S = 0$ [dove u_{amb} è la temperatura dell'ambiente e h il coefficiente di scambio di calore]. In quest'equazione Ω è una regione con bordo S regolare a tratti.

L'equazione del calore si può generalizzare come

$$\frac{du}{dt} = -Lu(t) + f(t), \qquad t > 0, \tag{V.76}$$

con condizione iniziale

$$u(t = 0) = u_0, \tag{V.77}$$

dove L è un operatore di Sturm-Liouville autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L_2(\Omega)$, u_0 è un vettore in $L_2(\Omega)$ [modellizzando la temperatura iniziale], $f(t)$ è un vettore in $L_2(\Omega)$ continuo nel tempo $t \geq 0$ [modelizzando i sorgenti di calore al momento t], e $u(t)$ è un vettore di $L_2(\Omega)$ [modellizzando la temperatura al momento t]. Supponiamo che L abbia un numero infinito di autovalori λ_n, tutti non negativi, con base ortonormale di corrispondenti autofunzioni φ_n: $L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, dove $n = 1, 2, \ldots$. In tal caso ogni $u \in L_2(\Omega)$ soddisfa l'identità di Parseval

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 .$$

Da questa impostazione segue subito

$$\frac{d}{dt}(u(t), \varphi_n) = -\lambda_n (u(t), \varphi_n) + (f(t), \varphi_n)$$

con condizione iniziale

$$(u(t = 0), \varphi_n) = (u_0, \varphi_n),$$

dove $n = 1, 2, \ldots$ e il prodotto scalare è quello complesso di $L_2(\Omega)$. Utilizzando la formula della variazione dei parametri si trova immediatamente

$$(u(t), \varphi_n) = e^{-\lambda_n t}(u_0, \varphi_n) + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-s)} (f(s), \varphi_n)\, ds.$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x},t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n t}(u_0,\varphi_n)+\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)}(f(s),\varphi_n)\,ds\right]\varphi_n(\boldsymbol{x})\\
&= \int_\Omega \mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t)u_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}+\int_0^t\int_\Omega \mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t-s)f(s,\boldsymbol{y})\,dy\,ds, \qquad \text{(V.78)}
\end{aligned}
$$

dove la funzione di Green

$$
\mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\varphi_n(\boldsymbol{x})\overline{\varphi_n(\boldsymbol{y})}. \qquad \text{(V.79)}
$$

Secondo l'identità di Parseval abbiamo

$$
\mathcal{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};0)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\boldsymbol{x})\overline{\varphi_n(\boldsymbol{y})}=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
$$

4.1 Esempi su intervalli limitati

Esempio V.2 Poniamo $\Omega=(0,a)$ e $Lu=-u''$ con condizioni di Dirichlet, cioè il problema al contorno

$$
\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \qquad 0<x<a,\ t>0;
$$

$$
u(0,t)=u(a,t)=0, \qquad u(x,0)=u_0(x).
$$

In tal caso gli autovalori sono $\lambda_n=(n\pi/a)^2$ e le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate in $L_2(0,1)$ sono $\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a})$, dove $n=1,2,\ldots$. Quindi la soluzione ha la forma

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\int_0^a u_0(y)\,dy\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right.\\
&\quad \left.+\int_0^t\int_0^a e^{-n^2\pi^2(t-s)/a^2}f(y,s)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\,dy\,ds\right]\\
&= \int_0^1 \mathcal{G}(x,y;t)u_0(y)\,dy+\int_0^t\int_0^1 \mathcal{G}(x,y;t-s)f(y,s)\,dy\,ds,
\end{aligned}
$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \\
&= \frac{1}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \frac{-\cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{a}\right)+\cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{a}\right)}{2}\right] \\
&= \frac{-\vartheta_3(\pi\frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}) + \vartheta_3(\pi\frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})}{2a},
\end{aligned}$$

in cui $\vartheta_3(z,q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos(2nz)$ è una delle funzioni Theta di Jacobi ([17], 21.11).[12]

Consideriamo $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0,a)$ con le condizioni di Neumann $u'(0) = u'(a) = 0$. In tal caso $\lambda_n = (n\pi/a)^2$ e $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{a}}\cos(n\pi x/a)$, dove $n = 0,1,2,3,\ldots$. Allora

$$u(x,t) = \int_0^a \mathcal{G}(x,y;t)u_0(y)\,dy + \int_0^t\int_0^a \mathcal{G}(x,y;t-s)f(y,s)\,dy\,ds,$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{1}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right] \\
&= \frac{1}{a}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \frac{\cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{a}\right)+\cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{a}\right)}{2}\right] \\
&= \frac{\vartheta_3(\pi\frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}) + \vartheta_3(\pi\frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})}{2a}.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0,a)$ con la condizione di Dirichlet all'estremo sinistro e quella di Neumann all'estremo destro: $u(0) = u'(a) = 0$. In tal caso $\lambda_n = ((n+\frac{1}{2})\pi/a)^2$ e $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin((n+\frac{1}{2})\pi x/a)$, dove $n = 0,1,2,3,\ldots$. Allora

$$u(x,t) = \int_0^a \mathcal{G}(x,y;t)u_0(y)\,dy + \int_0^t\int_0^a \mathcal{G}(x,y;t-s)f(y,s)\,dy\,ds,$$

[12] Si ha $\vartheta_3(z,q) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos(2z)+q^{4n-2})$, dove $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$.

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 t/4a^2)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2a}\right)\\ &= \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 t/4a^2)}\left\{-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x+y)}{2a}\right)\right.\\ &\left.+\cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x-y)}{2a}\right)\right\}\\ &= \frac{-\vartheta_2(\pi\frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}) + \vartheta_2(\pi\frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2})}{2a},\end{aligned}$$

in cui $\vartheta_2(z,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2/4}\cos((2n+1)z)$ è una delle funzioni Theta di Jacobi ([17], 21.11).[13]

Consideriamo infine $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0,a)$ con condizioni periodiche. In tal caso ci sono un autovalore semplice $\lambda_0 = 0$ con autofunzione corrispondente $\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}$ e gli autovalori doppi $\lambda_n = (2n\pi/a)^2$ con autofunzioni corrispondenti $\varphi_n^c(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(2n\pi x/a)$ e $\varphi_n^s(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(2n\pi x/a)$, dove $n = 1,2,3,\ldots$. Allora

$$u(x,t) = \int_0^a \mathcal{G}(x,y;t)u_0(y)\,dy + \int_0^t\int_0^a \mathcal{G}(x,y;t-s)f(y,s)\,dy\,ds,$$

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,y;t) &= \frac{1}{a}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{2n\pi}{a})^2 t}\left\{\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{2n\pi y}{a}\right)\right.\right.\\ &\left.\left.+\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{2n\pi y}{a}\right)\right\}\right]\\ &= \frac{1}{a}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{2n\pi}{a})^2 t}\cos\left(\frac{2n\pi(x-y)}{a}\right)\right]\\ &= \frac{1}{a}\vartheta_3\left(\frac{\pi(x-y)}{a}, e^{-(\frac{2\pi}{a})^2 t}\right).\end{aligned}$$

Esempio V.3 Adesso discutiamo il caso $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < L\}$ e $L = -\Delta$ con la condizione di Dirichlet al bordo. In tal caso gli autovalori $\lambda > 0$. Infatti,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\lambda u(r,\theta), \tag{V.80}$$

[13] Si ha $\vartheta_2(z,q) = 2Gq^{1/4}\cos(z)\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos(2z)+q^{4n})$, dove $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$.

e applicando la solita separazione delle variabili arriviamo, per $\lambda > 0$, all'equazione differenziale

$$\frac{d^2R}{d(r\sqrt{\lambda})^2} + \frac{1}{r\sqrt{\lambda}}\frac{dR}{d(r\sqrt{\lambda})} + \left(1 - \frac{m^2}{(r\sqrt{\lambda})^2}\right) R(r) = 0,$$

dove $m = 0, 1, 2, \ldots$ e $R(r)$ è limitato se $r \to 0^+$. Allora $R(r) \sim J_m(r\sqrt{\lambda})$, mentre $R(L) = 0$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_{mn} = (\nu_{mn}/L)^2$ [essendo ν_{mn} lo zero positivo n-esimo della $J_m(x)$], dove $m = 0, 1, 2, \ldots$ e $n = 1, 2, 3, \ldots$. Le autofunzioni normalizzate in $L_2(\Omega) \simeq L_2([0, L] \times [0, 2\pi]; r dr\, d\theta)$ sono

$$\begin{cases} \varphi_{0n}(r,\theta) = \dfrac{1}{L\sqrt{\pi}|J_0'(\nu_{0n})|} J_0\left(\dfrac{\nu_{0n} r}{L}\right), & n = 1, 2, 3, \ldots \\ \varphi^c_{mn}(r,\theta) = \dfrac{\sqrt{2}\cos m\theta}{L\sqrt{\pi}|J_m'(\nu_{mn})|} J_m\left(\dfrac{\nu_{mn} r}{L}\right), & m = 1, 2, 3, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots \\ \varphi^s_{mn}(r,\theta) = \dfrac{\sqrt{2}\sin m\theta}{L\sqrt{\pi}|J_m'(\nu_{mn})|} J_m\left(\dfrac{\nu_{mn} r}{L}\right), & m = 1, 2, 3, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Le costanti di normalizzazione seguono dall'identità

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^{2\pi} r J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) \cos m\theta\, d\theta dr &= (1 + \delta_{m0})\pi \int_0^L r J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) dr \\ &= (1 + \delta_{m0})\frac{L^2}{2} J_m'(\nu_{mn})^2, \end{aligned}$$

e ugualmente con $\sin m\theta$ al posto di $\cos m\theta$ se $m \geq 1$.

Risulta

$$\begin{aligned} u(r,\theta,t) = &\int_0^\infty \int_0^{2\pi} r\mathcal{G}(r,\hat{r},\theta-\hat{\theta};t) u_0(r,\theta)\, d\theta\, dr \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \hat{r}\mathcal{G}(r,\hat{r},\theta-\hat{\theta};t-s) f(\hat{r},\hat{\theta},s)\, d\hat{\theta}\, d\hat{r}\, ds, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(r,\hat{r},\theta-\hat{\theta};t) = \sum_{n=1}^\infty \Bigg[& e^{-\nu_{0n}^2 t/L^2} \frac{J_0\left(\dfrac{\nu_{0n} r}{L}\right) J_0\left(\dfrac{\nu_{0n}\hat{r}}{L}\right)}{\pi L^2 J_0'(\nu_{0n})^2} \\ &+ 2\sum_{m=1}^\infty e^{-\nu_{mn}^2 t/L^2} \frac{J_m\left(\dfrac{\nu_{mn} r}{L}\right) J_m\left(\dfrac{\nu_{mn}\hat{r}}{L}\right) \cos[m(\theta-\hat{\theta})]}{\pi L^2 J_m'(\nu_{mn})^2} \Bigg], \end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato la formula

$$\cos(m[\theta - \hat{\theta}]) = \cos m\theta \cos m\hat{\theta} - \sin m\theta \sin m\hat{\theta}.$$

4.2 Esempi su domini illimitati

Esempio V.4 Consideriamo il problema a valori iniziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{V.81}$$

Applicando la trasformata di Fourier unidimensionale $u \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{u}$ otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi,t) + \hat{f}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{V.82}$$

La soluzione del problema (VI.82) è elementare:

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 t}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2(t-\tau)}\hat{f}(\xi,\tau)\,d\tau. \tag{V.83}$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi,t)\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\left[e^{-\xi^2 t}\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2(t-\tau)}\hat{f}(\xi,\tau)\,d\tau\right]\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(x-y;t)u_0(y)\,dy + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}(x-y;t-\tau)f(y,\tau)\,du\,d\tau, \end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{G}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}e^{-\xi^2 t}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}e^{-x^2/4t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\xi-\frac{ix}{2t}\right)^2 t}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-x^2/4t}.$$

Esempio V.5 Consideriamo ora il problema a valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{V.84}$$

Per risolvere la (VI.84) introduciamo la trasformata di Fourier seno

$$(\mathcal{F}_s u)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} u(x)\sin(x\xi)\,dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\,\hat{u}(\xi), \tag{V.85}$$

dove $u(x) = -u(-x)$ per $x \in \mathbb{R}^-$ è l'estensione di u ad una funzione dispari. Si vede subito che

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (\mathcal{F}_s u)(\xi) \sin(x\xi)\, d\xi. \tag{V.86}$$

Applicando la trasformata di Fourier seno $\mathcal{F}_s$ alla (VI.82) risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}_s u}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 (\mathcal{F}_s u)(\xi, t) + (\mathcal{F}_s f)(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ (\mathcal{F}_s u)(\xi, 0) = (\mathcal{F}_s u_0)(\xi), \end{cases} \tag{V.87}$$

e ha la soluzione unica (VI.83). Dunque

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(x\xi)(\mathcal{F}_s u)(\xi, t) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(x\xi) \left[e^{-\xi^2 t} (\mathcal{F}_s u_0)(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2 (t-\tau)} (\mathcal{F}_s f)(\xi, \tau)\, d\tau \right] d\xi \\ &= \int_0^\infty \mathcal{G}_s(x, y; t) u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_0^\infty \mathcal{G}_s(x, y; t-\tau) f(y, \tau)\, dy\, d\tau, \end{aligned}$$

dove[14]

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s(x, y; t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(x\xi) \sin(y\xi) e^{-\xi^2 t}\, d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \left\{ -\cos((x+y)\xi) + \cos((x-y)\xi) \right\} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[-e^{-(x+y)^2/4t} + e^{-(x-y)^2/4t} \right]. \end{aligned} \tag{V.88}$$

Consideriamo ora il problema a valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \tag{V.89}$$

Per risolvere la (VI.89) introduciamo la trasformata di Fourier coseno

$$(\mathcal{F}_c u)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x) \cos(x\xi)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \hat{u}(\xi), \tag{V.90}$$

[14] Si utilizza $\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-z^2 t} \cos(zt)\, dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-z^2/4t}$. Vedi [1], Eq. 7.4.6.

dove $u(x) = u(-x)$ per $x \in \mathbb{R}^-$ è l'estensione di u ad una funzione pari. Si vede subito che

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (\mathcal{F}_c u)(\xi) \cos(x\xi)\, d\xi. \tag{V.91}$$

Applicando la trasformata di Fourier coseno $\mathcal{F}_c$ alla (VI.89) risulta

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}_c u}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 (\mathcal{F}_c u)(\xi, t) + (\mathcal{F}_c f)(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ (\mathcal{F}_c u)(\xi, 0) = (\mathcal{F}_c u_0)(\xi), \end{cases} \tag{V.92}$$

e ha la soluzione unica (VI.83). Dunque

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\xi)(\mathcal{F}_c u)(\xi, t) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\xi) \left[e^{-\xi^2 t} (\mathcal{F}_c u_0)(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2 (t-\tau)} (\mathcal{F}_c f)(\xi, \tau)\, d\tau \right] d\xi \\ &= \int_0^\infty \mathcal{G}_c(x, y; t) u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_0^\infty \mathcal{G}_c(x, y; t-\tau) f(y, \tau)\, dy\, d\tau, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_c(x, y; t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(x\xi) \cos(y\xi) e^{-\xi^2 t}\, d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \left\{ \cos((x+y)\xi) + \cos((x-y)\xi) \right\} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[e^{-(x+y)^2/4t} + e^{-(x-y)^2/4t} \right]. \end{aligned} \tag{V.93}$$

Esempio V.6 Consideriamo infine il problema a valori iniziali

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) = \Delta u + f(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}). \end{cases} \tag{V.94}$$

Applicando la trasformata di Fourier unidimensionale $u \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{u}$ otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\boldsymbol{\xi}, t) = -|\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) + \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}). \end{cases} \tag{V.95}$$

La soluzione del problema (VI.95) è elementare:

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 t} \hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}) + \int_0^t e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 (t-\tau)} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau)\, d\tau. \tag{V.96}$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x},t) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi})}\hat{u}(\boldsymbol{\xi},t)\,d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi})}\left[e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 t}\hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}) + \int_0^t e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2(t-\tau)}\hat{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)\,d\tau\right]d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};t)u_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};t-\tau)f(\boldsymbol{y},\tau)\,d\boldsymbol{y}\,d\tau,
\end{aligned}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi})}e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 t}\,d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}e^{-|\boldsymbol{x}|^2/4t}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\boldsymbol{\xi}+\frac{i\boldsymbol{x}}{2t},\boldsymbol{\xi}+\frac{i\boldsymbol{x}}{2t}\right)t}\,d\boldsymbol{\xi} = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\right)^n e^{-|\boldsymbol{x}|^2/4t}.
\end{aligned}
$$

5 Equazioni iperboliche

L'equazione delle onde ha la forma

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\Delta u, \tag{V.97}
$$

dove $c > 0$ è la velocità della onda, $x \in \Omega$ (un aperto connesso e limitato in $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$ superficie regolare a tratti), e valgono la condizione di Dirichlet

$$
u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \tag{V.98}
$$

e le due condizioni iniziali

$$
u(x,0) = u_0(x), \tag{V.99a}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x). \tag{V.99b}
$$

La separazione delle variabili

$$
u(x,t) = \psi(x)T(t) \tag{V.100}
$$

conduce alle equazioni

$$
\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \text{costante}, \tag{V.101a}
$$

$$
\psi(x) = 0 \text{ per } x \in \partial\Omega. \tag{V.101b}
$$

Supponiamo che l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + \lambda^2\psi = 0$$

su Ω con la condizione di Dirichlet abbia un infinito numerabile di autovalori positivi λ_n^2 (dove $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$) con autofunzioni corrispondenti φ_n che formano una base ortonormale di $L_2(\Omega)$. In tal caso la costante nella (VI.101a) vale $-\lambda_n^2$, e quindi

$$T(t) = c_n \cos(c\lambda_n t) + d_n \sin(c\lambda_n t).$$

La soluzione generale della equazione delle onde (VI.103b) con la condizione di Dirichlet (VI.98) ha la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos(c\lambda_n t) + d_n \sin(c\lambda_n t)\right) \psi_n(x). \tag{V.102}$$

Quindi dalle (VI.99) otteniamo

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x), \tag{V.103a}$$

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n c\lambda_n \psi_n(x). \tag{V.103b}$$

Dall'ortonormalità delle autofunzioni ψ_n in $L_2(\Omega)$ seguono i coefficienti c_n e d_n:

$$c_n = \langle u_0, \psi_n \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega u_0(x)\psi_n(x)\, dx, \tag{V.104a}$$

$$d_n = \frac{\langle u_1, \psi_n \rangle}{c\lambda_n} = \frac{1}{c\lambda_n} \int_\Omega u_1(x)\psi_n(x)\, dx. \tag{V.104b}$$

Lo stesso discorso vale se al posto della condizione di Dirichlet (VI.98) si considera la condizione di Neumann. L'unica differenza è che ora zero è autovalore (con l'autofunzione costante) dell'equazione di Helmholtz su Ω con la condizione di Neumann. Al posto della (VI.102) si consideri ora

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{1}{\sqrt{\mathrm{mis}(\Omega)}} (c_0 + d_0 t) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos(c\lambda_n t) + d_n \sin(c\lambda_n t)\right) \psi_n(x), \end{aligned} \tag{V.105}$$

dove $\psi_0(x) = 1/\sqrt{\text{mis}(\Omega)}$ è l'autofunzione normalizzata corrispondente all'autovalore zero. Per $n \geq 1$ si trovano le espressioni (VI.102) e (VI.104b), mentre

$$c_0 = \frac{\int_\Omega u_0(x)\,dx}{\sqrt{m(\Omega)}}, \qquad d_0 = \frac{\int_\Omega u_1(x)\,dx}{\sqrt{m(\Omega)}}.$$

Nel caso in cui $\Omega = (0, L)$, abbiamo per le condizioni di Dirichlet

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{V.106}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$, e per le condizioni di Neumann

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{V.107}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$, mentre $\lambda_0 = 0$ e $\psi_0(x) = 1/\sqrt{L}$.

Nel caso delle condizioni di Dirichlet, utilizzando le espressioni

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) &= \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right),\\
2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right),
\end{aligned}$$

e sostituendo la (VI.106) nella (VI.102), otteniamo

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right)\right]\\
&\quad + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{\infty} d_n\left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[\psi_n(x-ct) + \psi_n(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{\infty} d_n c\frac{n\pi}{L}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi_n(\tilde{x})\,d\tilde{x}\\
&\overset{???}{=} \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\tilde{x})\,d\tilde{x}\ [\textbf{SBAGLIATO}],
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato gli sviluppi di Fourier (VI.103) e esteso le autofunzioni *come fossero definite fuori dell'intervallo* $(0, L)$.

Per $c > 0$ consideriamo l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t), \tag{V.108a}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{V.108b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \tag{V.108c}$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Applicando la trasformata di Fourier arriviamo al sistema di equazioni

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\xi, t) = -c^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t) + \hat{f}(\xi, t), \tag{V.109a}$$

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \tag{V.109b}$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi), \tag{V.109c}$$

con la soluzione unica

$$\hat{u}(\xi, t) = \cos(c\xi t)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(c\xi t)}{c\xi}\hat{u}_1(\xi) + \int_0^t \frac{\sin(c\xi(t-\tau))}{c\xi}\hat{f}(\xi, \tau)\, d\tau. \tag{V.110}$$

Per $\xi = 0$ si calcola il limite:

$$\hat{u}(0, t) = \hat{u}_0(0) + t\hat{u}_1(0) + \int_0^t (t-\tau)\hat{f}(0, \tau)\, d\tau. \tag{V.111}$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\hat{u}(\xi, t)\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\left[\cos(c\xi t)\hat{u}_0(\xi)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(c\xi t)}{c\xi}\hat{u}_1(\xi) + \int_0^t \frac{\sin(c\xi(t-\tau))}{c\xi}\hat{f}(\xi, \tau)\, d\tau\right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(x-y;t)u_0(y) + \mathcal{G}(x-y;t)u_1(y)\right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \mathcal{G}(x-y;t-\tau)f(y,\tau)\, d\tau\right] dy, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x-y;t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi}\frac{\sin(c\xi t)}{c\xi}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2c}\left[H(y-x+ct) + H(y-x-ct)\right], \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(x-y;t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi}\cos(c\xi t)\, d\xi \\ &= \frac{1}{2}\left[\delta(y-x+ct) - \delta(y-x-ct)\right]. \end{aligned}$$

In particolare, abbiamo trovato la cosiddetta *soluzione di D'Alembert*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)\, dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-ct+c\tau}^{x+ct-c\tau} f(y,\tau)\, dy\, d\tau. \end{aligned}$$

L'equazione delle onde (VI.97) con un'opportuna condizione al contorno e le condizioni iniziali (VI.99) ha la soluzione unica

$$u(x,t) = \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(x,\hat{x};t)u_0(\hat{x})\,d\hat{x} + \int_\Omega \mathcal{G}(x,\hat{x};t)u_1(\hat{x})\,d\hat{x}, \tag{V.112}$$

dove la funzione di Green è molto singolare. Ciò si spiega dal principio di Huygens: Le singolarità presenti nella soluzione per $t = 0$ si propagano in tutte le direzioni con velocità c quindi si manifestano nella soluzione al momento $t > 0$. Per esempio, generalizzando la risoluzione del sistema (VI.108) per $x \in \mathbb{R}^n$ si applichi la trasformazione di Fourier n-dimensionale per trovare la stessa forma della soluzione. Questa volta la funzione di Green ha l'espressione

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\xi}}\frac{\sin(ct\|\boldsymbol{\xi}\|_2)}{c\|\boldsymbol{\xi}\|_2}\,d\boldsymbol{\xi}, \tag{V.113a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\xi}}\cos(ct\|\boldsymbol{\xi}\|_2)\,d\boldsymbol{\xi}. \tag{V.113b}$$

Capitolo VI

TEORIA DEI GRUPPI

In meccanica razionale la simmetria di un sistema fisico conduce alle leggi di conservazione. La conservazione del momento angolare segue direttamente dalla simmetria rotazionale, cioè dall'invarianza del sistema sotto opportune rotazioni. Le operazioni di simmetria costituiscono un cosiddetto gruppo. La teoria dei gruppi fornisce il contesto matematico per trattare gli invarianti e le simmetrie di un sistema fisico. In fisica lo sono stati Wigner ed altri ad introdurre i gruppi. In geometria Klein ed altri hanno introdotto i gruppi per descrivere gli invarianti e le simmetrie di un sistema geometrico.

La teoria dei gruppi finiti (anche detti gruppi discreti) è fondamentale per capire le simmetrie in un cristallo, dove c'è simmetria rotazionale soltanto per un numero finito di rotazioni. Di recente questa teoria ha condotto ad una classificazione completa di tutti i gruppi finiti.

Se le rotazioni dipendono da vari angoli in modo continuo, i gruppi di rotazioni hanno infiniti elementi, mentre quest'ultimi hanno opportune proprietà metriche e topologiche. In tal caso la teoria dei gruppi di Lie (anche detti gruppi continui) è fondamentale per capire le simmetrie.

1 Gruppi Astratti

In algebra astratta si definisce un *gruppo* come un insieme G di elementi (di oggetti, operazioni, trasformazioni, matrici, ecc.) che si possono moltiplicare costituendo una trasformazione prodotto $(a, b) \mapsto ab$, da $G \times G$ in G, che soddisfa le seguenti condizioni:

(1) (*associatività*): $(ab)c = a(bc)$ per tutti gli $a, b, c \in G$;

(2) esiste un elemento neutrale $e \in G$ tale che $ae = ea = a$ per ogni $a \in G$;[1]

[1] C'è un singolo elemento neutrale. Infatti, se ci fossero due, e_1 e e_2, allora $e_2 = e_1 e_2 = e_1$,

(3) per ogni $a \in G$ esiste un elemento inverso $a^{-1} \in G$ tale che $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.[2]

Se vale la

(4) (*commutatività*) $ab = ba$ per tutti gli $a, b \in G$,

allora G si dice *gruppo abeliano*. L'elemento neutrale e viene spesso scritto come 1.

Spesso, in particolare se vale la commutatività (4), l'operazione è un'addizione, si scrivono $a + b$, $-a$ e 0 al posto di ab, a^{-1} e 1, e il gruppo si dice additivo.[3] Invece di (1)-(4) abbiamo ora:

$(1)_a$ (*associatività*) $(a + b) + c = a + (b + c)$ per tutti gli $a, b, c \in G$;

$(2)_a$ esiste un elemento neutrale $0 \in G$ tale che $a + 0 = 0 + a = a$ per ogni $a \in G$;

$(3)_a$ per ogni $a \in G$ esiste un elemento inverso $-a \in G$ tale che $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Se vale la

$(4)_a$ (*commutatività*) $a + b = b + a$ per tutti gli $a, b \in G$,

allora G si dice *abeliano*. In un gruppo additivo **abeliano** si scrive

$$a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + (-b) = (-b) + a.$$

Esempio VI.1 Gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ dei numeri interi, razionali, reali e complessi sono gruppi additivi abeliani rispetto alla solita addizione dei numeri. Per $n \in \mathbb{N}$ gli insiemi $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ dei vettori di n numeri interi, razionali, reali e complessi sono gruppi additivi abeliani rispetto alla solita addizione componente per componente. Gli insiemi $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dei numeri razionali, reali e complessi diversi da zero sono gruppi moltiplicativi abeliani rispetto alla solita moltiplicazione dei numeri. Anche l'insieme $\mathbb{T}$ dei numeri complessi di modulo 1 è un gruppo moltiplicativo abeliano rispetto alla moltiplicazione dei numeri.

---

dove la prima uguaglianza segue dal fatto che e_1 è elemento neutrale e la seconda dal fatto che e_2 è elemento neutrale.

[2] L'elemento $a \in G$ non ha più di un'elemento inverso. Infatti, se ci fossero due, a_1 e a_2, allora $a_1 = a_1 e = a_1(aa_2) = (a_1 a)a_2 = ea_2 = a_2$, dove abbiamo utilizzato la (2) [alla prima e all'ultima uguaglianza], la (3) [alla seconda e quarta uguaglianza] e l'associatività [alla terza uguaglianza].

[3] Un gruppo come sopra si dice moltiplicativo.

Esempio VI.2 Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Allora gli insiemi $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $O(n)$, $U(n)$, $SO(n)$ e $SU(n)$ delle matrici reali non singolari, matrici complesse non singolari, matrici ortogonali, matrici unitarie, matrici ortogonali con determinante uguale ad 1 e matrici unitarie con determinante uguale ad 1, tutte di ordine n, sono gruppi moltiplicativi non abeliani rispetto al solito prodotto delle matrici. L'unico caso in cui il gruppo è abeliano è il caso $SO(2)$, dove tutti gli elementi hanno la forma

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

per $\varphi \in \mathbb{R}$. Grazie alla periodicità di $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$ esiste una corrispondenza biunivoca $e^{i\varphi} \leftrightarrow R(\varphi)$ tra i punti del cerchio unitario $\mathbb{T}$ e gli elementi di $SO(2)$ tale che $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$ corrisponde a $R(\varphi)R(\psi) = R(\varphi+\psi)$. Quindi dal punto di vista dell'algebra astratta i gruppi $SO(2)$ e $\mathbb{T}$ sono isomorfi.

Esempio VI.3 Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme $\mathbb{Z}_n$ di tutti i numeri interi modulo n (dove due interi m_1 e m_2 vengono identificati se $m_1 - m_2$ è divisibile da n, cioè se m_1 e m_2 hanno lo stesso resto al dividere da n) è un gruppo additivo abeliano **finito**. Quest'insieme ha soltanto n elementi caratterizzati dalle classi (inglese: residue classes) $0, 1, \ldots, n-1$. La tabella di addizione commutativa è la seguente (tracciata per $n \geq 6$):

	0	1	2	$\ldots$	$n-2$	$n-1$
0	0	1	2	$\ldots$	$n-2$	$n-1$
1	1	2	3	$\ldots$	$n-1$	0
2	2	3	4	$\ldots$	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2$	$n-2$	$n-1$	0	$\ldots$	$n-4$	$n-3$
$n-1$	$n-1$	0	1	$\ldots$	$n-3$	$n-2$

Esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $\mathbb{Z}_n$ e le radici dell'unità di grado n (cioè, gli zeri dell'equazione $z^n = 1$) tale che $m \pmod{n}$ corrisponde a $e^{2\pi i m} = \cos(2\pi m) + i\sin(2\pi m)$. Quindi dal punto di visto dell'algebra astratta il gruppo additivo $\mathbb{Z}_n$ è isomorfo al gruppo moltiplicativo delle radici dell'unità di grado n.

Esempio VI.4 Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme S_n di tutte le $n!$ permutazioni dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ è un gruppo moltiplicativo rispetto all'applicazione successiva (oppure al prodotto di composizione) di due permutazioni. Questo gruppo è non abeliano per $n \geq 3$. Per esempio, per $n = 3$ abbiamo le seguenti

6 permutazioni:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,2,3) & \mapsto & (1,2,3) & & \text{identità} \\
(1,2,3) & \mapsto & (1,3,2) & & \text{trasposizione } (23) \\
(1,2,3) & \mapsto & (3,2,1) & & \text{trasposizione } (13) \\
(1,2,3) & \mapsto & (2,1,3) & & \text{trasposizione } (12) \\
(1,2,3) & \mapsto & (2,3,1) & & \text{3-cycle } (123) \\
(1,2,3) & \mapsto & (3,1,2) & & \text{3-cycle } (132)
\end{array}$$

Applicando prima la permutazione orizzontale e poi quella verticale arriviamo alla seguente tabella di moltiplicazione:

	id.	(23)	(13)	(12)	(123)	(132)
id.	id.	(23)	(13)	(12)	(123)	(132)
(23)	(23)	id.	(123)	(132)	(13)	(12)
(13)	(13)	(132)	id.	(123)	(12)	(23)
(12)	(12)	(123)	(132)	id.	(23)	(13)
(123)	(123)	(12)	(23)	(13)	(132)	id.
(132)	(132)	(13)	(12)	(23)	id.	(123)

Esempio VI.5 Data una matrice quadrata A, si definisce il gruppo generato da A dalla formula

$$\mathcal{G}_A = \{e^{tA} : t \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j,$$

essendo totalmente convergente la serie e A^0 la matrice identità. Se e^{tA} non è mai uguale alla matrice identità per un'opportuna $t > 0$, allora il gruppo sarà isomorfo al gruppo additivo $\mathbb{R}$ dei numeri reali rispetto all'addizione dei numeri. Se $e^{\tau_0 A}$ è uguale alla matrice identità per $\tau_0 > 0$ ma diversa dalla matrice identità per $t \in (0, \tau_0)$, allora la trasformazione

$$\exp\left(\frac{2\pi t}{\tau_0} i\right) \mapsto e^{tA}$$

costituisce una corrispondenza biunivoca tra il cerchio unitario $\mathbb{T}$ e il gruppo $\mathcal{G}_A$ tale che il prodotto di due numeri in $\mathbb{T}$ corrisponde al prodotto delle corrispondenti matrici in $\mathcal{G}_A$. Ovviamente $\mathcal{G}_A$ è un gruppo moltiplicativo abeliano.

Si noti che la matrice $R(\varphi)$ dell'esempio VI.2 coincide con il matrice $e^{\varphi A}$ se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$SO(2) = \mathcal{G}_{\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \tag{VI.1}$$

Nello stesso modo si dimostra che

$$\mathcal{G}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se $A^n = 0$ mentre $A^j \neq 0$ per $j = 1, 2, \ldots, n-1$, allora

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} A^j.$$

In particolare,

$$\mathcal{G}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esempio VI.6 Sia $G = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$. Allora $(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu})$ rappresenta il tensore metrico della relatività speciale. Allora il gruppo di Lorentz consiste in tutte le matrici reali $A = (a_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^3$ di ordine 4 per cui

$$A^T G A = G \quad \text{oppure} \quad \sum_{\rho=0}^{3} g_{\rho\rho} a_{\rho\mu} a_{\rho\nu} = g_{\mu\nu} \text{ per } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Siccome $a_{00}^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 1$, si ha $a_{00} \geq 1$ oppure $a_{00} \leq -1$. D'altre parte, siccome $\det G = -1$, abbiamo per ogni A appartenente al gruppo di Lorentz

$$-(\det A)^2 = \det(A^T) \det G \det A = \det G = -1,$$

e quindi $\det A = \pm 1$. Quindi il gruppo di Lorentz ha i seguenti sottogruppi:

(*a*) $\mathrm{Lor} \times \{I, -I, G, -G\} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G\}$;

(*b*) $\mathrm{Lor} \times \{I, G\} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G,\ \det A = 1\}$;

(*c*) $\mathrm{Lor} \times \{I, -I\} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G,\ a_{00} \geq 1\}$;

(*d*) $\mathrm{Lor} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G,\ \det A = 1,\ a_{00} \geq 1\}$.

Come trasformazioni di Lorentz si intendono quelle appartenenti al gruppo più piccolo Lor.

Siano G_1 e G_2 due gruppi moltiplicativi. Allora un *omomorfismo* è una funzione $\varphi : G_1 \to G_2$ tale che

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2), \qquad g_1, g_2 \in G_1.$$

Un omomorfismo di gruppi si dice

(*a*) *monomorfismo* se $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ implica $g_1 = g_2$;

(*b*) *epimorfismo* se per ogni $g_2 \in G_2$ esiste almeno uno $g_1 \in G_1$ tale che $\varphi(g_1) = g_2$;

(*c*) *isomorfismo* se per ogni $g_2 \in G_2$ esiste esattamente uno $g_1 \in G_1$ tale che $\varphi(g_1) = g_2$. In altre parole: se è monomorfismo e epimorfismo. In tal caso $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ è anche un isomorfismo.

(*d*) *automorfismo* se $G_1 = G_2$ e φ è isomorfismo. Gli automorfismi su un gruppo moltiplicativo G costituiscono un gruppo $\mathrm{Aut}(G)$ rispetto al prodotto di composizione.

Negli esempi precedenti abbiamo visto alcuni esempi di isomorfismi dei gruppi. Per esempio, $\varphi : \mathbb{R} \to SO(2)$,

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

è un epimorfismo. La trasformazione $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{T}$,

$$\varphi(m) = e^{2\pi i m},$$

è un epimorfismo; tra $\mathbb{Z}_n$ e il gruppo delle radici di unità di grado n è un isomorfismo.

Sia G un gruppo moltiplicativo. Allora H si dice *sottogruppo* di G se H è un sottoinsieme di G che è un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione di G. Si vede facilmente che un sottoinsieme H di G è un sottogruppo di G se

(*a*) $ab \in H$ per tutti gli $a, b \in H$;

(*b*) $a^{-1} \in H$ per $a \in H$.

Se $\varphi : G_1 \to G_2$ è un omomorfismo di gruppi, allora

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \{\gamma(g) : g \in G_1\},$$
$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e\},$$

sono sottogruppi di G_2 e G_1, rispettativamente.

Sia G un gruppo moltiplicativo con sottogruppo H. È facile dimostrare che per ogni $g \in G$

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$$

è un sottogruppo di G. Infatti, se gh_1g^{-1} e gh_2g^{-1} appartengono ad H, allora $(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = g(h_1h_2)g^{-1} \in gHg^{-1}$, poichè $h_1h_2 \in H$. Un sottogruppo H di G si dice *sottogruppo normale* se

$$gHg^{-1} = H, \qquad g \in G.$$

Quest'ultimo equivale a richiedere che

$$gH = \{gh : h \in H\} = \{hg : h \in H\} = Hg.$$

Se G è abeliano, ovviamente, per commutatività, $gHg^{-1} = H$ per ogni $g \in G$. Dunque se G è abeliano, tutti i suoi sottogruppi sono normali.

Se N è un sottogruppo normale di G, allora si possono identificare due elementi $g_1, g_2 \in G$ se $g_1g_2^{-1} \in N$: $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in N$. Ovviamente $g \sim g$ per ogni $g \in N$, poichè $e = gg^{-1} \in N$ per ogni $g \in G$. Anche: se $g_1 \sim g_2$ e quindi $g_1g_2^{-1} \in N$, allora $g_2g_1^{-1} = (g_1g_2^{-1})^{-1} \in N$ e $g_2 \sim g_1$. Infine se $g_1 \sim g_2$ e $g_2 \sim g_3$, dunque se $g_1g_2^{-1} \in N$ e $g_2g_3^{-1} \in N$, allora $g_1g_3^{-1} = (g_1g_2^{-1})(g_2g_3^{-1}) \in N$ e quindi $g_1 \sim g_3$. Di conseguenza, possiamo suddividere G in cossidette classi di equivalenza $C_k = \{g \in G : g \sim k\}$. Ponendo G/N come l'insieme di tutte le classi di equivalenza, G/H è un gruppo rispetto all'operazione prodotto

$$C_{g_1}C_{g_2} = C_{g_2g_2},$$

dove utilizziamo che $g_1g_2 \sim \hat{g}_1\hat{g}_2$ se $g_1 \sim \hat{g}_1$ e $g_2 \sim \hat{g}_2$.[4] Il gruppo G/N si dice *gruppo quoziente*.

Se G è un gruppo finito (cioè, se G ha un numero finito, $\#G$, di elementi), allora

$$\#G = (\#N)(\#[G/N]).$$

In altre parole, l'*ordine* (cioè, il numero degli elementi) di un sottogruppo normale di un gruppo finito G è un divisore dell'ordine di G. Questa proprietà vale per qualsiasi sottogruppo, non soltanto per quelli normali.

Siano G e H due gruppi moltiplicativi e sia $\varphi : G \to H$ un epimorfismo. Si dimostra facilmente che $H = \operatorname{Im}\varphi$ e che $\operatorname{Ker}\varphi$ è un sottogruppo normale di G. Sia $\pi : G \to G/\operatorname{Ker}\varphi$ la trasformazione $\pi(g) = C_g$, un epimorfismo. Allora la trasformazione $\psi : G/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ definita da $\psi(C_g) \mapsto \varphi(g)$ è un isomorfismo da $G/\operatorname{Ker}\varphi$ in $\operatorname{Im}\varphi$.

[4]Dim: $\hat{g}_1\hat{g}_2(g_1g_2)^{-1} = \hat{g}_1(\hat{g}_2g_2^{-1})g_1^{-1} \in g_1Ng_1^{-1} = N$. Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato in modo essenziale che N è un sottogruppo *normale*.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{Im}\,\varphi = H \\
& G/\mathrm{Ker}\,\varphi \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura VI.1: Siano $\varphi : G \to \mathrm{Im}\,\varphi = H$ un epimorfismo e $\pi : G \to G/\mathrm{Ker}\,\varphi$ la proiezione naturale che manda g in $\{\hat{g} \in G : \hat{g} \sim g\}$. Allora $\psi : G/\mathrm{Ker}\,\varphi \to \mathrm{Im}\,\varphi$ è un isomorfismo.

Esempio VI.7 Nel gruppo S_n delle permutazioni dell'insieme di n oggetti $\{1, \ldots, n\}$ (vedi l'esempio VI.4) l'insieme di tutte le permutazioni pari[5] A_n è un sottogruppo normale di A_n per $n \geq 3$. Per $n \geq 5$ il gruppo S_n non ha altri sottogruppi normali non banali. Per $n = 3$ si ha $A_3 = \{(1), (123), (132)\}$.

Esempio VI.8 I sottogruppi normali del gruppo $GL_n(\mathbb{R})$ delle matrici reali non singolari di ordine n sono esattamente i sottogruppi lasciati invarianti dalle similarità $M \mapsto SMS^{-1}$, dove $S \in GL_n(\mathbb{R})$. Quindi il sottogruppo $SL_n(\mathbb{R})$ delle matrici reali di ordine n con determinante uguale ad 1 è normale (poichè $\det SMS^{-1} = \det M$), ma quello delle matrici ortogonali non lo è.

$$\begin{tikzcd}
M_n(R) \arrow[rr, "\det"] \arrow[dr, "\pi"'] & & R\setminus\{0\} \\
& M_n(R)/SL_n(R) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura VI.2: Siano $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ il funzionale determinante e $\pi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ la proiezione naturale che manda una matrice nella classe delle matrici con lo stesso determinante. Allora $\psi : GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è un isomorfismo.

[5] Ogni permutazione è un prodotto di trasposizioni. Si dice pari/dispari la permutazione se il numero dei fattori trasposizione nel prodotto è pari/dispari.

2 Gruppi Discreti — Gruppi Finiti

Le simmetrie che lasciano invarianti i cristalli hanno due componenti: un componente traslazione che manda un cellula primitiva del cristallo in un'altra cellula primitiva, e un componente rotazione/riflessione. Le rotazioni e riflessioni che lasciano invarianti il cristallo vengono descritte dagli elementi di un gruppo finito.

L'esempio principale di un gruppo finito è il *gruppo ciclico* di ordine n, in cui esiste un elemento g tale che $\{1, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ (con $g^n = 1$) sono gli elementi diversi del gruppo. Una rappresentazione additiva del gruppo ciclico di ordine n è il gruppo $\mathbb{Z}_n$ dell'esempio VI.3. Una rappresentazione moltiplicativa del gruppo ciclico di ordine n è il gruppo moltiplicativo delle radici dell'unità di ordine n: $\{e^{2\pi ik/n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ oppure il gruppo delle rotazioni successive intorno all'origine da un multiplo di $2\pi/n$.

Il gruppo ciclico di ordine 4 viene spesso scritto C_4. In due impostazioni diversi la sua tabella di moltiplicazione è:

C_4	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

C_4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Al contrario, il *gruppo di Klein* ha una delle seguenti tabelle:

$\boldsymbol{V}_4$	1	V_1	V_2	V_3
1	1	V_1	V_2	V_3
V_1	V_1	1	V_3	V_2
V_2	V_2	V_3	1	V_1
V_3	V_3	V_2	V_1	1

$\boldsymbol{V}_4$	1	R_x	R_y	$R_{x,y}$
1	1	R_x	R_y	$R_{x,y}$
R_x	R_x	1	$R_{x,y}$	R_y
R_y	R_y	$R_{x,y}$	1	R_x
$R_{x,y}$	$R_{x,y}$	R_y	R_x	1

In questo gruppo ogni elemento ha l'identità 1 come il suo quadrato. Quindi $\boldsymbol{V}_4$ non è isomorfo a C_4.

Studiando le simmetrie di un triangolo equilatero dobbiamo considerare le rotazioni per gli angoli $2\pi/2$ e $4\pi/3$, la riflessione rispetto all'asse x e tutte le combinazioni, risultando nel gruppo non abeliano D_3 di ordine 6 con i seguenti elementi:[6] Quindi il

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La sua tabella di moltiplicazione è la seguente:

D_3	1	A	B	C	D	E
1	1	A	B	C	D	E
A	A	B	1	E	C	D
B	B	1	A	D	E	C
C	C	D	E	1	A	B
D	D	E	C	B	1	A
E	E	C	D	A	B	1

Osserviamo che D_3, con il fattore sinistro nella direzione verticale e quello destro nella direzione orizzontale, è isomorfo al gruppo S_3 dell'esempio VI.4. L'unico gruppo di ordine 6 non isomorfo a D_3 è il gruppo ciclico C_6.

Il gruppo D_4 non abeliano contiene le 4 rotazioni antiorarie per $k\pi/2$ ($k = 0, 1, 2, 3$i; $c^4 = e$), le riflessioni rispetto alle rette OX (chiamata b), OY, AC e BD e tutte le combinazioni; in tutto, 8 elementi e, c, c^2, c^3, b, bc, bc^2 e bc^3, dove $cb = bc^3$, $c^2b = bc^2$, $c^3b = bc$ e $(bc^k)^2 = e$ per $k = 0, 1, 2, 3$. La sua tabella di moltiplicazione (con fattore sinistro verticale e fattore destro orizzontale) è come segue:

	e	c	c^2	c^3	b	bc	bc^2	bc^3
e	e	c	c^2	c^3	b	bc	bc^2	bc^3
c	c	c^2	c^3	e	bc^3	b	bc	bc^2
c^2	c^2	c^3	e	c	bc^2	bc^3	b	bc
c^3	c^3	e	c	c^2	bc	bc^2	bc^3	b
b	b	bc	bc^2	bc^3	e	c	c^2	bc^3
bc	bc	bc^2	bc^3	b	c^3	e	c	c^2
bc^2	bc^2	bc^3	b	bc	c^2	c^3	e	c
bc^3	bc^3	b	bc	bc^2	c	c^2	c^3	e

[6] Si noti che $CD = A$ e $DC = B$.

Il gruppo dihedrale D_n delle simmetrie di un poligono regolare con n vertici è composto dalle rotazioni antiorarie c^k per gli angoli $2k\pi/n$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$), la riflessione b rispetto ad una retta che passa per una vertice e il centro del poligono, e tutte le combinazioni $bc^k = c^{n-k}b$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$; $(bc^k)^2 = b^2 = e$). Il gruppo D_n ha $2n$ elementi ed è non abeliano. Per poter tassellare il piano completamente da poligoni regolari bisogna richiedere che $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

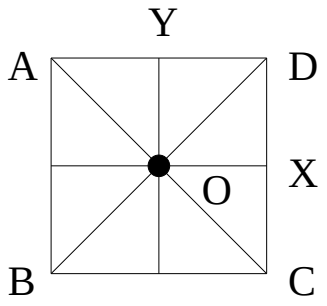

Figura VI.3: Il gruppo dihedrale D_4 descrive le simmetrie del quadrato $ABCD$, composto dalle rotazioni antiorarie e, c, c^2, c^3, le riflessioni rispetto alle rette OX, OY, AC e AD, e tutte le combinazioni.

3 Gruppi Continui — Gruppi di Lie

1. Algebre di Lie. Sia V uno spazio vettoriale reale o complesso (cioè, rispetto agli scalari in $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o in $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Allora V si dice *algebra di Lie* se in V viene anche definita un'operazione bilineare $[\cdot, \cdot] : V \times V \to V$, il cosiddetto *bracket di Lie*, con le seguenti proprietà:

(*a*) (*antisimmetria*) $[x, y] = -[y, x]$ per tutti gli $x, y \in V$;

(*b*) (*identità di Jacobi*)

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \qquad x, y, z \in V.$$

Per esempio, tutti gli spazi vettoriali di matrici reali o complesse $n \times n$ sono algebre di Lie rispetto al bracket *commutatore*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Un altro esempio viene fornito dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con prodotto vettore

$$[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_2).$$

Un sottospazio lineare W dell'algebra di Lie V è detto *sottoalgebra di Lie* di V se $[x, y] \in W$ per tutti gli $x, y \in W$, e *ideale di Lie* di V se $[x, z] \in W$ per ogni $x \in W$ e $z \in V$. Un esempio importante di un ideale di Lie di V è il *centro*

$$Z(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V : [x, z] = 0 \text{ per ogni } z \in V\}.$$

Si dice *omomorfismo di Lie* una trasformazione $\Phi : V \to W$ tra algebre di Lie che è una trasformazione lineare tra gli spazi vettoriale V e W e soddisfa

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = \Phi([x, y]), \qquad x, y \in V.$$

Un omomorfismo di Lie biunivoco si chiama un *isomorfismo di Lie*.

b. Algebra di Lie di un gruppo di matrici. Sia G un gruppo di matrici $n \times n$ rispetto al solito prodotto di matrici. Allora è detto *spazio tangente alla matrice identità* oppure *algebra di Lie* di G lo spazio vettoriale reale $\mathfrak{g} = TG$ composto delle derivate $\gamma'(t = 0)$ di tutte le curve derivabili $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ tali che $\gamma(0)$ è la matrice identità. Quindi per ogni curva derivabile $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ con $\gamma(0)$ la matrice identità I si ha

$$\gamma(t) = I + t\gamma'(0) + o(t), \qquad t \to 0,$$

e le derivate $\gamma'(0)$ costituiscono gli elementi dell'algebra di Lie di G.[7] È detta *dimensione* del gruppo G la dimensione **reale** dello spazio vettoriale $\mathfrak{g} = TG$. Infatti,

> Se $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ sono due funzioni continue tali che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ è la matrice identità, $A = \gamma_1'(0)$ e $B = \gamma_2'(0)$, allora la curva $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$ soddisfa all'equazione $\gamma'(0) = A + B$. Inoltre, per $0 \neq c \in \mathbb{R}$ la curve $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_1(ct)$ soddisfa all'equazione $\tilde{\gamma}'(0) = cA$. Quindi $\mathfrak{g} = TG$ è uno spazio vettoriale reale. Inoltre, la curva
>
> $$\delta(t^2) = \delta(-t^2)^{-1} = e^{tA}e^{tB}e^{-tA}e^{-tB} = I + [A, B]t^2 + O(t^3), \qquad t \to 0,$$
>
> appartiene a G e soddisfa all'equazione $\delta'(0) = [A, B]$. Dunque il commutatore di due matrici in $\mathfrak{g}$ appartiene a $\mathfrak{g}$.

Per calcolare le algebre di Lie di alcuni gruppi di matrici è cruciale la seguente identità.

[7] Il bracket di Lie di $\mathfrak{g} = TG$ è sempre il commutatore.

Lemma VI.9 *Per ogni matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ di ordine n si ha*

$$\det e^A = \exp(Tr\, A),$$

dove $Tr\, A = \sum_{j=1}^n a_{jj}$ è la somma degli autovalori di A.

Dimostrazione. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A, allora $\exp(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sono gli autovalori di e^A. Il lemma segue dal fatto che il determinante di una matrice è il prodotto dei suoi autovalori. □

Esempio VI.10 Calcoliamo ora le algebre di Lie di alcuni gruppi di matrici.

(*a*) Sia $G = GL_n(\mathbb{R})$ il gruppo delle matrici reali non singolari. Allora $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} TGL_n(\mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali di ordine n. Infatti, per dimostrare che $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ basta definire $\gamma(t) = e^{tA}$ e osservare che $\gamma'(0) = A$. Ovviamente $\dim GL_n(\mathbb{R}) = n^2$.

(*b*) Se $G = GL_n(\mathbb{C})$ è il gruppo di tutte le matrici complesse non singolari di ordine n, allora $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} TGL_n(\mathbb{C})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse di ordine n. Ovviamente $\dim GL_n(\mathbb{C}) = 2n^2$.

(*c*) Se $G = SL_n(\mathbb{R})$ è il gruppo di tutte le matrici reali con determinante uguale ad 1, allora $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} TSL_n(\mathbb{R})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali di ordine n e traccia zero. Quindi $\dim SL_n(\mathbb{R}) = n^2 - 1$.

(*d*) Se $G = SL_n(\mathbb{C})$ è il gruppo di tutte le matrici complesse con determinante uguale ad 1, allora $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} TSL_n(\mathbb{C})$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse di ordine n e traccia zero. Quindi $\dim SL_n(\mathbb{C}) = 2(n^2 - 1)$.

(*e*) Se $G = SO(n)$ è il gruppo di tutte le matrici ortogonali con determinante uguale ad 1, allora $\mathfrak{so}(n) \stackrel{\text{def}}{=} TSO(n)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali antisimmetriche $(A^T = -A)$ di ordine n. Siccome una matrice reale e antisimmetrica $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ soddisfa $a_{11} = \ldots = a_{nn} = 0$, abbiamo $\dim SO(n) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

(*f*) Se $G = SU(n)$ è il gruppo di tutte le matrici unitarie con determinante uguale ad 1, allora $\mathfrak{su}(n) \stackrel{\text{def}}{=} TSU(n)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse A tali che $A^* = -A$ e $\mathrm{Tr}\, A = 0$. Siccome gli elementi diagonali di una tale matrici sono numeri immaginari con somma zero, abbiamo $\dim SU(n) = 2[1 + 2 + \ldots + (n-1)] + (n-1) = n^2 - 1$.

(*g*) Se $G = O(n)$ è il gruppo di tutte le matrici ortogonali di ordine n, allora $\mathfrak{o}(n) \stackrel{\text{def}}{=} TO(n)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici reali antisimmetriche $(A^T = -A)$ di ordine n. Abbiamo $\dim O(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

(*h*) Se $G = U(n)$ è il gruppo di tutte le matrici unitarie, allora $\mathfrak{u}(n) \stackrel{\text{def}}{=} TU(n)$ è l'algebra di Lie di tutte le matrici complesse A tali che $A^* = -A$. Siccome gli elementi diagonali di una tale matrici sono numeri immaginari, abbiamo $\dim U(n) = 2[1 + 2 + \ldots + (n-1)] + n = n(n-1) + n = n^2$.

(*i*) Se $G = \mathrm{Lor} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : A^T G A = G,\ \det A = 1,\ a_{00} \geq 1\}$ è il gruppo di Lorentz, allora la sua algebra di Lie ha la forma

$$\begin{aligned}\mathfrak{lor} &= \{A \in M_4(\mathbb{R}) : GAG = -A^T\} = \{A \in M_4(\mathbb{R}) : (GA)^T = -GA\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{03} & -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} : a_{01}, a_{03}, a_{03}, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{R} \right\},\end{aligned}$$

e quindi $\dim \mathrm{Lor} = 6$.

Ad ogni gruppo di Lie G si possono associare $\dim G$ generatori: Una base qualsiasi $\{S_i : i = 1, 2, \ldots, \dim G\}$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ (considerato come spazio vettoriale reale) si dice sistema di *generatori* di G. Siccome i commutatori $[S_i, S_j]$ appartengono all'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, si ha la *relazione di chiusura* (inglese: closure relation)

$$[S_i, S_j] = \sum_{k=1}^{\dim G} c_{ij}^k S_k$$

per opportune *costanti di struttura* (inglese: structure constants) reali del gruppo G. Dall'antisimmetria del commutatore segue l'antisimmetria

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k. \tag{VI.2}$$

Applicando l'identità di Jacobi

$$[[S_i, S_j], S_k] + [[S_j, S_k], S_i] + [[S_k, S_i], S_j] = 0$$

segue

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{m=1}^{\dim G} \left(c_{ij}^m [S_m, S_k] + c_{jk}^m [S_m, S_i] + c_{ki}^m [S_m, S_j] \right) \\ &= \sum_{m,n=1}^{\dim G} \left(c_{ij}^m c_{mk}^m S_n + c_{jk}^m c_{mi}^n S_n + c_{ki}^m c_{mj}^n S_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\dim G} \sum_{m=1}^{\dim G} \left(c_{ij}^m c_{mk}^m + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n \right) S_n.\end{aligned}$$

Dall'indipendenza lineare dei vettori S_n segue la relazione

$$\sum_{m=1}^{\dim G} \left(c_{ij}^m c_{mk}^m + c_{jk}^m c_{mi}^n + c_{ki}^m c_{mj}^n \right) = 0. \tag{VI.3}$$

c. Alcuni esempi dettagliati. ***SO*(2)**. Consideriamo ora il gruppo $SO(2)$ delle matrici ortogonali di ordine 2 con determinante uguale ad 1. Allora $SO(2)$ ha la forma (VI.1) e la sua algebra di Lie $\mathfrak{so}(2)$ è composta da tutte le matrici reali antisimmetriche, cioè

$$\mathfrak{so}(2) = \left\{ c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = ic\sigma_2 : c \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

mentre $SO(2)$ è un gruppo di Lie che dipende da un singolo parametro t:

$$SO(2) = \{R(t) : t \in \mathbb{R}\}, \qquad R(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = e^{it\sigma_2}.$$

La matrice di Pauli σ_2 si dice *generatore* di $SO(2)$.

***SO*(3)**. L'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ del gruppo $SO(3)$ delle matrici ortogonali di ordine 3 con determinante uguale ad 1 consiste nelle matrici reali e antisimmetriche. Quindi

$$\mathfrak{so}(3) = \{i[c_1 S_x + c_2 S_y + c_3 S_z] : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \; S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{VI.4}$$

costituiscono una base dell'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ e si dicono *generatori* di $SO(3)$. Inoltre,

$$\begin{aligned} SO(3) &= \{R_x(\psi_1)R_y(\theta_1)R_z(\varphi_1) : \psi_1, \theta_1, \varphi_1 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_x(\psi_2)R_z(\varphi_2)R_y(\theta_2) : \psi_2, \theta_2, \varphi_2 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_y(\theta_3)R_x(\psi_3)R_z(\varphi_3) : \psi_3, \theta_3, \varphi_3 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_y(\theta_4)R_z(\varphi_4)R_x(\psi_4) : \psi_4, \theta_4, \varphi_4 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_z(\varphi_5)R_x(\psi_5)R_y(\theta_5) : \psi_5, \theta_5, \varphi_5 \in [0, 2\pi]\} \\ &= \{R_z(\varphi_6)R_y(\theta_6)R_x(\psi_6) : \psi_6, \theta_6, \varphi_6 \in [0, 2\pi]\}. \end{aligned}$$

In queste espressioni $R_x(\psi)$, $R_y(\theta)$ e $R_z(\varphi)$ sono le rotazioni elementari intorno alle assi x, y, z:

$$R_x(\psi) = e^{i\psi S_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix},$$

$$R_y(\theta) = e^{i\theta S_y} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_z(\varphi) = e^{i\varphi S_z} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mentre $(\psi_k, \theta_k, \varphi_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ sono gli angolo di Eulero della rotazione. Gli angoli di Eulero dipendono dall'ordine in cui le rotazioni elementari vengono applicate per ottenere la rotazione.

Il *tensore di Levi-Civita* ε_{ijk} viene ora introdotto come le costanti di struttura di $SO(3)$ (rispetto al sistema di generatori $\{S_x, S_y, S_z\}$):

$$[S_i, S_j] = i \sum_{k=x,y,z} \varepsilon_{ijk} S_k, \tag{VI.5}$$

dove $\varepsilon_{ijk} = 0$ se non tutti i pedici i, j, k sono diversi e[8]

$$\varepsilon_{xyz} = -\varepsilon_{yxz} = 1, \quad \varepsilon_{yzx} = -\varepsilon_{yxz} = 1, \quad \varepsilon_{zxy} = -\varepsilon_{zyx} = 1.$$

Esempio VI.11 Per ogni $g \in SO(3)$ si definisce l'operatore unitario T_g su $L^2(\mathbb{R}^3)$ da

$$(T_g\psi)(x) = \psi(g^{-1}x), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

dove $g^{-1}x \in \mathbb{R}^3$ è un prodotto matrice-vettore colonna. In tal caso

$$(T_g T_h \psi)(x) = (T_h\psi)(g^{-1}x) = \psi(h^{-1}g^{-1}x) = (T_{gh}\psi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

tale che $g \mapsto T_g$ è un monomorfismo da $SO(3)$ nel gruppo $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^3))$ degli operatori unitari su $L^2(\mathbb{R}^3)$. Sia A una matrice tale che $iA \in \mathfrak{so}(3)$ e sia $g(t) = e^{itA}$ per $t \in \mathbb{R}$. In tal caso

$$\frac{d}{dt}(T_{g(t)}\psi)(x)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\psi(e^{-itA}x)\bigg|_{t=0} = -i(Ax)\cdot(\nabla\psi)(x).$$

[8] Si osservi che $[S_x, S_y] = -[S_y, S_x] = iS_z$, $[S_y, S_z] = -[S_z, S_y] = iS_x$ e $[S_z, S_x] = -[S_x, S_z] = iS_y$.

Quindi l'algebra di Lie del gruppo $\{T_g : g \in SO(3)\}$ coincide con lo spazio vettoriale reale di tutti gli operatori $-i(Ax)\cdot\nabla$ su $L^2(\mathbb{R}^3)$ per cui $iA \in \mathfrak{so}(3)$. Di consequenza,

$$T_{g(t)} = e^{-i(Ax)\cdot\nabla} \text{ dove } iA \in \mathfrak{so}(3).$$

È facile vedere che

$$\begin{aligned}
L_x &= -(S_x x)\cdot\hbar\nabla = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right),\\
L_y &= -(S_y y)\cdot\hbar\nabla = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),\\
L_z &= -(S_y y)\cdot\hbar\nabla = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right),
\end{aligned}$$

dove $\hbar$ è la costante di Planck divisa da 2π, sono gli operatori per i momenti angolari nelle direzioni x, y e z. Soddisfano le relazioni

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y.$$

Inoltre $iA \mapsto -i(Ax)\cdot\nabla$ è un monomorfismo di Lie da $\mathfrak{so}(3)$ nell'algebra di Lie di $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^3))$, poichè gli operatori $L_x/\hbar$, $L_y/\hbar$ e $L_z/\hbar$ hanno le stesse relazioni di commutazione di S_x, S_y e S_z. Di conseguenza, se H è un operatore lineare su $L^2(\mathbb{R}^3)$ che commuta con T_g per ogni $g \in SO(3)$ [per esempio: l'Hamiltoniano $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$ per un potenziale centrale (cioè, $V(x) = V(|x|)$ per $x \in \mathbb{R}^3$)], allora H commuta con L_x, L_y e L_z.

***SU*(2)**. Il gruppo $SU(2)$ delle matrici unitarie di ordine 2 con determinante uguale ad 1 ha la forma

$$\begin{aligned}
SU(2) &= \left\{\begin{pmatrix} e^{i\xi}\cos\eta & e^{i\zeta}\sin\eta \\ -e^{-i\zeta}\sin\eta & e^{-i\xi}\cos\eta \end{pmatrix} : \xi,\eta,\zeta \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1\right\},
\end{aligned} \tag{VI.6}$$

dove ξ, η, ζ sono i cosiddetti parametri di Cayley-Klein. Introducendo le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ogni elemento di $SU(2)$ si può scrivere come il prodotto delle tre matrici $U_j(a_j) = \exp(ia_j\sigma_j)$ $(j = 1, 2, 3)$, dove $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ dipendono dall'ordine

dei tre fattori. Le tre matrici di Pauli costituiscono una base dell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{su}(2) &= \{i[a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3] : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ i \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\},\end{aligned}$$

e si dicono *generatori* di $SU(2)$. Una rotazione generale in $SU(2)$ ha la forma

$$\begin{aligned}U(\alpha,\beta,\gamma) &= U_z(\frac{\gamma}{2})U_y(\frac{\beta}{2})U_z(\frac{\alpha}{2}) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(\gamma+\alpha)/2}\cos\frac{\beta}{2} & e^{i(\gamma-\alpha)/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ -e^{-i(\gamma-\alpha)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{-i(\gamma+\alpha)/2}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{VI.7}$$

che coincide con l'espressione nella (VI.6) per i parametri di Cayley-Klein $\xi = (\gamma+\alpha)/2$, $\eta = \beta/2$ e $\zeta = (\gamma-\alpha)/2$.

Il *tensore di Levi-Civita* ε_{ijk} viene ora introdotto come le costanti di struttura di $SU(2)$ (rispetto al sistema di generatori $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$):

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{VI.8}$$

dove $\varepsilon_{ijk} = 0$ se non tutti i pedici i, j, k sono diversi e[9]

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213} = 1, \quad \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = 1, \quad \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{321} = 1.$$

$\boldsymbol{SU(2) \mapsto SO(3)}$. La somiglianza tra le (VI.5) e (VI.8) suggerisce a collegare i gruppi $SU(2)$ e $SO(3)$ facendo corrispondere le rispettative basi $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ e $\{2S_x, 2S_y, 2S_z\}$ delle algebre di Lie $\mathfrak{su}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$, cioè utilizzando la trasformazione lineare biunivoca

$$\begin{cases} \mathfrak{su}(2) \mapsto \mathfrak{so}(3), \\ i[c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3] \mapsto 2i[c_1S_x + c_2S_y + c_3S_z]. \end{cases}$$

Si osservi che questa trasformazione Φ non influisce sui commutatori:

$$[\Phi(A), \Phi(B)] = \Phi([A, B]), \qquad A, B \in \mathfrak{su}(2).$$

[9]Si osservi che $[\sigma_1, \sigma_2] = -[\sigma_2, \sigma_1] = 2i\sigma_3$, $[\sigma_2, \sigma_3] = -[\sigma_3, \sigma_2] = 2i\sigma_1$ e $[\sigma_3, \sigma_1] = -[\sigma_1, \sigma_3] = 2i\sigma_2$.

Ora costruiamo un omomorfismo di gruppi $\varphi : SU(2) \to SO(3)$:

$$\varphi(e^A) = e^{\Phi(A)}, \qquad A \in \mathfrak{su}(2). \tag{VI.9}$$

Applicando la (VI.9) si ha

$$e^{it\sigma_1} = \begin{pmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{pmatrix} \overset{\varphi}{\mapsto} R_x(2t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2t & \sin 2t \\ 0 & -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$e^{it\sigma_2} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \overset{\varphi}{\mapsto} R_y(2t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 & -\sin 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 2t & 0 & \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$e^{it\sigma_3} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \qquad \overset{\varphi}{\mapsto} R_z(2t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t & 0 \\ -\sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che φ non è biunivoca, malgrado il fatto che Φ lo è. Il raddoppio dell'angolo da t a $2t$ implica che

$$\varphi\left(e^{it\sigma_j}\right) = \varphi\left(e^{i[t+\pi]\sigma_j}\right), \qquad j = 1, 2, 3.$$

In particolare, calcolando $e^{it\sigma_j}$ per $t = \pi$ (che risulta ad essere uguale a meno la matrice identità) si vede che $\varphi(-I) = I$. L'omomorfismo φ è infatti due a uno: Le matrici $\pm U$ in $SU(2)$ hanno lo stesso immagine sotto φ. Passando ad un gruppo quoziente di $SU(2)$ si ha

$$\frac{SU(2)}{\{I, -I\}} \simeq SO(3).$$

Purtroppo $SU(2)/\{I, -I\}$ non è un gruppo di Lie.

Invece della φ, si può utilizzare la trasformazione lineare biunivoca

$$\begin{cases} \mathfrak{su}(2) \mapsto \mathfrak{so}(3), \\ i[c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3] \mapsto 2i[c_1 S_y + c_2 S_z + c_3 S_x], \end{cases}$$

che conduce ad un altro omomorfismo di Lie $\tilde{\Phi} : SU(2) \to SO(3)$ che soddisfa $\tilde{\Phi}(e^A) = e^{\tilde{\varphi}(A)}$.

Esempio VI.12 In ottica lineare si rappresenta il vettore elettro $\vec{\boldsymbol{E}}$ di un'onda elettromagnetica monocromatica come una combinazione lineare, $\vec{\boldsymbol{E}} = E_l\boldsymbol{\ell} + E_r\boldsymbol{r}$, rispetto a due vettori fissi $\boldsymbol{\ell}$ e $\boldsymbol{r}$ di lunghezza 1 tali che $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\ell}$ punta nella direzione di propagazione dell'onda. Un processo di ottica lineare di tipo

input-output viene descritto dalla *matrice di Jones* (complessa 2×2) $\boldsymbol{J}$ tale che

$$\begin{pmatrix} E_l \\ E_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{l0} \\ E_{r0} \end{pmatrix}$$

oppure

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{E}}_0.$$

Introducendo i *parametri di Stokes* (reali)

$$\begin{aligned} I &= E_l E_l^* + E_r E_r^*, \quad \text{(intensità)} \\ Q &= E_l E_l^* - E_r E_r^*, \\ U &= E_l E_r^* + E_r E_l^*, \\ V &= i(E_l E_r^* - E_r E_l^*), \end{aligned}$$

che descrivono l'intensità (essendo I) e lo stato di polarizzazione (tramite $(Q, U, V)/I$) dell'onda elettromagnetica, si può convertire la relazione lineare $\vec{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{E}}_0$ in una relazione $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{I}_0$ tra i vettori dei parametri di Stokes, essendo esprimibile in $\boldsymbol{J}$ la *matrice di Mueller* $\boldsymbol{M}$. Infatti, se $\boldsymbol{J} \in SU(2)$, allora la corrispondente matrice di Mueller ha la forma $\boldsymbol{M} = 1 \oplus \tilde{\Phi}(\boldsymbol{J}) \in 1 \oplus SO(3)$.[10]

Lor. Consideriamo ora il gruppo di Lorentz Lor. I suoi generatori sono gli elementi di una opportuna base della sua algebra di Lie $\mathfrak{lor}$. Siccome $\dim \mathrm{Lor} = 6$, abbiamo i seguenti generatori:

$$P_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[10] Nella $\boldsymbol{M} = (M_{ij})_{i,j=1}^4$ abbiamo $M_{11} = 1$, $M_{12} = M_{13} = M_{14} = M_{21} = M_{31} = M_{41} = 0$ e $(M_{ij})_{i,j=2}^4 = \tilde{\Phi}(\boldsymbol{J}) \in SO(3)$.

Calcoliamo ora e^{tP} per i sei generatori di Lor. Si ha

$$e^{tP_{01}} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tP_{02}} = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{tP_{03}} = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t \end{pmatrix}, \quad e^{tP_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{tP_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{tP_{23}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Gli elementi di Lor sono prodotti di questi sei gruppi di un singolo parametro in qualsiasi ordine. Inoltre, i commutatori tra i generatori sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
&[P_{01}, P_{02}] = -[P_{02}, P_{01}] = P_{12}, && [P_{01}, P_{03}] = -[P_{03}, P_{01}] = -P_{13}, \\
&[P_{01}, P_{12}] = -[P_{12}, P_{01}] = P_{02}, && [P_{01}, P_{13}] = -[P_{13}, P_{01}] = -P_{03}, \\
&[P_{01}, P_{23}] = -[P_{23}, P_{01}] = 0, && [P_{02}, P_{03}] = -[P_{03}, P_{02}] = P_{23}, \\
&[P_{02}, P_{12}] = -[P_{12}, P_{02}] = -P_{01}, && [P_{02}, P_{13}] = -[P_{13}, P_{02}] = 0, \\
&[P_{02}, P_{23}] = -[P_{23}, P_{02}] = P_{03}, && [P_{03}, P_{12}] = -[P_{12}, P_{03}] = 0, \\
&[P_{03}, P_{13}] = -[P_{13}, P_{03}] = P_{01}, && [P_{03}, P_{23}] = -[P_{23}, P_{03}] = -P_{02}, \\
&[P_{12}, P_{13}] = -[P_{13}, P_{12}] = P_{23}, && [P_{12}, P_{23}] = -[P_{23}, P_{12}] = -P_{13}, \\
&[P_{13}, P_{23}] = -[P_{23}, P_{13}] = P_{12}.
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{SL_2(\mathbb{C}) \mapsto Lor}$. Consideriamo ora il gruppo $SL_2(\mathbb{C})$ delle matrici complesse di ordine 2 con determinante uguale ad 1, per cui l'algebra di Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ consiste nelle matrici complesse di ordine 2 con traccia uguale a zero. Dunque $\dim SL_2(\mathbb{C}) = 6$. I generatori del gruppo sono le tre matrici di Pauli più le tre matrici

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

cioè

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{i[t_1\sigma_1 + t_2\sigma_2 + t_3\sigma_3 + u_1\tau_1 + u_2\tau_2 + u_3\tau_3] : t_1, t_2, t_3, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Si calcoli facilmente che

$$e^{it\tau_1} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad e^{it\tau_2} = \begin{pmatrix} \cosh t & -i\sinh t \\ i\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad e^{it\tau_3} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Si trovano i seguenti commutatori:

$$\begin{aligned}
&[\sigma_1,\tau_1]=0, && [\sigma_2,\tau_2]=0, && [\sigma_3,\tau_3]=0,\\
&[\sigma_1,\tau_2]=2i\tau_3, && [\sigma_2,\tau_3]=2i\tau_1, && [\sigma_3,\tau_1]=2i\tau_2,\\
&[\sigma_2,\tau_1]=-2i\tau_3, && [\sigma_3,\tau_2]=-2i\tau_1, && [\sigma_1,\tau_3]=-2i\tau_2,\\
&[\tau_1,\tau_2]=-2i\sigma_3, && [\tau_2,\tau_3]=-2i\sigma_1, && [\tau_3,\tau_1]=-2i\sigma_2,\\
&[\sigma_1,\sigma_2]=2i\sigma_3, && [\sigma_2,\sigma_3]=2i\sigma_1, && [\sigma_3,\sigma_1]=2i\sigma_2.
\end{aligned}$$

Definiamo ora

$$\begin{cases}
\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \overset{\varphi}{\mapsto} \mathfrak{lor},\\
\varphi(i[t_1\sigma_1+t_2\sigma_2+t_3\sigma_3+u_1\tau_1+u_2\tau_2+u_3\tau_3]) \mapsto\\
\quad 2[t_1P_{13}+t_2P_{12}+t_3P_{23}+u_1P_{02}+u_2P_{03}+u_3P_{01}].
\end{cases}$$

Definendo $\Phi : SL_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Lor}$ da $\Phi(e^A)=e^{\varphi(A)}$ per ogni $A\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, si ha

$$e^{it\sigma_1}=\begin{pmatrix}\cos t & i\,\sin t\\ i\,\sin t & \cos t\end{pmatrix} \quad \overset{\varphi}{\mapsto} e^{2tP_{13}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos 2t&0&-\sin 2t\\0&0&1&0\\0&\sin 2t&0&\cos 2t\end{pmatrix},$$

$$e^{it\sigma_2}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix} \quad \overset{\varphi}{\mapsto} e^{2tP_{12}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos 2t&\sin 2t&0\\0&-\sin 2t&\cos 2t&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$e^{it\sigma_3}=\begin{pmatrix}e^{it} & 0\\ 0 & e^{-it}\end{pmatrix} \quad \overset{\varphi}{\mapsto} e^{2tP_{23}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos 2t&\sin 2t\\0&0&-\sin 2t&\cos 2t\end{pmatrix},$$

$$e^{it\tau_1}=\begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix} \quad \overset{\varphi}{\mapsto} e^{2tP_{02}}=\begin{pmatrix}\cosh 2t&0&\sinh 2t&0\\0&1&0&0\\\sinh 2t&0&\cosh 2t&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$e^{it\tau_2}=\begin{pmatrix}\cosh t & -i\sinh t\\ i\sinh t & \cosh t\end{pmatrix} \overset{\varphi}{\mapsto} e^{2tP_{03}}=\begin{pmatrix}\cosh 2t&0&0&\sinh 2t\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\sinh 2t&0&0&\cosh 2t\end{pmatrix},$$

$$e^{it\tau_3}=\begin{pmatrix}e^{t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix} \quad \overset{\varphi}{\mapsto} e^{2tP_{01}}=\begin{pmatrix}\cosh 2t&\sinh 2t&0&0\\\sinh 2t&\cosh 2t&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Si vede subito che φ non è biunivoca e è infatti due a uno: $\varphi(\pm I) = I$. Di conseguenza,

$$\frac{SL_2(\mathbb{C})}{\{I, -I\}} \simeq \text{Lor}.$$

Osserviamo che φ e Φ estendono le rispettative trasformazioni $\tilde{\varphi} : \mathfrak{su}2 \to \mathfrak{so}(3)$ e $\tilde{\Phi} : SU(2) \to SO(3)$ se consideriamo $SU(2)$ un sottogruppo di $SL_2(\mathbb{C})$ e identifichiamo $SO(3)$ con $1 \oplus SO(3)$. In tal caso la trasformazione $\Phi : SL_2(\mathbb{C}) \to \text{Lor}$ manda le matrici di Jones appartenenti a $SL_2(\mathbb{C})$ in matrici di Mueller appartenenti a Lor (vedi l'esempio VI.12).

***SU*(3)**. Consideriamo ora il gruppo $SU(3)$ delle matrici 3×3 unitarie con determinante uguale ad 1. La sua algebra di Lie $\mathfrak{su}(3)$ consiste nelle matrici complesse antiautoaggiunte (cioè, $A^* = -A$) di ordine 3 e di traccia zero. Quindi $\dim SU(3) = 8$. Potremmo estendere ogni elemento di $SU(2)$ (oppure $\mathfrak{su}(2)$) ad un elemento di $SU(3)$ (oppure $\mathfrak{su}(3)$) facendo la somma diretta della matrice con lo scalare 1 (oppure 0). Purtroppo così si introducono 9 generatori anzicchè 8, quindi i nove generatori così costruiti sono linearmente dipendenti. Abbiamo i seguenti generatori:

$$\sigma_{1x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{2x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{3x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{1y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{2y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{3y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{1z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{2z} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{3z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$\sigma_{3x} + \sigma_{3y} + \sigma_{3z} = 0.$$

Quindi: Lasciando fuori una delle matrici $\sigma_{3x}, \sigma_{3y}, \sigma_{3z}$, si ottiene un sistema di generatori del gruppo $SU(3)$. Calcoliamo ora le espressioni e^{itS}, dove S è uno dei 9 generatori. Si ha

$$e^{it\sigma_{1x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & i \sin t \\ 0 & i \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{it\sigma_{2x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$e^{it\sigma_{3x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix}, \qquad e^{it\sigma_{1y}} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & i \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix},$$

$$
e^{it\sigma_{2y}} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{it\sigma_{3y}} = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{it} \end{pmatrix},
$$

$$
e^{it\sigma_{1z}} = \begin{pmatrix} \cos t & i\sin t & 0 \\ i\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{it\sigma_{2z}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
e^{it\sigma_{3z}} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Per ottenere 8 generatori introduciamo[11]

$$
\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
$$

I corrispondenti gruppi e^{itS} sono

$$
e^{it\lambda_1} = \begin{pmatrix} \cos t & i\sin t & 0 \\ i\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{it\lambda_2} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
e^{it\lambda_3} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{it\lambda_4} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & i\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix},
$$

$$
e^{it\lambda_5} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{it\lambda_6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & i\sin t \\ 0 & i\sin t & \cos t \end{pmatrix},
$$

$$
e^{it\lambda_7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{it\lambda_8} = \begin{pmatrix} e^{it/\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2it\sqrt{3}} \end{pmatrix}.
$$

[11] $\lambda_1 = \sigma_{1z}$, $\lambda_2 = -\sigma_{2z}$, $\lambda_3 = \sigma_{3z}$, $\lambda_4 = \sigma_{1y}$, $\lambda_5 = \sigma_{2y}$, $\lambda_6 = \sigma_{1x}$, $\lambda_7 = -\sigma_{2x}$ e $\lambda_8 = (\sigma_{3x} - \sigma_{3y})/\sqrt{3} = (-2\sigma_{3y} - \sigma_{3z})/\sqrt{3} = (2\sigma_{3x} + \sigma_{3z})/\sqrt{3}$.

Tabella VI.1: La tabella dei commutatori $[a, b]$ dove a è stata esposta in direzione orizzontale e b in direzione verticale.

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
λ_1	0	$-2i\lambda_3$	$-2i\lambda_2$	$-i\lambda_7$	$+i\lambda_6$	$-i\lambda_5$	$+i\lambda_4$	0
λ_2	$+2i\lambda_3$	0	$+2i\lambda_1$	$-i\lambda_6$	$-i\lambda_7$	$+i\lambda_4$	$+i\lambda_5$	0
λ_3	$+2i\lambda_2$	$-2i\lambda_1$	0	$-i\lambda_5$	$+i\lambda_4$	$+i\lambda_7$	$-i\lambda_6$	0
λ_4	$+i\lambda_7$	$+i\lambda_6$	$+i\lambda_5$	0	$-i\sqrt{3}\,\lambda_8$	$-i\lambda_2$	$-i\lambda_1$	$+i\sqrt{3}\,\lambda_5$
λ_5	$-i\lambda_6$	$+i\lambda_7$	$-i\lambda_4$	$+i\sqrt{3}\,\lambda_8$	0	$+i\lambda_1$	$-i\lambda_2$	$-i\sqrt{3}\,\lambda_4$
λ_6	$+i\lambda_5$	$-i\lambda_4$	$-i\lambda_7$	$+i\lambda_2$	$-i\lambda_1$	0	$-i\sqrt{3}\,\lambda_8$	$+i\sqrt{3}\,\lambda_7$
λ_7	$-i\lambda_4$	$-i\lambda_5$	$+i\lambda_6$	$+i\lambda_1$	$+i\lambda_2$	$+i\sqrt{3}\,\lambda_8$	0	$-i\sqrt{3}\,\lambda_6$
λ_8	0	0	0	$-i\sqrt{3}\,\lambda_5$	$+i\sqrt{3}\,\lambda_4$	$-i\sqrt{3}\,\lambda_7$	$+i\sqrt{3}\,\lambda_6$	0

***SU*(*n*)**. Gli $n^2 - 1$ generatori del gruppo $SU(n)$ delle matrici unitarie di ordine n e determinante 1 si possono ricavare dai 3 generatori di Pauli del gruppo $SU(2)$, conducendo a

$$3\binom{n}{2} = \frac{3}{2}n(n-1)$$

generatori, tra cui $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ matrici diagonali linearmente dipendenti. Ci sono al massimo $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ relazioni lineari tra queste matrici diagonali che servono a ridurre il numero dei generatori al numero $\dim SU(n) = n^2 - 1$. Di nuovo si possono trovare $n(n+1)$ matrici non diagonali (le estensioni naturali di σ_1 e σ_2) e $n-1$ matrici diagonali per ottenere un insieme di n^2-1 generatori di $SU(n)$ tali che i commutatori tra loro diversi da zero sono sempre multipli di un generatore.

4 Rappresentazioni di Gruppi

Sia G un gruppo moltiplicativo. Una *rappresentazione* di G di *dimensione* n è un omomorfismo $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$, cioè una trasformazione $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$ tale che[12]

$$T(gh) = T(g)T(h), \qquad g, h \in G.$$

In tal caso $T(e) = I$ (la matrice identità) e $T(g^{-1}) = T(g)^{-1}$ per ogni $g \in G$. La trasformazione $g \mapsto T(g)_{jk}$ dall'elemento $g \in G$ all'elemento (j, k) della

[12]Nello stesso modo si definisce una rappresentazione $T : G \to \mathcal{L}(H)$, dove H è uno spazio di Hilbert complesso. In tal caso H si dice "carrier space" della T. La rappresentazione T si dice "faithful" se $\{g \in G : T(g) = I_H\} = \{e\}$.

matrice $T(g)$ si denota T_{kj}. Quindi

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_{11}(g) & \dots & T_{1n}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1}(g) & \dots & T_{nn}(g) \end{pmatrix}.$$

Il *carattere* (inglese: character) della rappresentazione $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$ è la funzione $\chi_T : G \to \mathbb{C}$ definita da

$$\chi_T(g) = \operatorname{Tr} T(g) = \sum_{j=1}^{n} T_{jj}(g).$$

Una rappresentazione $T : g \to GL_n(\mathbb{C})$ si dice *unitaria* se $T(g) \in U(n)$ per ogni $g \in G$, cioè se tutte le matrici $T(g)$ sono unitarie. Il carattere χ_T di una rappresentazione unitaria soddisfa

$$\overline{\chi_T(g)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{T_{jj}(g)} = \sum_{j=1}^{n} [T(g)^*]_{jj} = \sum_{j=1}^{n} T_{jj}(g^{-1}) = \chi_T(g^{-1}), \qquad g \in G.$$

Due rappresentazioni $T_1 : G \to GL_n(\mathbb{C})$ e $T_2 : G \to GL_n(\mathbb{C})$ di G si dicono *equivalenti* se esiste una matrice invertibile S di ordine n tale che

$$T_1(g) = S^{-1} T_2(g) S, \qquad g \in G.$$

Spesso scriviamo

$$T_1 = S^{-1} T_2 S.$$

Per due rappresentazioni equivalenti $T_1, T_2 : G \to GL_n(\mathbb{C})$ vale[13]

$$\chi_{T_1}(g) = \chi_{T_2}(g), \qquad g \in G.$$

La matrice d'equivalenza S tra due rappresentazioni unitarie di G può essere scelta unitaria.

Una rappresentazione $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$ si dice *reducibile* se esiste un sottospazio non banale L di $\mathbb{C}^n$ (cioè $(0) \subsetneqq L \subsetneqq \mathbb{C}^n$) tale che $T(g)[L] \subset L$ per ogni $g \in G$. Ciò vuol dire che esiste una matrice invertibile S tale che

$$S^{-1} T(g) S = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ \mathbf{0}_{l \times k} & B(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G, \tag{VI.10}$$

dove $A(g)$, $B(g)$ e $C(g)$ sono matrici $k \times k$, $l \times l$ e $k \times l$ (con $k + l = n$); in tal caso $L = S[\mathbb{C}^k \oplus (0)_l]$. Inoltre, $A : G \to GL_k(\mathbb{C})$ e $B : G \to GL_l(\mathbb{C})$ sono rappresentazioni di G. La rappresentazione $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$ si dice *irreducibile* se non è reducibile.

[13] Per una matrice $B = (b_{jk})_{j,k]1}^n$ di ordine n si ha $\operatorname{Tr} B = \sum_{j=1}^n b_{jj}$. Per ogni matrice invertibile S si ha $\operatorname{Tr}(S^{-1}BS) = \operatorname{Tr} B$, mentre la traccia è un funzionale lineare nello spazio vettoriale delle matrici $n \times n$.

Esempio VI.13 Se

$$G = \left\{ \Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

e l'immersione $G \mapsto GL_2(\mathbb{C})$ è la rappresentazione, allora $\Psi(t)[\mathbb{C} \oplus (0)] \subset \mathbb{C} \oplus (0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi la rappresentazione è reducibile. Purtroppo non esiste un sottospazio lineare L di $\mathbb{C}^2$ tale che $[\mathbb{C} \oplus (0)] \oplus L = \mathbb{C}^2$ e $\Phi(t)[L] \subset L$.

Una rappresentazione **unitaria** $T : G \to U(n)$ è reducibile se esistono una equivalenza S (che si può scegliere unitaria) e due rappresentazione $T_1 : G \to U(m)$ e $T_2 : G \to U(k)$ con $1 \leq m, k \leq n-1$ e $m + k = n$ tali che

$$S^{-1}T(g)S = \begin{pmatrix} T_1(g) & \mathbf{0}_{m\times k} \\ \mathbf{0}_{k\times m} & T_2(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G, \tag{VI.11}$$

cioè se T è equivalente alla somma diretta $T_1 \oplus T_2$ di due rappresentazioni unitarie non banali di G.[14] In altre parole, T si dice reducibile se esistono un'equivalenza S e due rappresentazioni T_1 e T_2, di dimensioni m, k con $1 \leq m, k \leq n-1$ e $m + k = n$, tali che

$$S^{-1}TS = T_1 \oplus T_2.$$

Proposizione VI.14 [15] *Sia G un gruppo finito e T una rappresentazione di G di dimensione n. Allora T è equivalente ad una rappresentazione unitaria di G.*

Dimostrazione. Sia

$$H = \sum_{g\in G} T(g)T(g)^*.$$

Allora H è una matrice $n \times n$ autoaggiunta senza autovalori negativi. Quindi esistono una matrice unitaria U e una matrice diagonale D tali che

$$U^{-1}HU = D.$$

Ovviamente il diagonale di D consiste negli autovalori (non negativi) di H. Ponendo $T'(g) = U^{-1}T(g)U$ otteniamo

$$D = \sum_{g\in G} T'(g)T'(g)^*.$$

[14] In molti libri di carattere fisico-matematico la reducibilità di una rappresentazione viene definita in questo modo.

[15] La proposizione rimane valida se G è un gruppo compatto di Lie, per esempio se G è uno dei gruppi $SO(n)$, $O(n)$, $SU(n)$ e $U(n)$.

Dunque

$$
\begin{aligned}
d_k \stackrel{\text{def}}{=} D_{kk} &= \sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n} T'_{kj}(g)\overline{T'_{kj}(g)} \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{n} |T_{kj}(g)|^2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

mentre $d_k = 0$ implicherebbe $T'_{kj}(g) = 0$ per ogni j e ogni $g \in G$ e quindi che la riga k-esima della matrice $T'(g)$ si annulla per ogni $g \in G$. Siccome $T'(g)$ deve essere invertibile, si ha $d_k > 0$ per $k = 1, \ldots, n$. Sia adesso $D^{1/2}$ la matrice diagonale con elementi diagonali $\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}$. Ponendo $V = UD^{1/2}$ risulta

$$
\Gamma(g) \stackrel{\text{def}}{=} V^{-1}T(g)V = D^{-1/2}U^{-1}T(g)UD^{1/2} = D^{-1/2}T'(g)D^{1/2}.
$$

D'altra parte,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(g)\Gamma(g)^* &= [D^{-1/2}T'(g)D^{1/2}][D^{1/2}T'(g)^*D^{-1/2}] \\
&= D^{-1/2}T'(g)DT'(g)^*D^{-1/2} \\
&= D^{-1/2}T'(g)\sum_{h\in G} T'(h)T'(h)^*T'(g)^*D^{-1/2} \\
&= D^{-1/2}\sum_{h\in G} T'(gh)T'(gh)^*D^{-1/2} \\
&= D^{-1/2}DD^{-1/2} = I_n,
\end{aligned}
$$

essendo I_n la matrice identità di ordine n. Quindi $\Gamma(g)$ è una matrice unitaria di ordine n e

$$
\Gamma(g) = V^{-1}T(g)V, \qquad g \in G,
$$

per un'opportuna matrice invertibile V. Di conseguenza, Γ è una rappresentazione unitaria di G equivalente alla rappresentazione T. □

È ora chiaro che ogni rappresentazione $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$ di un gruppo finito è equivalente ad una somma diretta di un numero finito di rappresentazioni unitarie irreducibili.[16]

Discutiamo ora due lemmi, i cosiddetti *Lemmi di Schur*, fondamentali per dimostrare il teorema di ortogonalità.

[16] Ogni rappresentazione $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$ è equivalente ad una somma diretta di un numero finito o infinito numerabile di rappresentazioni unitarie irreducibili se G è un gruppo compatto di Lie. Un tale risultato vale in particolare per i gruppi compatti $SU(n)$, $U(n)$, $SO(n)$ e $O(n)$.

Lemma VI.15 (Lemma di Schur N.1) *Una matrice che commuta con tutte le matrici di una rappresentazione irreducibile di un gruppo G è un multiplo scalare della matrice identità.*

Dimostrazione. Sia $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$ una rappresentazione irreducibile di G e sia P una matrice $n \times n$ tale che $T(g)P = PT(g)$ per ogni $g \in G$. Potremmo trovare un'equivalenza S con una rappresentazione unitaria irreducibile T', $S^{-1}T(g)S = T'(g)$ per ogni $g \in G$, e definire $P' = S^{-1}PS$. Se riuscissimo a dimostrare il lemma per T' unitaria irreducibile e P', allora P' sarebbe un multiplo della matrice identità e quindi anche $P = SP'S^{-1}$. Di conseguenza, basta dimostrare il lemma se T è una rappresentazione unitaria e irreducibile e $PT(g) = T(g)P$ per ogni $g \in G$.

Consideriamo prima una matrice hermitiana H tale che $HT(g) = T(g)H$ per ogni $g \in G$. Allora esistono una matrice unitaria U e una matrice diagonale reale D tali che $U^{-1}HU = D$; $D = \operatorname{diag}(d_k)_{k=1}^n$, $d_1 \leq \ldots \leq d_n$. Allora $T'(g) = U^{-1}T(g)U$ per $g \in G$ definisce una rappresentazione unitaria e irreducibile di G che commuta con la matrice diagonale D. Raggruppiamo gli elementi d_k di D nel seguente modo:

$$D = \operatorname{diag}(c_1 I_{n_1}, \ldots, c_m I_{n_m}), \quad c_1 < \ldots < c_m, \quad n_1 + \ldots + n_m = n.$$

Raggruppando gli elementi di $T'(g)$ per $g \in G$ nello stesso modo,

$$T'(g) = (\mathbb{T}_{jk}(g))_{j,k=1}^m,$$

dove $\mathbb{T}_{jk}(g)$ è una matrice $n_j \times n_k$, risulterà dall'identità $DT'(g) = T'(g)D$:

$$c_j \mathbb{T}_{jk}(g) = c_k \mathbb{T}_{jk}(g), \quad j, k = 1, \ldots, m.$$

Per $j \neq k$ il fatto che $c_j \neq c_k$ implica che la matrice $\mathbb{T}_{jk}(g) = 0$ per ogni $g \in G$. Di conseguenza,

$$U^{-1}T(g)U = T'(g) = \mathbb{T}_{11}(g) \oplus \ldots \oplus \mathbb{T}_{mm}(g), \qquad g \in G.$$

L'irreducibilità di T implica che $m = 1$ e $D = c_1 I_n$.

Ora consideriamo una matrice P tale che $PT(g) = T(g)P$ per ogni $g \in G$, essendo $T : G \to U(n)$ una rappresentazione unitaria irreducibile di G. Allora $P^*T(g)^* = T(g)^*P^*$ per ogni $g \in G$ e quindi

$$P^*T(g) = P^*T(g^{-1})^* = T(g^{-1})^*P^* = T(g)P^*, \qquad g \in G.$$

Quindi anche P^* commuta con tutte le matrici $T(g)$. Definendo le matrici hermitiane $H_1 = [P + P^*]/2$ e $H_2 = [P - P^*]/2i$, è chiaro che H_1 e H_2 commutano con tutte le matrici $T(g)$. Quindi esistono costanti reali c_1, c_2 tali che $H_1 = c_1 I_n$ e $H_2 = c_2 I_n$. Di conseguenza, $P = H_1 + iH_2 = (c_1 + ic_2)I_n$. $\square$

Esempio VI.16 Siano G il gruppo dell'esempio VI.13 e la sua immersione in $GL_2(\mathbb{C})$ la rappresentazione. Allora le matrici che commutano con tutte le matrici $\Psi(t)$ sono esattamente le matrici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

dove $a, b \in \mathbb{C}$. Quindi la rappresentazione $G \mapsto GL_2(\mathbb{C})$ non soddisfa alle conclusioni del Lemma VI.16. È purtroppo reducibile.

Ora sia $G = SO(2)$, dove l'immersione di $SO(2)$ in $GL_2(\mathbb{C})$ è la rappresentazione. Siccome

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

la rappresentazione non può essere irreducibile. Infatti,

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Lemma VI.17 (Lemma di Schur N.2) *Siano $T_1 : G \to GL_n(\mathbb{C})$ e $T_2 : G \to GL_m(\mathbb{C})$ due rappresentazioni irreducibili e M una matrice $n \times m$ tali che*

$$T_1(g)M = MT_2(g), \qquad g \in G. \tag{VI.12}$$

Allora $M = \mathbf{0}_{n\times m}$, oppure $n = m$ e le due rappresentazioni sono equivalenti.

Dimostrazione. Di nuovo, potremmo prendere due rappresentazioni unitarie. In tal caso $T_s(g^{-1}) = T_s(g)^{-1} = T_s(g)^*$ per $s = 1, 2$ e $g \in G$.

Dalla (VI.12) segue subito

$$M^*T_1(g)^* = T_2(g)^*M^*, \qquad g \in G,$$

e dunque

$$M^*T_1(g) = M^*T_1(g^{-1})^* = T_2(g^{-1})^*M^* = T_2(g)M^*, \qquad g \in G.$$

Di conseguenza,

$$M^*MT_2(g) \overset{\text{(VI.12)}}{=} M^*T_1(g)M = T_2(g)M^*M, \quad g \in G.$$

Dall'irreducibilità della rappresentazione T_2 segue che $M^*M = cI_m$ per un'opportuna costante c.

Se $c \neq 0$, ne segue l'invertibilità della M: $n = m$, $M^{-1} = c^{-1}M^*$. Al contrario, se $c = 0$, risulta per l'elemento (j, j) di M^*M:

$$0 = [M^*M]_{jj} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M_{kj}} M_{kj} = \sum_{j=1}^{n} |M_{kj}|^2,$$

implicando $M_{kj} = 0$ per tutti i pedici k, j. Quindi $M = 0$. □

Corollario VI.18 *Le rappresentazioni irreducibili di uno gruppo abeliano sono tutte unidimensionali.*

Per due rappresentazioni $T_1 : G \to GL_n(\mathbb{C})$ e $T_2 : G \to GL_m(\mathbb{C})$ di G irreducibili **non equivalenti** e una matrice X di tipo $n \times m$ si definisce

$$M = \sum_{g \in G} T_1(g) X T_2(g^{-1}).$$

Allora per ogni $h \in G$ si ha

$$\begin{aligned} T_1(h)M &= T_1(h) \sum_{g \in G} T_1(g) X T_2(g^{-1}) \\ &= \sum_{g \in G} T_1(hg) X T_2(g^{-1}h^{-1}) T_2(h) \\ &= \sum_{g \in G} T_1(hg) X T_2((hg)^{-1}) T_2(h) \\ &= \sum_{l \in G} T_1(l) X T_2(l^{-1}) T_2(h) = M T_2(h). \end{aligned}$$

Dal Lemma VI.17 segue $M = 0$. Specializzando il risultato $M = 0$ per l'elemento (j, k) segue

$$\sum_{g \in G} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} [T_1]_{jp}(g) X_{pq} [T_2]_{qk}(g^{-1}) = 0. \tag{VI.13}$$

Prendendo una matrice X per cui tutti gli elementi tranne uno si annullano si ottiene dalla (VI.13)

$$\sum_{g \in G} [T_1]_{jp}(g) [T_2]_{qk}(g^{-1}) = 0. \tag{VI.14}$$

Di conseguenza, se T_1 e T_2 sono due rappresentazioni unitarie irreducibili e non equivalenti del gruppo G, allora risulta l'ortogonalità

$$\sum_{g \in G} [T_1]_{jp}(g) \overline{[T_2]_{kq}(g)} = 0. \tag{VI.15}$$

Consideriamo ora un'unica rappresentazione unitaria e irreducibile $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$. Sia

$$N = \sum_{g \in G} T(g) X T(g^{-1}) = \sum_{g \in G} T(g) X T(g)^{-1} \tag{VI.16}$$

per un'opportuna matrice X di ordine n. Allora per ogni $h \in G$ si ha $T(h)N = NT(h)$ e quindi $N = cI_n$ per un'opportuna costante c. Quindi

$$cn = \mathrm{Tr}\, N = \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}\, \left(T(g)XT(g)^{-1}\right) = \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}\,(X) = (\#G)\mathrm{Tr}\, X,$$

dove $\#G$ è l'ordine (il numero degli elementi) di G. Di conseguenza,

$$\sum_{g \in G} T(g)XT(g^{-1}) = \frac{(\#G)\mathrm{Tr}\, X}{n}. \tag{VI.17}$$

Dalla (VI.17) segue subito il **Teorema di Ortogonalità**

$$\sum_{g \in G} T_{kj}(g)\overline{T_{kl}(g)} = \delta_{jl}\frac{\#G}{n} \tag{VI.18}$$

per una rappresentazione unitaria e irreducibile qualsiasi di G.

Dalla (VI.14) (specificata per $j = p$ e $q = k$) segue l'ortogonalità dei caratteri:

$$\sum_{g \in G} \chi_{T_1}(g)\chi_{T_2}(g^{-1}) = 0$$

se T_1, T_2 sono due rappresentazioni irreducibili non equivalenti. Per una rappresentazione irreducibile $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$ abbiamo[17] il **criterio di irreducibilità**

$$\sum_{g \in G} \chi_T(g)\chi_T(g^{-1}) = \#G. \tag{VI.19}$$

Le ultime due equazioni si possono scrivere nella forma

$$\sum_{g \in G} \chi_{T_1}(g)\overline{\chi_{T_2}(g)} = 0 \tag{VI.20}$$

se T_1, T_2 sono due rappresentazioni unitarie irreducibili non equivalenti, e

$$\sum_{g \in G} |\chi_T(g)|^2 = \#G \tag{VI.21}$$

se T è una rappresentazione unitaria irreducibile. Le (VI.20)-(VI.21) costituiscono il **Teorema di Ortogonalità per i Caratteri**.

[17] Si utilizzi la (VI.16) per $X_{ij} = \delta_{ip}\delta_{jq}$ con N un multiplo della matrice identità e si sommi rispetto a p, q.

Per spiegare poichè la (VI.18) è stata nominata criterio di irreducibilità, consideriamo una rappresentazione unitaria $T : G \to GL_n(\mathbb{C})$ scritta nella forma

$$T(g) = \underbrace{T_1(g) \oplus \ldots \oplus T_1(g)}_{m_1 \text{ copie}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{T_\rho(g) \oplus \ldots \oplus T_\rho(g)}_{m_\rho \text{ copie}},$$

dove $T_1, \ldots, T_\rho$ sono rappresentazioni unitarie irreducibili diverse. Grazie all'ortogonalità dei caratteri (VI.20)-(VI.21) risulta

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G} |\chi_T(g)|^2 &= \sum_{g\in G} \chi_T(g)\overline{\chi_T(g)} = \sum_{g\in G} \left(\sum_{s=1}^{\rho} m_s \chi_{T_s}(g)\right)\left(\sum_{r=1}^{\rho} m_r \overline{\chi_{T_r}(g)}\right) \\ &= \sum_{s,r=1}^{\rho} m_s m_r \underbrace{\sum_{g\in G} \chi_{T_s}(g)\overline{\chi_{T_r}(g)}}_{\delta_{s,r}\#G,\ \text{cf. (VI.20)}-\text{(VI.21)}} = (\#G)\sum_{s=1}^{\rho} m_s^2,\end{aligned}$$

la quale coincide con la (VI.21) soltanto nel caso di irreducibilità.

Esempio VI.19 Sia H un operatore Hamiltoniano autoaggiunto sullo spazio di Hilbert complesso $L^2(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $g \in SO(n)$ definiamo la trasformazione unitaria $U_g : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ da $(T_g\psi)(x) = \psi(g^{-1}x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$. In tal caso, per $g, h \in SO(n)$ abbiamo

$$(T_g T_h \psi)(x) = (T_h\psi)(g^{-1}x) = \psi(h^{-1}g^{-1}x) = \psi((gh)^{-1}x) = (T_{gh}\psi)(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

implicando che $g \mapsto T_g$ è un omomorfismo da $SO(n)$ al gruppo degli operatori lineari unitari su $L^2(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo ora che

$$HT_g = T_g H, \qquad g \in SO(n).$$

Allora: Se $H\psi = E\psi$ per una costante E, allora per ogni $g \in SO(n)$

$$HT_g\psi = T_g H\psi = T_g(E\psi) = ET_g\psi;$$

quindi $T_g\psi$ è autovettore di H allo stesso autovalore E. Se l'autospazio $M_E = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) : H\psi = E\psi\}$ ha dimensione finita ℓ, allora, per ogni $g \in SO(n)$, T_g induce una trasformazione lineare unitaria nello spazio ℓ-dimensionale M_E. Rispetto ad una base ortonormale di M_E, T_g induce una rappresentazione unitaria di dimensione ℓ in M_E.

Considerando $H = -\Delta + V$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ per un potenziale reale V con simmetria sferica per $n \geq 2$, si ha $HT_g = T_g H$ per ogni $g \in SO(n)$. D'altra parte,

$$H = -\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + V(r) - \frac{1}{r^2}L_B,$$

dove l'operatore di Beltrami L_B agisce nello spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$ e soddisfa $L_B Y_l^m = l(l+n-2)Y_l^m$ $(l = 0, 1, 2, \ldots,\ m = 0, 1, \ldots, \ell(l) - 1)$.[18] Considerando ora

$$H_l = -\frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+n-2)}{r^2} + V(r)$$

nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; r^{\frac{n-1}{2}}\, dr)$, si vede che per ogni autovalore E di H_l abbiamo un autovalore E di H il cui autospazio contiene le funzioni $\psi_l^m = \rho(r) Y_l^m$ $(m = 0, 1, \ldots, \ell(l) - 1)$ per $H_l \rho = E\rho$. Applicando $g \in SO(n)$ si ha

$$(T_g \psi_l^m)(r, \omega) = \rho(r) Y_l^m(g^{-1}\omega) = \rho(r) \sum_{\mu=0}^{\ell(l)-1} c_{m,\mu}(g) Y_l^m(\omega),\ \omega \in S^{n-1}.$$

Scegliendo le funzioni Y_l^m ortonormali in $L^2(S^{n-1})$, si vede facilmente che $g \mapsto (c_{m,\mu}(g))_{m,\mu=0}^{\ell(l)-1}$ è una rappresentazione $\ell(l)$-dimensionale unitaria di $SO(n)$.

[18] Si ha $\ell(l) = 2 - \delta_{l,0}$ per $n = 2$ e $\ell(l) = 2l + 1$ per $n = 3$.

Appendice A

LA FUNZIONE GAMMA

La funzione Gamma è definita dall'integrale generalizzato assolutamente convergente

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = 2\int_0^\infty \rho^{2z-1} e^{-\rho^2}\, d\rho,} \qquad \operatorname{Re} z > 0, \tag{A.1}$$

dove la convergenza assoluta segue spezzando l'intervallo di integrazione in due, in $(0,1)$ ed in $(1,+\infty)$. Infatti $|e^{-t}\, t^{z-1}| \le t^{\operatorname{Re} z-1}$ per $t \in (0,1)$ e $t^\alpha |e^{-t}\, t^{z-1}| \to 0$ se $t \to +\infty$ per ogni $\alpha > 1$. La funzione Γ è analitica nel semipiano destro $\operatorname{Re} z > 0$.

Dopo un'integrazione per parti si ottiene facilmente

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),} \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{A.2}$$

Si ha $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$. Utilizzando la (A.2) risulta

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!,} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{A.3}$$

Un altro valore particolare della funzione Gamma è quello per $z = 1/2$. Si ha

$$\boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}.}$$

Utilizzando la (A.2) si ottiene

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{A.4}$$

L'identità (A.2) può essere utilizzata per definire la funzione Gamma altrove. Prima si definisca la funzione Gamma nella striscia $-1 < \operatorname{Re} z \le 0$

da $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$, poi nella striscia $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$, ecc. Siccome il denominatore nell'uguaglianza $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ si annulla per $z = 0$, risulta una funzione meromorfa con poli semplici nei punti $0, -1, -2, \ldots$. Il residue nel polo a $z = 0$ é $\lim_{z\to 0} z\Gamma(z) = \lim_{z\to 0} \Gamma(z+1) = \Gamma(1) = 1$, mentre quello a $-n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ è il seguente

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -n} (z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z\to -n} (z+n)\frac{\Gamma(z+1)}{z} = \ldots \\
&= \lim_{z\to -n} (z+n)\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \\
&= \lim_{z\to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)^n\,(n!)} = \frac{(-1)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Ha qualche importanza la *funzione beta di Eulero*:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,d\theta, \tag{A.5}$$

dove $\operatorname{Re} p > 0$ e $\operatorname{Re} q > 0$. È abbastanza semplice dimostrare che

$$\boxed{B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},} \qquad \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0. \tag{A.6}$$

Infatti, per p, q tali che $\min(\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q) > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_0^\infty \int_0^\infty t^{2p-1}s^{2q-1}e^{-(t^2+s^2)}\,dt\,ds \\
&= 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \rho^{2(p+q-1)}e^{-\rho^2}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta\,d\rho \\
&= \underbrace{2\int_0^\infty \rho^{2(p+q-1)}e^{-\rho^2}\,d\rho}_{\Gamma(p+q)}\ \underbrace{2\int_0^\pi 2(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta}_{t=\cos^2\theta,\ 1-t=\sin^2\theta,\ dt=-2\cos\theta\sin\theta\,d\theta} \\
&= \Gamma(p+q)B(p,q).
\end{aligned}$$

dove al passaggio dalla prima alla seconda riga abbiamo sostituito $t = \rho\cos\theta$ e $s = \rho\sin\theta$.

Discutiamo ora una caratterizzazione potente della funzione Gamma.

Teorema A.1 (Bohr-Mollerup) *Sia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione a valori positivi con le seguenti proprietà:*

(*a*) $\log f(x)$ *è una funzione convessa;*

(*b*) $f(x+1) = x\,f(x)$ *per ogni* $x > 0$*;*

(*c*) $f(1) = 1$.

Allora $f(x) = \Gamma(x)$ *per ogni* $x > 0$.

Dimostrazione. Sia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione a valori positivi che ha le proprietà (a)-(c). Allora la proprietà (b) implica l'identità

$$f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x), \qquad x > 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{A.7}$$

Per $x \in (0,1]$ e $n \geq 2$ si ottiene dalla convessità[1] della funzione f

$$\frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{(n-1)-n} \leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n)-n} \leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1)-n}.$$

Siccome $f(m) = (m-1)!$ per $m \in \mathbb{N}$ (vedi la (b) e la (c)), risulta per $0 < x \leq 1$

$$\log(n-1)! - \log(n-2)! \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leq \log n! - \log(n-1)!,$$

oppure

$$x\,\log(n-1) \leq \log f(x+n) - \log(n-1)! \leq \log n, \qquad 0 < x \leq 1,$$

oppure

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x(n-1)!$$

Applicando la (A.7) risulta per $0 < x \leq 1$

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{x^x(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n)}\left[\frac{x+n}{n}\right].$$

Siccome $\lim_{n\to\infty}[\frac{x+n}{n}] = 1$ per $x \in [0,1]$, si ha

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}. \tag{A.8}$$

Dalla (A.1) si trova facilmente

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt,$$

mentre n integrazioni per parti ci danno l'identità

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt = \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Quindi le ultime due equazioni e la (A.8) implicano che $f(x) = \Gamma(x)$ per ogni $x > 0$. □

[1] La convessità della $g = \log f$ implica che il rapporto $\frac{g(n+1)-g(y)}{(n+1)-y}$ cresce se y cresce da $n-1$ a $n+1$.

Il teorema A.1 può essere applicato per dimostrare la seguente rappresentazione prodotto

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \tag{A.9}$$

dove γ è la cosiddetta *costante di Eulero* tale che $\Gamma(1) = 1$. Sostituendo $z = 1$ si trova

$$e^{\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n},$$

oppure

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1} e^{1/k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log(n+1)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \log n\right].
\end{aligned}$$

Tornando alla (A.9) abbiamo

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k\, e^{z/k}}{z+k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\gamma z}\, n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} \exp\left(z\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z}}{z(z+1)\ldots(z+n)}.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che la funzione $\Gamma(z)$ definita dal prodotto infinito (A.9) coincide con la funzione gamma introdotta prima.

Per $0 < \operatorname{Re} z < 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+z}\, e^{z/k} \cdot \frac{e^{-\gamma(1-z)}}{1-z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1-z}\, e^{(1-z)/k} \\
&= \frac{e^{-\gamma}}{z(1-z)} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+z)(k+1-z)}\, e^{1/k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\gamma}}{z(n+1-z)} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+z)(k-z)}\, e^{1/k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+z)(k-z)} = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+z)(k-z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},
\end{aligned}
$$

secondo la rappresentazione prodotto della funzione $\sin(\pi z)$. Quindi

$$
\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},} \tag{A.10}
$$

valida per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ per l'unicità delle estensioni analitiche.

Appendice B

ANALISI FUNZIONALE

In questo capitolo si introducono gli spazi di Banach e di Hilbert, gli operatori lineari e loro spettro. Inoltre si discutono gli operatori compatti su uno spazio di Hilbert.

1 Spazi di Banach

Consideriamo noto il concetto di spazio vettoriale X rispetto ad un campo di scalari $\mathbb{F}$ che supponiamo uguale a $\mathbb{R}$ (numeri reali) oppure a $\mathbb{C}$ (numeri complessi). Quindi in X sono state definite l'addizione $X \times X \mapsto X$ e la moltiplicazione scalare $\mathbb{F} \times X \mapsto X$ con le solite proprietà aritmetiche.

Uno *spazio normato* X è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

a. $\|\varphi\| \geq 0$ per ogni $\varphi \in X$; (positività)

b. $\|\varphi\| = 0$ se e solo se $\varphi = 0$; (definitezza)

c. $\|\alpha\varphi\| = |\alpha|\,\|\varphi\|$ per $\alpha \in \mathbb{F}$ e $\varphi \in X$; (omogeneità)

d. $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$. (disuguaglianza triangolare)

Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $|\|\varphi\| - \|\psi\|| \leq \|\varphi - \psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$.

Per *distanza* tra φ e ψ si intende la $\|\varphi - \psi\|$.

Una successione $\{\varphi_n\|_{n=1}^{\infty}$ di elementi di X è detta *convergente* al vettore $\varphi \in X$ se $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, ossia se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di uno spazio normato X si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$

per $n, m > n(\varepsilon)$, ossia se $\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$. La norma in X si dice *completa* se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X. Uno spazio normato con norma completa si dice *spazio di Banach*.

Siano X e Y due spazi normati, $U \subset X$ e $f : U \to Y$. Allora f si dice *continua* in $\psi \in U$ se $\{f(\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(\varphi)$ in Y per ogni successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in U che converge a φ. La funzione f si dice continua se è continua in ogni punto $\varphi \in U$.

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Banach, trascurando la dimostrazione della completezza della norma.

1. Per ogni sottoinsieme chiuso e limitato Ω di $\mathbb{R}^n$, sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue in Ω. Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_\infty = \max_{z\in\Omega} |f(x)|,$$

introduce una norma completa in $C(\Omega)$. Si verifica che $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ se e solo se $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente in $x \in \Omega$.

2. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2},$$

è una norma completa in $L^2(\Omega)$.

3. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : \ell^2 \to \mathbb{R}$,

$$\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2},$$

è una norma completa in ℓ^2.

4. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^1(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme

di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $\|\cdot\|_1 : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|\, dx,$$

è una norma completa in $L^1(\Omega)$.

Per un elemento φ di uno spazio normato X e $r > 0$, l'insieme

$$B(\varphi; r) = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| < r\}$$

è definito la *sfera aperta* di raggio r e centro φ. Un sottoinsieme U si dice *aperto* se per ogni $\varphi \in X$ esiste $r > 0$ (che dipende da φ) tale che $B(\varphi; r) \subset U$. Dato il sottoinsieme U di X, la *parte interna* U^0 di U è l'insieme aperto più grande di X contenuto in U.

Un sottoinsieme U di X si dice *chiuso* se esso contiene tutti i limiti di tutte le successioni con termini in U e limiti in X. Dato il sottoinsieme U di X, la sua *chiusura* $\overline{U}$ è il sottoinsieme chiuso più piccolo di X che contiene U.

Dato il sottoinsieme U di X, la *frontiera* ∂U di U è l'insieme dei punti di X che possono essere il limite sia di una successione in U sia di una successione in $X \setminus U$. Si dimostra facilmente che

$$\partial U = \overline{U} \cap \overline{(X \setminus U)}.$$

Un sottoinsieme U di X si dice *limitato* se il diametro

$$\mathrm{diam}(U) = \sup\{\|\varphi - \psi\| : \varphi, \psi \in X\}$$

è finito. In tal caso esiste $r > 0$ (con $r > \frac{1}{2}\mathrm{diam}(U)$) tale che $U \subset B(\varphi; r)$ per ogni vettore $\varphi \in X$.

Un sottoinsieme D di X si dice *denso* in X se ogni vettore $\varphi \in X$ è il limite di una successione con termini in D. Uno spazio di Banach si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso finito o infinito numerabile.

2 Spazi di Hilbert

Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso (cioè, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Allora una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{F}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

a. $(\varphi, \varphi) \geq 0$, (positività)

b. $(\varphi, \varphi) = 0$ se e solo se $\varphi = 0$, (definitezza)

c. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$ per ogni $\varphi, \psi \in X$, (simmetria)

d. $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi) + \beta(\psi, \chi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$, (linearità)

è definita *prodotto scalare* (oppure *prodotto interna*, oppure, nel caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *prodotto sesquilineare*). Nella (c) il soprasegno indica il coniugato complesso se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $(\chi, \alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}(\chi, \varphi) + \overline{\beta}(\chi, \psi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$.

Ogni prodotto scalare induce la cosiddetta *norma indotta*

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}.$$

Inoltre vale la *disuguaglianza di Schwartz*[1]

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \quad \text{per } \varphi, \psi \in X,$$

che è un'uguaglianza se e solo se φ e ψ sono proporzionali. La disuguaglianza di Schwartz implica la disuguaglianza triangolare[2]

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|, \qquad \varphi, \psi \in X.$$

Uno spazio vettoriale con prodotto scalare si chiama *spazio pre-Hilbert*. Uno spazio pre-Hilbert con norma indotta completa si dice *spazio di Hilbert*.

Uno spazio di Hilbert soddisfa all'*identità del parallelogramma*

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2\left(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2\right).$$

Vice versa, se la norma di uno spazio di Banach soddisfa all'identità del parallologramma, essa è la norma indotta di uno spazio di Hilbert.

Il prodotto scalare può essere espresso nella norma tramite la cosiddetta *formula di polarizzazione*:

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 + i\|\varphi + i\psi\|^2 - i\|\varphi - i\psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases} \tag{B.1}$$

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Hilbert.

[1]Dim: Sia ξ un numero complesso di modulo 1 tale che $\xi(\varphi, \psi) = |(\varphi, \psi)|$ e sia $\chi = \xi\psi$. In tal caso $\|\chi\| = \|\psi\|$, mentre per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq \|\varphi + t\chi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2t(\varphi, \chi) + t^2\|\chi\|^2$. Quindi il discriminante di questo polinomio reale quadrato è non positivo. Dunque $4|(\varphi, \chi)|^2 - 4\|\varphi\|^2 \, \|\chi\|^2 \leq 0$ e quindi $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\|$.

[2]Dim: $\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\mathrm{Re}(\varphi, \psi) \leq \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\|\varphi\| \, \|\psi\| = (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$.

1. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^n$. Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω, dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate uguali. Allora la funzione $(\cdot,\cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{C}$,

$$(f,g) = \left(\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx \right)^{1/2},$$

è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ che induce la solita norma.

2. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $(\cdot,\cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$,

$$(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \left(\sum_{n=1}^\infty x_n\, \overline{y_n} \right)^{1/2},$$

è un prodotto scalare in ℓ^2 che induce la solita norma.

3 Basi ortonormali in spazi di Hilbert

Consideriamo prima uno spazio vettoriale di dimensione N con prodotto scalare. Tale spazio ha una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ di vettori di lunghezza 1 ortogonali tra loro. Partendo da una base (i.e., un sistema linearmente indipendente massimale) $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ qualsiasi, si può costruire una base ortonormale utilizzando il *processo di Gram-Schmidt*:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\psi_1}{\|\psi_1\|} \\ \varphi_2 = \dfrac{\psi_2 - (\psi_2,\varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2,\varphi_1)\varphi_1\|} \\ \varphi_3 = \dfrac{\psi_3 - (\psi_3,\varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3,\varphi_2)\varphi_2}{\|\psi_3 - (\psi_3,\varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3,\varphi_2)\varphi_2\|} \\ \vdots \\ \varphi_N = \dfrac{\psi_N - (\psi_N,\varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (\psi_N,\varphi_{N-1})\varphi_{N-1}}{\|\psi_N - (\psi_N,\varphi_1)\varphi_1 - \ldots - (\psi_N,\varphi_{N-1})\varphi_{N-1}\|}. \end{cases}$$

È facile controllare induttivamente che φ_j è ortogonale ai vettori $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}$ e ha norma 1 ($j = 1, 2, \ldots, N$).

Appena trovata una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, si ottengono subito le cosiddette *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(\varphi, \varphi_n)|^2 ,$$
$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Consideriamo ora uno spazio di Hilbert **separabile** X a dimensione infinita. Estraendo da un sottoinsieme denso e infinito numerabile D un sistema di vettori linearmente indipendente massimale e applicando il processo di Gram-Schmidt senza fermarsi ad un indice superiore N, si ottiene una base ortonormale **e infinita numerabile** $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. D'altra parte, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di una base ortonormale infinita numerabile di X è denso in X. Concludiamo dunque che uno spazio di Hilbert separabile a dimensione infinita viene caratterizzato dall'esistenza di una base ortonormale infinita numerabile.

Data una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ in X, risultano le *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 ,$$
$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Inoltre, vale lo sviluppo

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \varphi - \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n \right\| = 0.$$

Introducendo la successione crescente di sottospazi

$$E_N = \mathrm{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$$

di dimensione N, si può leggere quest'ultima relazione limite nella seguente maniera: La distanza (ortogonale) tra φ e il sottospazio E_N tende a zero se

$N \to \infty$.[3] Quindi

$$\varphi \mapsto \sum_{n=1}^{N} (\varphi, \lambda_n)\lambda_n$$

definisce la *proiezione ortogonale* di φ in E_N.

Dato lo spazio di Hilbert separabile X con base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, si definisce la trasformazione lineare $U : X \to \ell^2$ da

$$U\varphi = \{(\varphi, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty},$$

ossia $U\varphi$ è la successione dei coefficienti (φ, φ_n) vista come vettore in ℓ^2. Allora, applicando la definizione della norma in ℓ^2,

$$\|U\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 = \|\varphi\|^2,$$

secondo l'identità di Parseval. Si verifica facilmente che U definisce una corrispondenza biunivoca tra X e ℓ^2. Costruendo la U per $X = \ell^2$ e la sua base ortonormale canonica, si vede subito che U coincide con la trasformazione identità in ℓ^2. Concludiamo che, tranne per una trasformazione unitaria della base ortonormale, esiste un singolo spazio di Hilbert separabile.

4 Applicazioni

1. In $X = L^2(-\pi, \pi)$ le funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx,$$

si vede subito che $c_n = (2\pi)^{1/2}(\varphi, \varphi_n)$ per $n \in \mathbb{Z}$. Secondo l'identità di Parseval segue

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

[3] Sia $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi_n$ un vettore arbitrario in E_N e $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \left\|\varphi - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi_n\right\|^2$ la distanza tra φ e E_N al quadrato. Si può dimostrare che il minimo viene assunto per $\lambda_n = (\varphi, \varphi_n)$ $(n = 1, \ldots, N)$.

ossia

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{inx}$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n\,e^{inx}\right|^2dx=0.$$

2. In $X=L^2(-\pi,\pi)$ le funzioni

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \varphi_n^c(x)=\frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},\quad \varphi_n^s(x)=\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}},\qquad n=1,2,3,\dots,$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f\in L^2(-\pi,\pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx, & n=0,1,2,\dots,\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx, & n=1,2,3,\dots,\end{cases}$$

si applichi l'identità di Parseval per trovare l'uguaglianza

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right).$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

nel senso che

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)\right|^2dx=0.$$

5 Operatori lineari

Siano X e Y due spazi di Banach. Un'applicazione $T : X \to Y$ si dice operatore lineare se

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2), \qquad x_1, x_2 \in X,\ \lambda_1, \lambda_2 \in F,$$

dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$. Molto spesso scriviamo Tx invece di $T(x)$. Gli esempi principali degli operatori lineari sono le matrici $n \times m$ (come rappresentazioni degli operatori lineari da F^m in F^n) e gli operatori differenziali lineari. L'immagine di tale T è l'insieme $\operatorname{Im}(T) = \{Tx : x \in X\}$; quest'insieme è un sottospazio lineare di Y. Il kernel di T è il sottospazio lineare di X definito da $\operatorname{Ker} T = \{x \in X : Tx = 0\}$.

5.1 Proprietà generali

Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *invertibile* se è una corrispondenza biunivoca tra X e Y. Un operatore lineare $T : X \to Y$ è invertibile se e solo se $\operatorname{Im} T = Y$ e $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Siano X e Y spazi di Banach. Un operatore lineare $T : X \to Y$ si dice *limitato* se $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$. In tal caso il numero

$$\|T\| = \sup_{x \in X,\ \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

si dice *norma* di T. Se $X = F^n$ (dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) ha dimensione finita, ogni operatore lineare $T : X \to Y$ è limitato.

a. Sia $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonica di F^n. Allora ogni operatore limitato $T : F^n \to Y$ può essere rappresentato come

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T e_i.$$

Se si applica ad una matrice, la norma si chiama *norma spettrale*.[4] Utilizzando questa rappresentazione, si dimostri la limitatezza di T.

b. Siano X, Y, Z tre spazi di Banach e siano $T : X \to Y$ e $S : Y \to Z$ due operatori lineari limitati. Allora $ST : X \to Z$ è un operatore lineare limitato e $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

[4] La norma spettrale di una matrice è uguale al suo numero singolare più grande.

Proposizione B.2 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a. T è un operatore limitato.

b. $T : X \to Y$ è una funzione uniformemente continua.

c. $T : X \to Y$ è una funzione continua.

d. $T : X \to Y$ è continua in 0.

Dimostrazione. [(a)$\Longrightarrow$(b)] Per $x_1, x_2 \in X$ si ha grazie alla limitatezza di T: $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \|T\|\|x_1 - x_2\|$. Quindi, se $\|x_1 - x_2\| < (\varepsilon/\|T\|)$, allora $\|Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon$. Allora T è uniformemente continuo.

[(b)$\Longrightarrow$(c)$\Longrightarrow$(d)] Ovvio.

[(d)$\Longrightarrow$(a)] Sia T continuo in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\|x\| < \delta$ implica $\|Tx\| < 1$. Quindi per qualsiasi $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ha $\|(\delta/2)x\| < \delta$ e dunque $(\delta/2)\|Tx\| = \|T(\delta/2)x\| < 1$. Allora $\|x\| = 1$ implica $\|Tx\| < (2/\delta)$. Di conseguenza T è limitato con norma $\leq (2/\delta)$. □

Consideriamo adesso lo spazio di Banach $\mathcal{L}(X, Y)$ di tutti gli operatori lineari e limitati da X in Y, dove X e Y sono spazi di Banach. Scriviamo $\mathcal{L}(X)$ se $X = Y$. Per $X = F^m$ e $Y = F^n$ (per $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$) lo spazio $\mathcal{L}(X, Y)$ coincide con quello delle matrici $n \times m$.

Teorema B.3 (Teorema dell'Operatore Inverso) *Siano X e Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ invertibile. Allora l'operatore inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Teorema B.4 *Siano $T, S \in \mathcal{L}(X)$, e sia T invertibile. Allora S è invertibile se $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. In particolare, S è invertibile se $\|I - S\| < 1$.*

Dimostrazione. L'equazione $Sx = y$ può essere scritta nella forma equivalente $x = F(x)$, dove

$$F(x) = T^{-1}y + T^{-1}(T - S)x.$$

Siccome

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \|T^{-1}\| \, \|T - S\| \, \|x_1 - x_2\|, \tag{B.2}$$

dove $\|T^{-1}\| \, \|T - S\| < 1$, si può risolvere l'equazione $x = F(x)$ per iterazione, secondo il cosiddetto Teorema delle Contrazioni. Infatti, sia $x_0 \in X$ un vettore

iniziale e poniamo $x_{n+1} = F(x_n)$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Allora

$$\begin{aligned}
\|x_2 - x_1\| &= \|F(x_1) - F(x_0)\| \le \|T^{-1}\|\|T - S\|\|x_1 - x_0\|, \\
\|x_3 - x_2\| &= \|F(x_2) - F(x_1)\| \le \|T^{-1}\|\|T - S\|\|x_2 - x_1\| \\
&\le [\|T^{-1}\|\|T - S\|]^2\|x_1 - x_0\|, \\
\vdots \quad \vdots \qquad & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\|x_{n+1} - x_n\| &= \|F(x_n) - F(x_{n-1})\| \le \|T^{-1}\|\|T - S\|\|x_n - x_{n-1}\| \\
&\le [\|T^{-1}\|\|T - S\|]^n\|x_1 - x_0\|.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\|x_{n+p} - x_{n+1}\| &\le \sum_{j=0}^{p-1} \|x_{n+j+1} - x_{n+j}\| \le \|x_1 - x_0\| \sum_{j=0}^{p-1} [\|T^{-1}\|\|T - S\|]^{n+j} \\
&\le \|x_1 - x_0\| \sum_{j=0}^{\infty} [\|T^{-1}\|\|T - S\|]^{n+j} \\
&= \|x_1 - x_0\| \frac{[\|T^{-1}\|\|T - S\|]^n}{1 - \|T^{-1}\|\|T - S\|}.
\end{aligned}$$

Quest'ultima espressione tende a zero se $n \to \infty$. Dunque $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in X e quindi ha limite $x \in X$. Utilizzando la continuità della $F : X \to X$ [vedi la (II.2)], otteniamo

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = F(x).$$

L'unicità della soluzione è immediata. □

5.2 Proprietà spettrali

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ consideriamo gli operatori lineari $\lambda - T$ (cioè, $\lambda I_X - T$ scritto male). Studiamo l'invertibilità di $\lambda - T$ al variare di λ.

Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice *autovalore* di T se esiste $0 \neq x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = 0$ (cioè, tale che $Tx = \lambda x$). Il vettore x si chiama un corrispondente *autovettore*. In tal caso $\operatorname{Ker}(\lambda - T) = \{x \in X : (\lambda - T)x = 0\}$ è l'insieme di tutti gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ, più il vettore zero. La definizione generalizza quella per le matrici quadrate. Infatti, come per le matrici quadrate l'esistenza dell'autovettore $0 \neq x \in X$ tale che $Tx = \lambda x$ implica che $\lambda - T$ non è invertibile. Per le matrici quadrate T basta risolvere l'equazione $\det(\lambda - T) = 0$ per trovare tutti gli autovalori di T. Nel caso di uno spazio X a dimensione infinita la situazione è molto più complicata.

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Il numero complesso λ appartiene allo *spettro* di T, $\sigma(T)$, se $\lambda - T$ NON è invertibile. Quindi tutti gli autovalori di T appartengono allo spettro di T. Il numero complesso λ appartiene al *risolvente* di T, $\rho(T)$, se $\lambda - T$ è invertibile. Dunque $\rho(T)$ è il complementare di $\sigma(T)$.

Teorema B.5 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora lo spettro $\sigma(T)$ di T è un sottoinsieme chiuso, limitato e non vuoto di $\mathbb{C}$, mentre il risolvente $\rho(T)$ di T è un aperto.*

Dimostrazione. Se $|\lambda| > \|T\|$, $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ implica l'invertibilità dell'operatore $\lambda - T = \lambda(I_X - \lambda^{-1}T)$. Inoltre

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^j}{\lambda^j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^j}{\lambda^{j+1}}, \tag{B.3}$$

dove la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$. Quindi lo spettro è contenuto nella palla di centro zero e raggio $\|T\|$.

Inoltre, se $\lambda \in \rho(T)$ e $|\mu - \lambda| < \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$, allora $\|(\lambda - T) - (\mu - T)\| < \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$ e quindi $\mu \in \rho(T)$, dove abbiamo applicato il Teorema II.5. Di conseguenza, $\rho(T)$ è aperto e quindi il suo complementare $\sigma(T)$ è chiuso.

Infine, se $\sigma(T) = \emptyset$ e quindi $\rho(T) = \mathbb{C}$, per ogni $x, y \in X$ la funzione $((\lambda - T)^{-1}x, y)$ è analitica nell'intero piano complesso e tende a zero se $|\lambda| \to \infty$.[5] Secondo il Teorema di Liouville,[6] segue che $((\lambda - T)^{-1}x, y) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x, y \in X$. Di conseguenza, $(\lambda - T)^{-1} = 0$, un'impossibilità per un operatore invertibile. Quindi $\sigma(T) \neq \emptyset$. □

Sia $r(T)$, il *raggio spettrale* di T, il minimo di tutti gli r per cui la serie (II.3) è assolutamente convergente per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > r$. Allora $r(T) \leq \|T\|$ e $\sigma(T)$ è contenuto nel disco di centro 0 e raggio $r(T)$. Infatti quel disco è il disco di centro 0 più piccolo che contiene lo spettro di T. Utilizzando l'espressione per il raggio di convergenza di una serie di potenze, troviamo

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. La formula $\mathbb{C} = \sigma(T) \cup \rho(T)$ rappresenta una partizione del piano complesso in due insiemi disgiunti. Adesso discutiamo un'ulteriore suddivisione di $\mathbb{C}$ in quattro insiemi due a due disgiunti.

a. Se $\lambda - T$ è invertibile, $\lambda \in \rho(T)$. Altrimenti, $\lambda \in \sigma(T)$.

[5] In modo implicito abbiamo supposto che X sia uno spazio di Hilbert. La dimostrazione si adatta facilmente al caso di uno spazio di Banach generale.

[6] Una funzione analitica e limitata in tutto il piano complesso è necessariamente costante.

b. Se $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) = \{0\}$, $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare denso in X e $\mathrm{Im}\,(\lambda - T) \neq X$, si ha $\lambda \in \sigma_c(T)$. Tali punti λ appartengono allo *spettro continuo* di T. In tal caso ogni $x \in X$ si può approssimare da vettori $(\lambda - T)z$ per qualche $z \in X$. Purtroppo esistono $x \in X$ tale che l'equazione $(\lambda - T)z = x$ non ha nessuna soluzione $z \in X$.

c. Se $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ è un sottospazio NON denso in X, si ha $\lambda \in \sigma_r(T)$ [lo *spettro residuo* di T].

d. Se $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) \neq \{0\}$, λ è un autovalore di T. L'insieme degli autovalori si scrive come $\sigma_p(T)$ [inglese: point spectrum]. Gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ sono tutti i vettori in $\mathrm{Ker}\,(\lambda - T) \setminus \{0\}$.

Abbiamo ottenuto la partizione

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \underbrace{\sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)}_{\sigma(T)}$$

del piano complesso in quattro insiemi due a due disgiunti.

5.3 Operatori autoaggiunti e unitari

Discutiamo ora gli operatori lineari su uno spazio di Hilbert. Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si definisce l'operator aggiunto T^* dall'uguaglianza

$$(T^*x, y) = (x, Ty), \qquad x, y \in X.$$

Si dimostra facilmente che

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T^*x\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< T^*x, y >| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< x, Ty >| = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \|T\|. \end{aligned}$$

Quindi $T^* \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T^*\| = \|T\|$. Valgono le seguenti proprietà: $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ [$(\lambda T)^* = \lambda T^*$ in uno spazio di Hilbert reale], $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(TS)^* = S^*T^*$, $(T^*)^* = T$.

Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Introduciamo le seguenti classi di operatori lineari:

a. Gli operatori *autoaggiunti*: $T^* = T$.

b. Gli operatori *unitari*: T invertibile e $T^{-1} = T^*$.

In uno spazio di Hilbert *complesso* T un operatore $T \in \mathcal{L}(X)$ è autoaggiunto se e solo se (Tx, x) è un numero reale per ogni $x \in X$.

Teorema B.6 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora*

$$\sigma(T) \subset \{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Dimostrazione. Prima dimostriamo che $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$. Infatti se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $0 \neq x \in X$ è il corrispondente autovettore tale che $Tx = \lambda x$, allora $\lambda\|x\|^2 = \lambda(x, x) = (Tx, x) \in \mathbb{R}$ e dunque $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sia $\lambda \in \sigma_r(T)$. Siccome $\mathrm{Im}\,(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare non denso in X, esiste $0 \neq x \in X$ tale che $((\lambda - T)z, x) = 0$ per ogni $z \in X$. In tal caso ne segue, per $z = x$,

$$\lambda = \frac{(Tx, x)}{(x, x)} \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\sigma_r(T) \subset \mathbb{R}$. Da questo fatto si trova per ogni $z \in X$

$$0 = ((\lambda - T)z, x) = (z, (\overline{\lambda} - T)x),$$

e quindi $(\overline{\lambda} - T)x = 0$ mentre $x \neq 0$. Risulta che $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T)$. Siccome $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, si ha $\lambda \in \sigma_p(T)$. Contraddizione. Ne segue allora che $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Sia $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Allora esiste una successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X tale che $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ e $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$ se $n \to \infty$.[7] Allora la stima $|((\lambda - T)x_n, x_n)| \leq \|(\lambda - T)x_n\|\|x_n\|$ con $\|x_n\| = 1$ implica che

$$\lambda - (Tx_n, x_n) = ((\lambda - T)x_n, x_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{B.4}$$

Siccome $(Tx_n, x_n) \in \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$, ne segue $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$.

Infine, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ e la relazione (II.4) [dove $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$] implicano che lo spettro di T è contenuto nell'intervallo chiuso e limitato più piccolo che contiene l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$. Infatti, sia $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset [m, M]$. Allora

$$m\|x\|^2 \leq (Tx, x) \leq M\|x\|^2, \qquad x \in X.$$

Dunque per ogni $x \in X$

$$\begin{cases} \lambda > M : & (\lambda - M)\|x\|^2 \geq ((\lambda - T)x, x) \geq (\lambda - m)\|x\|^2 \\ \lambda < m : & (m - \lambda)\|x\|^2 \leq ((T - \lambda)x, x) \leq (M - \lambda)\|x\|^2. \end{cases}$$

Di conseguenza, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$, non esiste nessuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ e $\|(\lambda - T)x_n\| \to 0$. Quindi $\sigma(T) \subset [m, M]$. $\square$

[7] Se non esistesse, avremmo $\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon > 0$ per ogni vettore x di norma 1, il che esclude $\lambda \in \sigma_p(T)$ e implica la limitatezza di $(\lambda - T)^{-1}$. Siccome $\sigma_r(T) = \emptyset$ implica che $(\lambda - T)^{-1}$ può essere definito su uno sottospazio denso, la sua definizione si estende a tutto lo spazio X e quindi $\lambda \in \rho(T)$.

Si può infatti dimostrare che per un operatore lineare autoaggiunto l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ è l'intervallo chiuso e limitato reale più piccolo che contiene lo spettro di T. In particolare, gli estremi di quell'intervallo appartengono a $\sigma(T)$. Purtroppo la dimostrazione non è elementare.

Teorema B.7 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora il suo raggio spettrale coincide con la sua norma: $r(T) = \|T\|$.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ autoaggiunto. Allora

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^2x, x) \leq \|T^2x\|\|x\|, \qquad x \in X,$$

dove è stata applicata la disuguaglianza di Schwartz. Passando all'estremo superiore per gli $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ottiene $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ e dunque

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

Questo implica

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite se $n \to \infty$ si trova $r(T) = \|T\|$. □

Passiamo ora agli operatori unitari. Utilizzando la formula di polarizzazione si può dimostrare che un'isometria (cioè, un operatore lineare U su uno spazio di Hilbert X tale che $\|U\varphi\| = \|\varphi\|$ per ogni $\varphi \in X$) ha la proprietà

$$(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \qquad \varphi, \psi \in X,$$

e quindi la proprietà

$$(U^*U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \qquad \varphi, \psi \in X.$$

Quest'ultimo implica che U è un'isometria in X se e solo se $U^*U = I_X$. Nella stessa maniera si vede che un operatore U ha la proprietà che U^* è un'isometria se e solo se $UU^* = I_X$. Conclusione: U è un operatore unitario se e solo se U e U^* sono ambedue isometrie se e solo se U è un'isometria invertibile. Siccome in tal caso anche U^n e $U^{-n} = (U^{-1})^n$ sono isometrie ($n = 1, 2, 3, \ldots$) se U è unitario, risulta

$$\|U^n\| = \|U^{-n}\| = 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Di conseguenza,

$$r(U) = r(U^{-1}) \leq 1,$$

e quindi $\sigma(U) \subset \{z \in C : |z| = 1\}$.

5.4 Operatori autoaggiunti non limitati

Ci vuole una teoria degli operatori lineari autoaggiunti non limitati in uno spazio di Hilbert. Siano H uno spazio di Hilbert complesso e T un operatore lineare con dominio $D(T)$ denso in H. Allora T si dice *hermitiano* [oppure *simmetrico*] se

$$(Tx, y) = (x, Ty), \qquad x, y \in D(T).$$

Per un operatore hermitiano T, definiamo l'operatore T^* da

$$\begin{cases} D(T^*) = \left\{ y \in H : \begin{array}{c} \exists c = c(y) > 0 : \\ |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, \ x \in D(T) \end{array} \right\}, \\ \text{In tal caso } \exists!\, z \in H : (Tx, y) = (x, z); \text{ Poniamo } T^*y = z. \end{cases}$$

Ovviamente,

$$\begin{cases} D(T) \subset D(T^*), \\ T^*x = Tx, \qquad x \in D(T), \end{cases}$$

cioè T^* estende T (scritto: $T \subset T^*$).

Un operatore lineare T si dice *autoaggiunto* se $D(T)$ è denso in H, T è hermitiano e $T^* = T$. Quindi T è autoaggiunto se T è hermitiano e il suo dominio è denso e soddisfa

$$D(T) = \left\{ y \in H : \begin{array}{c} \exists c = c(y) > 0 : \\ |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, \ x \in D(T) \end{array} \right\}.$$

In tal caso l'insieme risolvente $\rho(T)$ di tutti i punti $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui

$$\begin{cases} (\lambda - T)[D(T)] = H, \\ \mathrm{Ker}\,(\lambda - T) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in D(T) : Tx = \lambda x\} = \{0\}, \\ \exists c(\lambda) > 0 : \|(\lambda - T)^{-1}x\| \leq c(\lambda)\|x\| \text{ per } x \in H, \end{cases}$$

contiene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Quindi il suo complementare, lo spettro $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$, è un sottoinsieme chiuso (ma non necessariamente limitato[8]) della retta reale. Inoltre, lo spettro residuo $\sigma_r(T)$ è vuoto.

Non tutti gli operatori simmetrici hanno un'estensione autoaggiunta. Inoltre, se esiste, ne esistono molte. Senza dimostrazione enumciamo il seguente risultato.

Teorema B.8 (Friedrichs) *Sia T un operatore hermitiano in H tale che per un'opportuna costante q*

$$(Tx, x) \geq q\|x\|^2, \qquad x \in D(T).$$

[8] Infatti $\sigma(T)$ è limitato se e solo se $D(T) = H$ se e solo se T è limitato.

Allora esiste un'unica estensione autoaggiunta $\overline{T}$ di T, la cosiddetta estensione di Friedrichs, tale che

$$(\overline{T}x, x) \geq q\|x\|^2, \qquad x \in D(\overline{T}).$$

Sotto le ipotesi del Teorema II.9 potrebbero esistere moltissime estensioni autoaggiunte di T, ma soltanto quella di Friedrichs ha la proprietà di essere limitata inferiormente.

Nei Cap. V e VI discuteremo l'estensione autoaggiunta $\overline{L}$ di un operatore di Sturm-Liouville L. Essendo $q_{\min}$ il minimo del coefficiente $q(x)$ dell'operatore differenziale, quest'operatore L è simmetrico nel senso che $(Lf, g) = (f, Lg)$ per f, g nel dominio $\mathcal{M}_L$ di L e soddisfa $(Lf, f) \geq q_{\min}\|f\|_2^2$ per $f \in \mathcal{M}_L$. In tal caso un'estensione $\overline{L}$ definita in un dominio denso $D(\overline{L})$ tale che $\overline{L}[D(\overline{L}) = L^2(\Omega)$ e $G \stackrel{\text{def}}{=} \overline{L}^{-1}$ è un operatore integrale con nucleo hermitiano continuo $\mathcal{G}(x, y)$, la cosiddetta funzione di Green, tutto quanto sotto l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia autovalore del problema di Sturm-Liouville. Nel caso unidimensionale abbiamo infatti dimostrato tutti i passaggi. L'abbiamo lasciato in sospeso nel caso multidimensionale.

Appendice C

PROPRIETÀ ASINTOTICHE

1 Rappresentazioni integrali delle funzioni di MacDonald

Sia

$$\phi_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)\,dt,$$

dove $z > 0$ e $\nu \in \mathbb{R}$. Allora

$$\phi'_\nu(z) = -\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)\cosh t\,dt,$$

$$\phi''_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)\cosh^2 t\,dt.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}
&z^2\phi''_\nu(z) + z\phi'_\nu(z) - (z^2+\nu^2)\phi_\nu(z) = z^2\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)[\underbrace{\cosh^2 t - 1}_{=\sinh^2 t}]\,dt \\
&- z\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)\cosh t\,dt - \nu^2\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)\,dt \\
&= \left[-ze^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)\sinh t\right]_0^\infty \\
&+ z\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\left\{\nu\sinh(\nu t)\sinh t + \cosh(\nu t)\cosh t\right\}dt \\
&- z\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)\cosh t\,dt - \nu^2\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)\,dt \\
&= \left[-e^{-z\cosh t}\,\nu\sinh(\nu t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-z\cosh t}\,\nu^2\cosh(\nu t)\,dt \\
&- \nu^2\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)\,dt = 0.
\end{aligned}$$

Quindi $\phi_\nu(z)$ è una soluzione dell'equazione di Bessel immaginaria (III.57). Inoltre, siccome $\phi_\nu(z) \to +\infty$ se $z \to 0^+$ (divergenza dell'integrale per $z = 0$) e $\phi_\nu(z) \to 0$ se $z \to +\infty$, esiste una costante positive c_ν tale che $\phi_\nu(z) = c_\nu K_\nu(z)$, la funzione di MacDonald (vedi la (III.56)).

Inoltre, abbiamo

$$\begin{aligned}\sqrt{z}\, e^z \phi_\nu(z) &= \sqrt{z} \int_0^\infty e^{-2z \sinh^2(t/2)} \cosh(\nu t)\, dt \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-2z \sinh^2 \frac{\tau}{2\sqrt{z}}\right) \cosh(\frac{\nu\tau}{2\sqrt{z}})\, d\tau.\end{aligned}$$

Siccome $f(x) = \sinh(x)/x$ è crescente per $x \geq 0$ e $f(0^+) = 1$,[1] si può stimare la funzione sotto il segno dell'ultimo integrale da $e^{-\tau^2/2} \cosh(\nu\tau/\sqrt{z})$ per giustificare l'applicazione del Teorema delle Convergenza Dominata (cioè, lo scambio limite-integrale, vedi l'appendice D), risultando in

$$\lim_{z \to +\infty} \sqrt{z}\, e^z \phi_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-\tau^2/2}\, d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Di conseguenza, $\phi_\nu(z) = K_\nu(z)$:

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t)\, dt, \qquad z > 0,\ \nu \in \mathbb{R}. \tag{C.1}$$

Sostituendo $u = e^{-t}$ nella (B.1) e poi $v = 1/u$ si ottiene per $z > 0$

$$\begin{aligned}K_\nu(z) &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{-\nu} \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{\nu} \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{-\nu} \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-\frac{z}{2}(v+\frac{1}{v})} u^{-\nu} \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{-\nu} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{-\nu-1}\, du.\end{aligned}$$

Utilizzando la definizione della funzione Gamma e cambiando l'ordine di integrazione otteniamo per $z > 0$ e $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}K_\nu(z) &= \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-ux} x^{\nu-\frac{1}{2}}\, dx \right) \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty x^{\nu-\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty e^{-u(x+\frac{z}{2}) - \frac{z}{2u}} \frac{du}{\sqrt{u}} \right) dx.\end{aligned}$$

[1] Si ha $f'(x) = \frac{\cosh(x)}{x^2}(x - \tanh x) = \frac{\cosh(x)}{x^2} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 y}\right) dy > 0$ per $x > 0$.

Sostituendo $w = u\sqrt{(2x+z)/z}$ [dunque: $\frac{du}{\sqrt{u}} = (z/(2x+z))^{1/4}\frac{dw}{\sqrt{w}}$] e ponendo $A = \sqrt{z(2x+z)}$, arriviamo all'integrale doppio

$$K_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\infty x^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{2x+z}\right)^{1/4}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{A}{2}(w+\frac{1}{w})}w^{-1/2}\,dw}_{K_{-1/2}(A)=K_{1/2}(A)=\sqrt{\frac{\pi}{2A}}\,e^{-A}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty x^{\nu-\frac{1}{2}}\frac{e^{-\sqrt{z(2x+z)}}}{2\sqrt{2x+z}}\,dx.$$

Sostituendo $\tau = \sqrt{(2x+z)/z}$, otteniamo le rappresentazioni integrali

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_1^\infty(\tau^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{-\tau z}\,d\tau \tag{C.2}$$

$$\overset{\tau=1+2t}{=} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}(2z)^\nu e^{-z}\int_0^\infty e^{-2zt}t^{\nu-\frac{1}{2}}(t+1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt. \tag{C.3}$$

2 Sviluppo asintotico delle funzioni di Bessel

Introduciamo prima il cosiddetto *simbolo di Hankel*

$$(\alpha,n) \overset{\text{def}}{=} \frac{2^{-2n}}{n!}\{(4\alpha^2-1)(4\alpha^2-3)\dots(4\alpha^2-(2n-1)^2)\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha-n)}, \tag{C.4}$$

mentre $(\alpha,0)=1$. Questo simbolo viene utilizzato per abbreviare gli sviluppi asintotici delle varie funzioni di Bessel se $z\to\infty$ e ν è fisso.

Sostituendo la serie di Taylor

$$(1+t)^\alpha = \sum_{s=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s!\,\Gamma(\Gamma(\alpha+1-s)}t^s, \qquad |t|<1,$$

nella (B.3) e utilizzando la (A.1) risulta lo sviluppo asintotico (per $z\to\infty$)

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\sum_{s=0}^\infty\frac{(\nu,s)}{(2z)^s}, \qquad |\arg z| < \frac{3}{2}\pi. \tag{C.5}$$

Introducendo le funzioni $P(\nu,z)$ e $Q(\nu,z)$ tali che

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\{P(\nu,z)+iQ(\nu,z)\}\,e^{i\chi}, \qquad -\pi<\arg z<2\pi,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\{P(\nu,z)-iQ(\nu,z)\}\,e^{-i\chi}, \qquad -2\pi<\arg z<\pi,$$

dove $\chi = z-(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{4})\pi$, otteniamo dalla (B.5) e dalla seconda equazione (III.51)

$$P(\nu,z) \sim \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(\nu,2s)}{(2z)^{2s}} \sim 1-\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)(4\nu^2-49)}{4!(8z)^4} - \cdots, \tag{C.6a}$$

$$Q(\nu,z) \sim \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(\nu,2s+1)}{(2z)^{2s+1}} \sim \frac{4\nu^2-1}{8z} - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8z)^3} + \cdots. \tag{C.6b}$$

Gli sviluppi asintoti per $J_\nu(z)$ e $Y_\nu(z)$ (per $-\pi < \arg z < \pi$) seguono da

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,[P(\nu,z)\cos\chi - Q(\nu,z)\sin\chi]\,, \tag{C.7a}$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,[P(\nu,z)\sin\chi + Q(\nu,z)\cos\chi]\,, \tag{C.7b}$$

dove abbiamo utilizzato (III.49) e (III.50). Per la funzione di Bessel immaginaria segue dalla prima equazione (III.51)

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(\nu,s)}{(2z)^s}, \qquad |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \tag{C.8}$$

Limitiamoci ai primi termini degli sviluppi asintoti e all'andamento asintotico se $z \to +\infty$. Allora arriviamo alle seguenti espressioni asintotiche (vedi (III.48), (III.52), (III.53), (III.54), (III.55) e (III.56)):

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\cos(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)+O(\frac{1}{z})\right), \qquad z\to+\infty, \tag{C.9a}$$

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\sin(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)+O(\frac{1}{z})\right), \qquad z\to+\infty, \tag{C.9b}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(e^{i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)}+O(\frac{1}{z})\right), \qquad z\to+\infty, \tag{C.9c}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(e^{-i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)}+O(\frac{1}{z})\right), \qquad z\to+\infty, \tag{C.9d}$$

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\,e^z\left(1+O(\frac{1}{z})\right), \qquad z\to+\infty, \tag{C.9e}$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\left(1+O(\frac{1}{z})\right), \qquad z\to+\infty. \tag{C.9f}$$

Appendice D

INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE

L'integrale di Riemann non basta per studiare la fisica matematica, grazie alle sua pessime proprietà di convergenza. D'altra parte, l'integrale di Lebesgue copre tutte le applicazioni di fisica matematica ma non è facile da introdurre in poco tempo. Fortunatamente lo studio degli insiemi di Borel e delle funzioni misurabili secondo Borel ci permette a generalizzare il concetto di integrale abbastanza ma a farlo in tempi ragionevoli.

1 Insiemi di Borel

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è detto *insieme di Borel* se appartiene alla famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ più piccola ottenuta dagli insiemi aperti applicando le seguenti operazioni: 1) unione finita o numerabile, 2) intersezione finita o numerabile, e 3) complementazione [cioè l'operazione $B \mapsto \mathbb{R}^n \setminus B$]. È chiaro che tutti i sottoinsiemi aperti e chiusi di $\mathbb{R}^n$ sono di Borel. Per $n = 1$ gli intervalli $[a, b) = \cap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$ e $(a, b] = \cap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$ sono di Borel.

Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$, dove $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $a_1 < b_1$, ..., $a_n < b_n$. Allora

$$m([a, b)) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$$

è la *misura* del pluriintervallo $[a, b)$. Per un'unione finita o numerabile E di pluriintervalli due a due disgiunti si definisce la sua misura $m(E)$ come la somma delle misure dei pluriintervalli, possibilmente con $m(E) = +\infty$. Allora $m([a, \infty)) = +\infty$, dove $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > a_1, \ldots, x_n > a_n\}$. Siccome tutte le palle $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < \varepsilon\}$ sono unioni numerabili due a due disgiunti di pluriintervalli, anche la misura di $B_\varepsilon(a)$ si può calcolare.

Osservando ora che tutti gli aperti sono unioni finite o numerabili di palle, si può estendere la misura a qualsiasi sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

Sia Σ la cosiddetta σ-algebra degli insiemi di Borel in $\mathbb{R}^n$, dove σ-algebra vuol dire una famiglia di sottoinsiemi chiusa rispetta all'unione finita e numerabile, all'intersezione finita e numerabile e alla complementazione che contiene l'insieme vuoto e $\mathbb{R}^n$ stesso, insieme con la misura di Borel. Questa misura ha le seguenti proprietà:

1. $m(\emptyset) = 0$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$,

2. Se $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Borel due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ è un insieme di Borel e

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

Di conseguenza, se $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente di insiemi di Borel, allora

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n).$$

Purtroppo la σ-algebra degli insiemi di Borel ha la proprietà che non tutti i sottoinsiemi degli insiemi di Borel di misura zero sono di Borel. Per questo motivo la σ-algebra di Borel viene estesa a quella di Lebesgue: Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice *misurabile* (*secondo Lebesgue*) se esiste un insieme di Borel B tale che la cosiddetta differenza simmetrica $A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è un sottoinsieme di un insieme di Borel di misura zero. In tal caso si definisce come la misura $m(A)$ quella dell'insieme di Borel B. Si può dimostrare che gli insiemi misurabili secondo Lebesgue costituiscono una σ-algebra con le seguenti proprietà:

1. $m(\emptyset) = 0$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$,

2. Se $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ è un insieme misurabile e

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

Di conseguenza, se $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente di insiemi misurabili, allora

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n).$$

È molto difficile individuare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ che non è misurabile. Dall'assioma di scelta segue la sua esistenza.[1] Purtroppo esistono altri assiomi della teoria degli insiemi che conducono ad una situazione in cui ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è misurabile.

2 Integrale di Lebesgue

Si dice *funzione semplice* una funzione complessa φ definita in $\mathbb{R}^n$ che ha soltanto un numero finito di valori e per cui tutti gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = c\}$ sono misurabili di misura finita. Essendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ i valori diversi della funzione semplici φ, si ha

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{E_j} = \begin{cases} \lambda_j, & x \in E_j, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_{j=1}^{m} E_j, \end{cases}$$

dove $E_1, \ldots, E_m$ sono insiemi misurabili di misura finita disgiunti due a due e χ_E è la funzione caratteristica di E (cioè, $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$, e $\chi_E(x) = 0$ se $x \notin E$). Come *integrale di Lebesgue* si definisce

$$\int \varphi(x)\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j m(E_j).$$

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice misurable se per ogni insieme di Borel E in $\mathbb{C}$ l'immagine inversa

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in E\}$$

è misurabile. In particolare, le funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sono misurabili.

Le funzioni misurabili hanno le seguenti proprietà:

1. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sono misurabili, allora $f + g$ e $f - g$ sono misurabili.

2. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è misurabile e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora λf è misurabile.

[1] Dim: La relazione $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ è una relazione di equivalenza in $[0, 1)$ che suddivide $[0, 1)$ in classi di equivalenza. Applicando l'Assioma di Scelta, sia E un sottoinsieme di $[0, 1)$ che contiene esattamente un elemento di ogni classe di equivalenza. Allora, per ogni $q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $E_q \stackrel{\text{def}}{=} [(q + E) \cap [0, 1)] \cup [(q - 1 + E) \cap [0, 1)]$ è un sottoinsieme di $[0, 1)$ che contiene esattamente un elemento di ogni classe di equivalenza. Se E fosse misurable, lo sarebbe anche E_q per ogni $q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$. In tal caso la misura di E_q non dipenderebbe da q, mentre $\cup_{q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} E_q = [0, 1)$. Quindi sia l'ipotesi $m(E) = 0$ che quella $m(E) > 0$ condurebbe alla contraddizione che $m([0, 1)) \in \{0, +\infty\}$. Di conseguenza, E non può essere misurabile.

3. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sono misurabili, allora fg è misurabile.

4. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sono misurabili, allora il prodotto di composizione $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è misurabile.

5. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f| = \max(f, -f)$, $f_+ = \max(f, 0)$ e $f_- = \max(-f, 0)$ sono misurabili.

6. Se $f_1, f_2, \ldots$ sono misurabili e $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, allora f è misurabile.

Definiamo ora l'integrale di Lebesgue per le funzioni misurabili non negative. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ misurabile e non negativa. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici non negative $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tali che $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (tranne in un sottoinsieme di misura zero). In tal caso la successione degli integrali di Lebesgue $\int f_n(x)\,dx$ è crescente e il suo limite (che potrebbe essere uguale a $+\infty$) si definisce come l'integrale di Lebesgue della f:

$$\int f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx.$$

Nel seguente teorema i valori degli integrali possono essere uguali a $+\infty$.

Teorema D.1 (Beppo-Levi) *Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione crescente di funzioni misurabili non negative. Sia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Passiamo ora all'integrazione delle funzioni a valori reali. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile. Poniamo $f_\pm = \max(\pm f, 0)$. Allora $f_\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ sono misurabili e non negative e $f_+ - f_- = f$. Poniamo ora

$$\int f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int f_+(x)\,dx - \int f_-(x)\,dx & \text{se ambedue gli integrali sono finiti,} \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x)\,dx = +\infty \text{ e } \int f_-(x)\,dx < +\infty, \\ -\infty & \text{se } \int f_+(x)\,dx < +\infty \text{ e } \int f_-(x)\,dx = +\infty, \\ \text{non esistente} & \text{se } \int f_+(x)\,dx = \int f_-(x)\,dx = +\infty. \end{cases}$$

Inoltre,

$$\int |f(x)|\,dx$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int f_+(x)\,dx + \int f_-(x)\,dx & \text{se ambedue gli integrali sono finiti,} \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x)\,dx = +\infty \text{ e } \int f_-(x)\,dx < +\infty, \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x)\,dx < +\infty \text{ e } \int f_-(x)\,dx = +\infty, \\ \text{non definito} & \text{se } \int f_+(x)\,dx = \int f_-(x)\,dx = +\infty. \end{cases}$$

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *sommabile* se ambedue gli integrali $\int f_\pm(x)\,dx$ sono finiti.

Per definire gli integrali delle funzioni misurabili $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, si osservi prima che $\operatorname{Re} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono misurabili. In tal caso, se sono definiti ambedue gli integrali $\int \operatorname{Re} f(x)\,dx$ e $\int \operatorname{Im} f(x)\,dx$, allora

$$\int f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ si dice sommabile se è finito l'integrale della funzione $|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}$.

L'integrale di Lebesgue ha le seguenti proprietà:

1. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.
2. $\int cf(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$,
3. $|\int f(x)\,dx| \le \int |f(x)|\,dx$.
4. Se $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ ha misura zero, allora $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$.

L'ultima proprietà è di estrema importanza per capire l'integrale di Lebesgue: Il suo valore non si cambia se la funzione viene modificata su un insieme di misura zero. Due funzione f, g come nella proprietà 4 si dicono *quasi uguali*. Oppure: Si dice che $f(x) = g(x)$ *quasi ovunque*.

Infine, se E è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, una funzione $f : E \to \mathbb{C}$ si dice misurabile se la sua estensione $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus E, \end{cases}$$

è misurabile. In tal caso

$$\int_E f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int \tilde{f}(x)\chi_E(x)\,dx,$$

dove $\chi_E(x) = 1$ per $x \in E$ e $\chi_E(x) = 0$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Discutiamo ora il seguente esempio illustrativo.

Esempio D.2 Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Allora la f è continua per $x \geq 0$ e quindi misurabile. Vale l'integrale di Riemann generalizzata

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to+\infty} \int_0^N \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Purtroppo questo integrale non è un integrale di Lebesgue. Infatti,

$$f_+(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & 2(n-1)\pi \leq x \leq (2n-1)\pi, \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sin(x)}{x}, & (2n-1)\pi \leq x \leq 2n\pi, \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \ldots$. Osservando che

$$\int_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} \sin(x)\, dx = -\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \sin(x)\, dx = 1,$$

si vede facilmente che

$$\int f_+(x)\, dx \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)\pi} = +\infty,$$

$$\int f_-(x)\, dx \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n\pi} = +\infty.$$

Quindi $\int f(x)\, dx$ non esiste nel senso di Lebesgue.

3 Alcuni Teoremi Importanti

Il seguente risultato riguarda lo scambio tra limite e integrazione.

Teorema D.3 (della convergenza dominata, di Lebesgue) *Sia* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *una successione di funzioni misurabili tali che*

a. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *per quasi ogni* x*,*

b. per $n = 1, 2, 3, \ldots$ si ha $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi ogni x, dove g è sommabile.

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx = \int f(x)\, dx.$$

La seconda condizione è assolutamente necessaria.

Esempio D.4 Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = 1.$$

Ponendo $f_n(x) = \phi(x - n)$, si vede facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int f_n(x)\, dx}_{\text{sempre uguale ad } 1} = 1, \qquad \int \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{\text{uguale a } 0 \text{ q.o.}}\, dx = 0.$$

Dunque non è consentita l'applicazione del Teorema della Convergenza Dominata.

Esempio D.5 Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\phi(0) > 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x\phi(x) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = 1.$$

Ponendo $f_n(x) = n\phi(nx)$, si vede subito che $f_n(x) \to 0$ per $x \neq 0$ e $f_n(0) \to +\infty$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int f_n(x)\, dx}_{\text{sempre uguale ad } 1} = 1, \qquad \int \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{\text{uguale a } 0 \text{ q.o.}}\, dx = 0.$$

Dunque non è consentita l'applicazione del Teorema della Convergenza Dominata.

Il Teorema della Convergenza Dominata è fondamentale e ha molti corollari di importanza. Per esempio, sia $f(\cdot, \xi) : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile che depende in modo continuo dal parametro $\xi \in \Omega$. Allora $\int f(x, \xi)\, dx$ depende in modo continuo da $\xi \in \Omega$ **se esiste una funzione sommabile** $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ **tale che** $|f(x, \xi)| \leq g(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\xi \in \Omega$. Infatti, scegliendo $\eta \in \Omega$, basterebbe considerare una successione in $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ in Ω convergente ad η e la successione di funzioni $f_n(x) = f(x, \eta_n)$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ per dimostrare il corollario.

L'ultimo risultato riguarda il cambio dell'ordine di integrazione.

Teorema D.6 (Fubini) *Sia* $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{C}$*, scritta come funzione di* $z = (x, y)$ *con* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $y \in \mathbb{R}^m$ *e* $z \in \mathbb{R}^{n+m}$*, misurabile e non negativa, oppure sommabile. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\, dx \right) dy. \quad \text{(D.1)}$$

In particolare, la (E.1) *vale nei seguenti casi:*

1. *almeno uno degli integrali* $\int\int |f(x, y)|\, dy\, dx$ *e* $\int\int |f(x, y)|\, dx\, dy$ *è finito.*
2. *La* f *è non negativa quasi ovunque.*

Bibliografia

[1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., New York, 1964.

[2] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, San Diego etc., 2001.

[3] G. Barton, *Elements of Green's Functions and Propagation*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1989.

[4] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Vol. I, Springer, Berlin, 1967.

[5] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Vol. II, Springer, Berlin, 1967.

[6] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Corrected and Enlarged Edition, Academic Press, New York, 1980.

[7] S. Hassani, *Mathematical Physics. A Modern Introduction to its Foundations*, Third ed., Springer, New York, 2002.

[8] H.F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, Adam Hilger, Inst. Phys. Publ., 1990.

[9] N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover Publ., New York, 1965.

[10] A.I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vols. 1-3, Chelsea Publ., New York, 1965.

[11] R.G. Newton, *Scattering of Waves and Particles*, Springer, New York, 1982; Dover, New York, 2002.

[12] I.N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.

[13] Murray R. Spiegel, *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York 1959 (traduzione italiana: *Analisi Vettoriale*).

[14] Gabor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **23**, 1939; Reprinted 1991.

[15] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, and V.K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific, Singapore, 1988; also: Nauka, Leningrad, 1975 (in Russian).

[16] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Ed., Cambridge University Press, London, 1962.

[17] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Fourth ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.