Scritto del Corso
di Metodi Matematici Avanzati[1]

1. Calcolare l'integrale

$$I(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{z - \sin(z)}{z^3(z - z_0)}\, dz,$$

dove $C_R = \{Re^{i\theta} : 0 \le \theta \le 2\pi\}$ per $R > 0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ è qualsiasi punto per cui $|z_0| \ne R$. **SOLUZIONE**: Osserviamo che $f(z) = [z - \sin(z)]/z^3$ è analitica in $z \in \mathbb{C}$. Grazie al Teorema Integrale di Cauchy risultano $I(z_0) = f(z_0)$ (dove $f(0) = \frac{1}{6}$) se $|z_0| < R$ e $I(z_0) = 0$ se $|z_0| > R$.

2. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z^2 + 9)^3}\, dz,$$

dove $C$ è il bordo del quadrato con vertici $\pm 4$ e $\pm 4 + 6i$. Specificare l'orientamento della curva $C$. **SOLUZIONE**: Con l'orientamento di $C$ antiorario l'integrale curvilineo è uguale al residuo della funzione $f(z) = 1/(z^2 + 9)^3$ in $z = 3i$. Infatti,

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (z - 3i)^3 f(z) = \frac{(-3)(-4)}{1.2} \frac{1}{(z + 3i)^5} \to -\frac{1}{1296} i, \quad z \to 3i.$$

3. Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{[x^2 + 1][x^2 + 6x + 10]}\, dx$$

per $k \ge 0$. **SOLUZIONE**: Sia $C_R$ il contorno con orientamento antiorario che consiste nel arco $\Gamma_R = \{R e^{i\theta} : 0 \le \theta \le \pi\}$ e l'intervallo $[-R, R]$ e sia $f(z) = 1/([z^2 + 1][z^2 + 6z + 10])$. Siccome $e^{ikz} f(z) = O(1/|z|^4)$ per $k \ge 0$ se $|z| \to \infty$ nel semipiano superiore,

[1] 21.02.2005

risulta per $k \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{[x^2+1][x^2+6x+10]}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \oint_{C_R} e^{ikz} f(z)\,dz$$
$$= 2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z=i}(e^{ikz} f(z)) + \mathrm{Res}_{z=-3+i}(e^{ikz} f(z))\right]$$
$$= 2\pi i \left[ \left.\frac{e^{ikz}}{(z+i)(z^2+6z+10)}\right|_{z=i} + \left.\frac{e^{ikz}}{(z^2+1)(z+3+i)}\right|_{z=-3+i} \right]$$
$$= \pi\, e^{-k} \left[\frac{1}{9+6i} + \frac{e^{-3ik}}{9-6i}\right]$$
$$= \frac{\pi}{39}\, e^{-k} \left[3(1+\cos(3k)+2\sin(3k)) - i(2-2\cos(3k)+3\sin(3k))\right].$$

4. Calcolare l'integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{[x^2+1]^2}\,dx.$$
Si consiglia osservare che l'integrale è pari in $k$ e considerare $e^{ikx}$ al posto di $\cos(kx)$. **SOLUZIONE**: Per $k \geq 0$ si introduce il contorno $C_R$ come nell'esercizio 3. Ora segue per $k \geq 0$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{[x^2+1]^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \oint_{C_R} \frac{e^{ikz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=i} \frac{e^{ikz}}{(z^2+1)^2}$$
$$= 2\pi i \left.\frac{d}{dz} \frac{e^{ikz}}{(z+i)^2}\right|_{z=i} = 2\pi i\; e^{ikz} \left.\frac{ik(z+i)-2}{(z+i)^3}\right|_{z=i}$$
$$= \frac{1+|k|}{2}\,\pi e^{-|k|}.$$

5. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos\theta}\,d\theta.$$
**SOLUZIONE**: Sostituendo $z = e^{i\theta}$ per $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e utilizzando $d\theta = dz/iz$ si ha
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\cos\theta}\,d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{i(z^2+3z+1)} = 2\pi \mathrm{Res}_{z=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{5}} \frac{1}{z^2+3z+5}$$
$$= 2\pi \lim_{z\to-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{5}} \frac{1}{z+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

**Punteggio massimo**: 6 pt. per esercizio.