Scritto del Corso
di Metodi Matematici Avanzati[1]

1. Calcolare l'integrale

$$I(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{z - \sin(z)}{z^3(z - z_0)}\, dz,$$

dove $C_R = \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ per $R > 0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ è qualsiasi punto per cui $|z_0| \neq R$. **SOLUZIONE**: Osserviamo che $f(z) = [z - \sin(z)]/z^3$ è analitica in $z \in \mathbb{C}$. Grazie al Teorema Integrale di Cauchy risultano $I(z_0) = f(z_0)$ (dove $f(0) = \frac{1}{6}$) se $|z_0| < R$ e $I(z_0) = 0$ se $|z_0| > R$.

2. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z^2+9)^3}\, dz,$$

dove C è il bordo del quadrato con vertici ± 4 e $\pm 4 + 6i$. Specificare l'orientamento della curva C. **SOLUZIONE**: Con l'orientamento di C antiorario l'integrale curvilineo è uguale al residuo della funzione $f(z) = 1/(z^2+9)^3$ in $z = 3i$. Infatti,

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (z - 3i)^3 f(z) = \frac{(-3)(-4)}{1.2} \frac{1}{(z+3i)^5} \to -\frac{1}{1296} i, \quad z \to 3i.$$

3. Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{[x^2+1][x^2+6x+10]}\, dx$$

per $k \geq 0$. **SOLUZIONE**: Sia C_R il contorno con orientamento antiorario che consiste nel arco $\Gamma_R = \{R\, e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ e l'intervallo $[-R, R]$ e sia $f(z) = 1/([z^2+1][z^2+6z+10])$. Siccome $e^{ikz} f(z) = O(1/|z|^4)$ per $k \geq 0$ se $|z| \to \infty$ nel semipiano superiore,

[1] 21.02.2005

risulta per $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{[x^2+1][x^2+6x+10]}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \oint_{C_R} e^{ikz} f(z)\,dz \\
&= 2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=i}(e^{ikz}f(z)) + \mathrm{Res}_{z=-3+i}(e^{ikz}f(z))\right] \\
&= 2\pi i \left[\frac{e^{ikz}}{(z+i)(z^2+6z+10)}\bigg|_{z=i} + \frac{e^{ikz}}{(z^2+1)(z+3+i)}\bigg|_{z=-3+i} \right] \\
&= \pi\, e^{-k} \left[\frac{1}{9+6i} + \frac{e^{-3ik}}{9-6i} \right] \\
&= \frac{\pi}{39}\, e^{-k} \left[3(1+\cos(3k)+2\sin(3k)) - i(2-2\cos(3k)+3\sin(3k))\right].
\end{aligned}$$

4. Calcolare l'integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{[x^2+1]^2}\,dx.$$
Si consiglia osservare che l'integrale è pari in k e considerare e^{ikx} al posto di $\cos(kx)$. **SOLUZIONE**: Per $k \geq 0$ si introduce il contorno C_R come nell'esercizio 3. Ora segue per $k \geq 0$
$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{[x^2+1]^2}\,dx &= \lim_{R\to+\infty} \oint_{C_R} \frac{e^{ikz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z=i} \frac{e^{ikz}}{(z^2+1)^2} \\
&= 2\pi i \,\frac{d}{dz}\, \frac{e^{ikz}}{(z+i)^2}\bigg|_{z=i} = 2\pi i\; e^{ikz} \frac{ik(z+i)-2}{(z+i)^3}\bigg|_{z=i} \\
&= \frac{1+|k|}{2}\,\pi e^{-|k|}.
\end{aligned}$$

5. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos\theta}\,d\theta.$$
SOLUZIONE: Sostituendo $z = e^{i\theta}$ per $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e utilizzando $d\theta = dz/iz$ si ha
$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos\theta}\,d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{i(z^2+3z+1)} = 2\pi \mathrm{Res}_{z=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{5}} \frac{1}{z^2+3z+5} \\
&= 2\pi \lim_{z\to-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{5}} \frac{1}{z+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Punteggio massimo: 6 pt. per esercizio.