

**ELEMENTI
DI ANALISI FUNZIONALE
E DI ANALISI NUMERICA**

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Industriale
Cagliari, 16-20 febbraio 2004

Appunti sulle lezioni
dei Proff. Seatzu e Van der Mee

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Cagliari

Indice

1	Introduzione sui Modelli Differenziali	5
1.1	Problema modello Unidimensionali	5
1.2	Problemi modello multidimensionali	5
1.3	Problemi differenziali risolubili con metodi analitici	7
1.4	Metodologie Numeriche	8
2	Richiami di Analisi Funzionale	11
2.1	Spazi di Banach e di Hilbert	11
2.2	Spazi di Sobolev	15
2.2.1	Lo spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$	18
2.2.2	Lo spazio di Sobolev $H^m(\Omega)$	20
3	Metodi di Proiezione	21
4	Formulazione Variazionale di Problemi Ellittici	25
4.1	Problemi Modello Unidimensionali	25
4.2	Problemi Modello Multidimensionali	28
4.3	Approssimazione Numerica della Soluzione del Problema Variazionale	32
4.4	Applicazioni	35
4.4.1	Risoluzione dell'Equazione del Calore	35
4.4.2	Risoluzione dell'Equazione delle Onde	37
5	Differenze Finite	43
5.1	Metodi alle Differenze Finite	43
5.1.1	Equazioni Ellittiche	44
5.1.2	Equazioni Paraboliche (Metodo Implicito)	46
5.1.3	Equazioni Iperboliche (Metodo Implicito)	48

5.1.4	Modelli Non Lineari	49
6	Elementi Finiti di Lagrange e Triangularizzazione del Dominio	59
6.1	Triangularizzazione del Dominio	65

Capitolo 1

Introduzione sui Modelli Differenziali

1.1 Problema modello Unidimensionali

Trovare la funzione $u(x)$ che soddisfa il problema differenziale di Sturm-Liouville

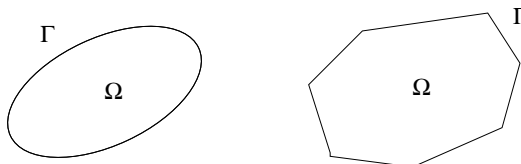
$$(1.1) \quad \begin{cases} -(pu')' + qu = r, & a \leq x \leq b \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases}$$

dove $p \in C^1[a, b]$ e $q, r \in C[a, b]$ con $p(x) > 0$ e $q(x) \geq 0$ per $x \in [a, b]$. La soluzione in senso variazionale verrà descritta successivamente.

Una *soluzione classica* delle (1.1) è una funzione $u \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$ e nulla agli estremi.

1.2 Problemi modello multidimensionali

Indicato con Ω un aperto di \mathbb{R}^n , indichiamo con Γ la sua frontiera che, per semplicità, supponiamo C^1 a tratti (Γ C^1 a tratti).



Modello ellittico. Trovare la funzione $u(x)$ che soddisfa il problema differenziale

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma \quad (\text{condizione ai limiti}), \end{cases}$$

essendo le funzioni a_{ij} misurabili e limitate in Ω e la f in $L^2(\Omega)$.

Caso particolare: Equazione di Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \Gamma, \end{cases}$$

dove $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Modello parabolico. Trovare la funzione $u(x, t)$ che soddisfa il problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u = f, & \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0, T) \\ u = 0 \text{ su } \Gamma_T = \Gamma \times (0, T) & (\text{condizione ai limiti}) \\ u(x, 0) = u_0 \text{ in } \Omega & (\text{condizione iniziale}) \end{cases}$$

Caso particolare: Equazione del calore in un mezzo continuo e isotropo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_T \\ u(x, 0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Modello iperbolico. Trovare la funzione $u(x, t)$ che soddisfa il problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u = f, & \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0, T) \\ u = 0 \text{ su } \Gamma_T = \Gamma \times (0, T) & (\text{condizione ai limiti}) \\ u(x, 0) = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1 \text{ in } \Omega & (\text{condizioni iniziali}) \end{cases}$$

Caso particolare: *Equazione delle onde in un mezzo continuo e isotropo*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_T \\ u(x, 0) = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Esistono attualmente vari teoremi che garantiscono, sotto ipotesi molto generali, esistenza e unicità delle soluzioni dei suddetti problemi in opportuni spazi di Hilbert.

1.3 Problemi differenziali risolubili con metodi analitici

1. ODE a coefficienti costanti (regole standard)
2. PDE (separazione delle variabili, serie di Fourier)
 - a. Ellittico

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x)g(y), & (x, y) \in \Omega \\ \Omega = & \text{rettangolo, cerchio} \end{cases}$$

- b. Parabolico

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & 0 \leq t \leq T, \quad a \leq x \leq b \\ u(x, 0) = f(x), & u(a, t) = \alpha(t), \quad u(b, t) = \beta(t) \end{cases}$$

Se $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ trasformata di Fourier

Se $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ trasformata di Fourier seno/coseno, trasformata di Laplace

- c. Iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t \geq 0, \quad a \leq x \leq b \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x), \quad u(a, t) = \alpha(t), \quad u(b, t) = \beta(t) \end{cases}$$

\Rightarrow metodo di D'Alembert, serie di Fourier

Se $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ trasformata di Fourier

Se $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ trasformata di Fourier seno/coseno, trasformata di Laplace

Per i problemi differenziali non lineari, non esistono metodi analitici di tipo generale. Per quanto concerne i metodi numerici è essenziale distinguere tra problemi debolmente e fortemente non lineari.

Sono debolmente lineari quelle equazioni differenziali nelle quali la soluzione compare non linearmente mentre le sue derivate compaiono linearmente.

Esempi:

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x, u) = r(x)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + P(x, y)u_x + Q(x, y)u_y + R(x, y, u) = S(x, y)$$

$$u_t = c^2u_{xx} + P(x, t)u_x + Q(x, t, u) + R(x, t)$$

$$u_{tt} = c^2u_{xx} + P(x, t)u_x + Q(x, t)u_t + R(x, t, u) + S(x, t)$$

Relativamente ai problemi differenziali debolmente non lineari esistono metodi numerici di tipo generale per le ODE e le PDE di tipo ellittico e parabolico.

1.4 Metodologie Numeriche

Dal punto di vista numerico, ossia dell'approssimazione della soluzione, esistono due famiglie di metodi, ossia i metodi alle differenze finite e i metodi agli elementi finiti, ambedue inquadrabili come metodi di proiezione.

1. **Idea base dei metodi alle differenze finite:** costruzione di una mesh del dominio Ω , collocazione dell'equazione differenziale nei punti interni della mesh e risoluzione dell'associato sistema lineare. L'errore di approssimazione dipende dallo schema di discretizzazione adottato, dal diametro della mesh, dalla variabilità dei $|a_{ij}|$ e dal segno di a_0 (metodi di discretizzazione).
2. **Idea base dei metodi agli elementi finiti per problemi ellittici:** formulazione variazionale del problema in uno spazio di Sobolev, approssimazione della soluzione in uno spazio di dimensione finita e

risoluzione dell'associato sistema lineare. L'errore di approssimazione fondamentale dipende dalle proprietà di approssimazione dello spazio di dimensione finita considerato rispetto agli elementi dello spazio di Sobolev.

3. **Idea base dei metodi agli elementi finiti per problemi parabolici:** formulazione variazionale del problema in uno spazio di Sobolev, analisi spettrale della forma bilineare presente nell'equazione differenziale con valutazione del suo spettro, risoluzione dell'associato problema differenziale nel tempo e sua risoluzione mediante una tecnica di semidiscretizzazione o di totale discretizzazione. La qualità del risultato fondamentale dipende dalla valutazione dello spettro della forma bilineare e dalla risoluzione dell'associato problema differenziale ordinario.
4. **Idea base dei metodi agli elementi finiti per problemi iperbolici:** formulazione variazionale del problema in uno spazio di Sobolev, analisi spettrale della forma bilineare derivata dall'operatore ellittico presente nell'equazione differenziale, valutazione del suo spettro e risoluzione dell'associato problema differenziale ordinario del secondo ordine. La qualità del risultato, anche in questo caso, fondamentale dipende dalla valutazione dello spettro associato alla forma bilineare e dalla risoluzione del problema differenziale ordinario del secondo ordine nel tempo.

Capitolo 2

Richiami di Analisi Funzionale

2.1 Spazi di Banach e di Hilbert

Spazi normati. Sia X uno spazio lineare complesso (o reale). Una funzione $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- (1) $\|\varphi\| \geq 0$ (positività)
- (2) $\|\varphi\| = 0$ se e solo se $\varphi = 0$ (definitezza)
- (3) $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \|\varphi\|$ (omogeneità)
- (4) $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ (disuguaglianza triangolare)

per qualunque $\varphi, \psi \in X$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ (oppure \mathbb{R}) è definita *norma* su X . Dalle (3)-(4) segue immediatamente che $|\|\varphi\| - \|\psi\|| \leq \|\varphi - \psi\|$. In uno spazio normato, per distanza di φ da ψ si intende la $\|\varphi - \psi\|$.

Definizione di convergenza. Una successione $\{\varphi_n\}$ di elementi di uno spazio normato X è detto *convergente* se esiste un elemento $\varphi \in X$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, ossia se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$.

Successione di Cauchy. Una successione $\{\varphi_n\}$ di elementi di uno spazio normato X è detta di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ per tutti gli $n, m \geq n(\varepsilon)$, ossia se $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$.

Completezza. Un sottospazio lineare U di uno spazio normato X è detto *completo* se ogni successione di Cauchy di elementi di U converge ad un elemento di U .

Spazio di Banach. Uno spazio normato X è uno *spazio di Banach* se esso è completo.

Funzione continua. Una funzione $A : U \subset X \rightarrow Y$ che trasforma gli elementi di un sottoinsieme U di uno spazio normato X in elementi di uno spazio normato Y è detto *continua* in $\varphi \in U$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} A\varphi_n = A\varphi$ per ogni successione $\{\varphi_n\} \subset U$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$. La funzione A è detta continua se essa è continua in ogni $\varphi \in U$. La precedente definizione può essere espressa anche nel modo seguente: Una funzione $A : U \subset X \rightarrow Y$ è continua in φ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon, \varphi)$ tale che $\|A\varphi - A\psi\|_Y \leq \varepsilon$ per tutti i $\psi \in U$ con $\|\varphi - \psi\|_X < \delta$. La funzione A è detta *uniformemente continua* se δ dipende unicamente da ε , ossia se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon)$ tale che $\|A\varphi - A\psi\|_Y < \varepsilon$ per tutte le ψ con $\|\varphi - \psi\|_X < \delta$.

Esempi di spazi di Banach.

1. Indicato con Ω un insieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^n ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$), sia $C(\Omega)$ l'insieme delle funzioni continue in Ω . Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

introduce una norma completa in $C(\Omega)$, per cui lo spazio $C(\Omega)$, dotato di tale norma, è uno spazio normato completo e quindi uno spazio di Banach.

2. La suddetta definizione si può generalizzare ai sottoinsiemi Ω di \mathbb{R}^n che non sono necessariamente chiusi e limitati. In tal caso $C(\Omega)$ indica l'insieme delle funzioni continue e **limitate** in Ω . Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

introduce una norma completa in $C(\Omega)$, per cui lo spazio $C(\Omega)$, dotato di tale norma, è uno spazio di Banach.

3. Indicato con Ω un sottoinsieme misurabile in \mathbb{R}^n e con $L^2(\Omega)$ lo spazio delle funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω ,¹ la funzione $\|\cdot\|_2 : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, essendo

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

¹identificando due funzioni φ, ψ al quadrato sommabili che hanno valori diversi soltanto su un sottoinsieme di Ω di misura zero.

definisce una norma completa in $L^2(\Omega)$, per cui costituisce uno spazio di Banach.

4. Indicato con ℓ^2 lo spazio delle successioni $\{x_n\}$ al quadrato sommabili, la funzione $\|\cdot\|_2 : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$, essendo

$$\|\{x_n\}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2},$$

definisce una norma completa in ℓ^2 , per cui costituisce uno spazio di Banach.

Sfera aperta. Per un elemento φ di uno spazio normato X e un numero positivo r , l'insieme $B(\varphi; r) = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| < r\}$ è definito la *sfera aperta* di raggio r e centro φ . L'insieme $B[\varphi; r] = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| \leq r\}$ è definito la *sfera chiusa* di raggio r e centro φ .

Insieme aperto. Un sottoinsieme di uno spazio normato X è definito *aperto* se per ogni $\varphi \in U$ esiste un $r > 0$ tale che $B(\varphi; r) \subset U$.

Parte interna. La *parte interna* $\overset{0}{U}$ di un sottoinsieme U di uno spazio normato X è il sottoinsieme aperto più grande contenuto in U . Esso consiste in tutti i punti $\varphi \in U$ per cui esiste un numero $r = r(\varphi)$ tale che $B(\varphi, r) \subset U$.

Insieme chiuso. Un sottoinsieme di uno spazio normato X è definito *chiuso* se esso contiene tutti i limiti di tutte le successioni con termini in U e limiti in X .

Chiusura. La *chiusura* \bar{U} di un sottoinsieme U di uno spazio normato X (in X) è l'insieme di tutti i limiti delle successioni con termini in U e limiti in X . Essa è il sottoinsieme chiuso più piccolo di X che contiene U .

Frontiera. La *frontiera* ∂U di un sottoinsieme di uno spazio normato X è l'insieme di tutti gli elementi di X che sono limiti sia di una successione con termini in U sia di una successione con termini in $X \setminus U$. Infatti,

$$\partial U = \bar{U} \cap \overline{(X \setminus U)} = \partial(X \setminus U).$$

Densità e separabilità. Un insieme U è definito *denso* in V se $V \subset \bar{U}$, cioè se ogni elemento di V è il limite di una successione convergente di elementi di U . Uno spazio normato X è detto *separabile* se contiene un sottoinsieme numerabile denso in X .

Limitatezza. Un sottoinsieme U di uno spazio normato X è detto *limitato* se esiste una costante positiva C tale che $\|\varphi\| \leq C$ per tutti i $\varphi \in U$. In

altre parole, un sottoinsieme U di uno spazio normato X è limitato se esso è sottoinsieme di una sfera.

Prodotto scalare (prodotto interno). Sia X uno spazio lineare complesso (o reale). Allora una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ (oppure \mathbb{R}) soddisfacente le seguenti proprietà:

- (1) $(\varphi, \varphi) \geq 0$ (positività)
- (2) $(\varphi, \varphi) = 0$ se e solo se $\varphi = 0$ (definitezza)
- (3) $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$ (simmetria)
- (4) $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi) + \beta(\psi, \chi)$ (linearità)

per tutte le $\varphi, \psi, \chi \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (oppure \mathbb{R}) è definita *prodotto scalare* o *prodotto interno* (il soprascritto indica il complesso coniugato). Dalle (3)-(4) segue immediatamente la sesquilinearità, o antilinearità

$$(5) \quad (\varphi, \alpha\psi + \beta\chi) = \bar{\alpha}(\varphi, \psi) + \bar{\beta}(\varphi, \chi).$$

Norma indotta. Ogni prodotto scalare induce una norma, così definita

$$\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$$

per ogni $\varphi \in X$. Inoltre vale la cosiddetta *disuguaglianza di Schwartz*

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\|.$$

Spazio pre-Hilbert. Per *spazio pre-Hilbert* si intende uno spazio lineare dotato di prodotto interno.

Spazio di Hilbert. Si definisce *spazio di Hilbert* uno spazio pre-Hilbert completo rispetto alla norma indotta dal suo prodotto scalare.

Esempi di spazi di Hilbert.

1. Lo spazio $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto interno

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx.$$

2. Lo spazio ℓ^2 delle successioni complesse $\{x_n\}$ è uno spazio di Hilbert rispetto al suo prodotto interno

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

2.2 Spazi di Sobolev

Gli spazi di Sobolev sono gli spazi di Hilbert nei quali vengono generalmente studiati i problemi differenziali alle derivate parziali. Per questo motivo risulta essenziale ricordarne le proprietà essenziali. Il motivo, probabilmente più importante, per il quale i problemi differenziali con valori al contorno non vengono studiati in $L^2(\Omega)$ è che $C(\Omega)$, ossia lo spazio delle funzioni continue e limitate in Ω , non è uno spazio completo rispetto alla norma in $L^2(\Omega)$.

Distribuzioni. Sia Ω un aperto non vuoto in \mathbb{R}^n , nel quale $x = (x_1, \dots, x_n)$ rappresenta un punto generico. Sia $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio di tutte le funzioni reali (per semplicità) indefinitamente derivabili in Ω , con supporto limitato in Ω .

Esempio. Siano a un punto in Ω e $r > 0$ un numero tale che la sfera di \mathbb{R}^n con centro a e raggio r sia centrata in Ω . Allora la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{1/(|x-a|^2-r^2)}, & \text{per } |x-a| < r \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove $|y| = (\sum_{i=1}^n |y_i|^2)^{1/2}$ indica la norma euclidea di $y \in \mathbb{R}^n$, appartiene a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Derivata α -ma. Se φ è una funzione di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è un vettore di interi nonnegativi ($\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$), per derivata α -ma della φ si intende

$$\partial^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

essendo $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Convergenza. Se $\{\varphi_n\}$ è una successione di funzioni di $\mathcal{D}(\Omega)$, si dice che φ_n converge a φ in $\mathcal{D}(\Omega)$ se:

- (1) il supporto di φ_n è sempre contenuto in un sottoinsieme chiuso e limitato di Ω ;
- (2) per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\partial^\alpha \varphi_m$ converge uniformemente a $\partial^\alpha \varphi$ su K .

Si definisce come spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni su Ω lo spazio duale di $\mathcal{D}(\Omega)$, ossia lo spazio delle forme lineari continue su $\mathcal{D}(\Omega)$. Pertanto se T è

una distribuzione su Ω e se $\langle T, \varphi \rangle$ indica la dualità tra $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T, \varphi_m \rangle$ converge a $\langle T, \varphi \rangle$ per ogni successione $\{\varphi_m\}$ convergente a φ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Inoltre se $\{T_m\}$ è una successione di $\mathcal{D}'(\Omega)$, si dice che T_m converge a T in $\mathcal{D}'(\Omega)$ se, per ogni funzione φ di $\mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_m, \varphi \rangle$ converge a $\langle T, \varphi \rangle$.

Esempi di distribuzioni.

1. (δ di Dirac). Indicato con a un punto di Ω , la δ di Dirac in a (δ_a) può essere definita mediante la seguente relazione:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Essendo la relazione lineare e continua, δ_a indica una distribuzione.

2. Sia $L^2(\Omega)$ lo spazio di Hilbert delle funzioni al quadrato sommabili in Ω , con prodotto interno

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

e norma indotta

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Prefissata f in $L^2(\Omega)$, ad essa possiamo associare la distribuzione T_f così definita

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \text{per ogni } \varphi \in L^2(\Omega).$$

Poichè $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $L^2(\Omega)$, la T_f è iniettiva da $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\mathcal{D}'(\Omega)$ e di conseguenza è possibile identificare T_f con la f .

Derivata delle distribuzioni (derivata in senso debole). Se T è una distribuzione, la $\partial T / \partial x_i$ viene definita mediante la relazione

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Poichè la trasformazione $\varphi \mapsto \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$ è una forma lineare e continua su $\mathcal{D}(\Omega)$, la precedente relazione definisce $\partial T / \partial x_i$ come una distribuzione su

Ω . Da notare che se f è una funzione derivabile con continuità su Ω , la sua derivata ordinaria coincide con la derivata nel senso delle distribuzioni. Infatti, per la definizione introdotta

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

e, d'altra parte, integrando per parti e tenendo conto del fatto che le funzioni φ sono a supporto chiuso e limitato in Ω , per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx = -\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx.$$

Più in generale, se T è una distribuzione su Ω e se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ è un qualunque vettore di interi, la derivata $\partial^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ di T , nel senso delle distribuzioni, è definita dalla relazione

$$\langle \partial^\alpha \varphi, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \alpha^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n).$$

La principale conseguenza è che ogni distribuzione su Ω è indefinitamente derivabile in Ω , nel senso delle distribuzioni. È anche immediato osservare che l'operazione $T \mapsto \partial^\alpha T$ è continua in $\mathcal{D}'(\Omega)$ nel senso che se $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, allora $\partial^\alpha T_n \rightarrow \partial^\alpha T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Esempi.

1. (la funzione di Heaviside).

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{per } x \geq 0, \\ 0, & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

La funzione H pur non essendo sommabile in \mathbb{R} lo è localmente, nel senso che lo è in qualunque sottoinsieme Ω limitato di \mathbb{R} , in simboli $H \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Poichè lo spazio delle funzioni $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ può essere identificato, come quello delle funzioni $L^2(\Omega)$, con l'operatore T_f , $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, la funzione H può essere identificata con una distribuzione T_H su \mathbb{R} . La derivata di tale distribuzione è la Δ di Dirac nell'origine, in quanto

$$\left\langle \frac{d}{dx} T_H, \varphi \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = -\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \varphi(0).$$

2. Sia f una funzione definita su \mathbb{R} e ivi derivabile tranne in un numero finito di punti $\{x_1, \dots, x_k\}$ in ciascuno dei quali esistono tuttavia le derivate destra e sinistra. Sia $s_i = f(x_i+) - f(x_i-)$ il salto di discontinuità della f in x_i . È allora facile osservare che

$$\frac{d}{dx}T_f = T_{\frac{df}{dx}} + \sum_{i=1}^k s_i \delta_{x_i}.$$

Infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, risulta

$$\left\langle \frac{d}{dx}T_f, \varphi \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{df}{dx} \varphi(x) dx + \sum_{i=1}^k s_i \varphi(x_i).$$

2.2.1 Lo spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$

Sia u una funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ che, come osservato precedentemente, può essere identificata con una distribuzione su Ω . Indicata tale distribuzione con ν stessa, le sue derivate $\frac{\partial \nu}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, non sono in generale contenute in $L^2(\Omega)$. Questo giustifica l'introduzione dello spazio $H^1(\Omega)$.

Si definisce spazio di Sobolev di ordine 1 su Ω lo spazio

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}.$$

In $H^1(\Omega)$ si introduce il prodotto interno

$$(u, v)_{1, \Omega} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

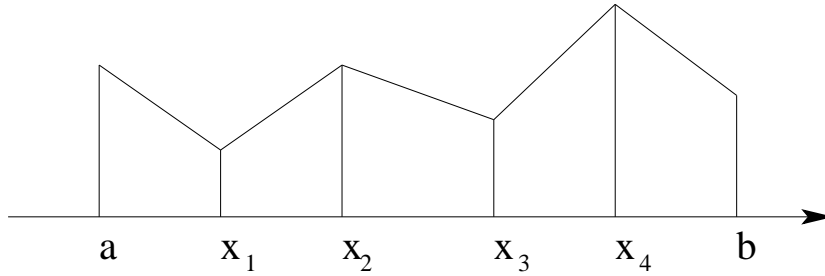
e la norma corrispondente $\|u\|_{1, \Omega} = (u, u)_{1, \Omega}$.

Esempio. Le splines lineari su un intervallo $[a, b]$ appartengono a $H^1(a, b)$.

Proprietà fondamentali.

Teorema 2.1 *Lo spazio $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto interno introdotto.*

Teorema 2.2 *Lo spazio $H^1(\Omega)$ è separabile, ossia possiede un sottoinsieme numerabile e denso in $H^1(\Omega)$.*



$H_0^1(\Omega)$ è, per definizione, la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$.

Nel caso in cui Ω sia limitato valgono le seguenti proprietà:

(1) la seminorma

$$|u|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2},$$

dove $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ è la norma in $L^2(\Omega)$, è una norma su $H_0^1(\Omega)$.

(2) $C^1(\Omega)$, ossia lo spazio delle funzioni derivabili con continuità in Ω , è denso in $H^1(\Omega)$.

(3) lo spazio delle funzioni continue in Ω , $C(\Omega)$, è contenuto in $H^1(\Omega)$.

(4) se la frontiera di Ω è C^1 a tratti,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\}.$$

In altri termini, se Ω è limitato e il suo bordo è C^1 a tratti, $H_0^1(\Omega)$ coincide con l'insieme delle funzioni di $H^1(\Omega)$ che si annullano al bordo.

Se Ω è limitato con frontiera C^1 a tratti, l'iniezione canonica di $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ è *compatta*, cioè da ogni sottoinsieme limitato di $H^1(\Omega)$ si può estrarre una successione che converge in $L^2(\Omega)$.

Vale la seguente caratterizzazione di $H^1(\mathbb{R}^n)$:

Teorema 2.3

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\omega|^2)^{1/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

essendo $\hat{u}(\omega) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} u(x) dx$ la trasformata di Fourier di u .

2.2.2 Lo spazio di Sobolev $H^m(\Omega)$

La definizione di $H^1(\Omega)$ viene generalizzata nel modo seguente:

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

essendo $\partial^\alpha u$ la α -ma derivata di u nel senso delle distribuzioni. In $H^m(\Omega)$ il prodotto interno è così definito:

$$(u, v)_{m, \Omega} = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \right) dx.$$

La norma indotta è pertanto

$$\|u\|_{m, \Omega} = (u, u)_{m, \Omega}^{1/2}.$$

Le generalità delle proprietà valide in $H^1(\Omega)$ si estendono, con relativa semplicità, allo spazio $H^m(\Omega)$.

Laplaciano. Per Laplaciano di una distribuzione, analogamente a quanto avviene per le funzioni in C^2 , si intende la distribuzione

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Teorema 2.4 (Formula di Green) *Sia Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^n con frontiera Γ C^1 a tratti. Allora per ogni funzione u di $H^2(\Omega)$ e ogni funzione v di $H^1(\Omega)$ vale la formula di Green*

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma,$$

dove $\partial u/\partial \nu$ indica la derivata normale della u in un punto di Γ .

Capitolo 3

Metodi di Proiezione

Indicato con X uno spazio di Hilbert e con A un operatore da X a X , si consideri l'equazione (per esempio differenziale)

$$(3.1) \quad Af = g.$$

Tale equazione è univocamente risolubile in X , qualunque sia g in X , se e solo se esiste limitato l'operatore inverso A^{-1} .

Lemma 3.1 (Lax-Milgram) *Condizione sufficiente perchè A abbia inverso limitato è che esso sia coercivo, ossia che esista una costante $c > 0$ tale che*

$$(A\varphi, \varphi) \geq c\|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in X.$$

Questo lemma, come le considerazioni precedenti, per semplicità sono da intendersi nel campo reale.

Idea base dei metodi di proiezione: proiettare l'equazione (3.1) in opportuni sottospazi $\{X_n\}$ di X sui quali si sappia risolvere la nuova equazione ma anche valutare la distanza tra la soluzione in X e quella in X_n .

Proprietà degli spazi X_n : X_n è di dimensione finita; $X_n \subset X_{n+1}$ per ogni n , $\{X_n\}$ è denso in X .

Operatore di proiezione: P_n deve essere lineare e inoltre P_n^2 deve coincidere con P_n , cioè $P_n^2 = P_n$.

Indicato con f_n il generico elemento di X_n e con P_n un operatore di proiezione da X a X_n , si considera l'equazione

$$(3.2) \quad P_n Af_n = P_n g, \quad f_n \in X_n,$$

che rappresenta la proiezione della (3.1) in X_n . Indicata con A_n la restrizione dell'operatore $P_n A$ ad X_n , l'equazione (3.2) diventa

$$(3.3) \quad A_n f_n = P_n g, \quad f_n \in X_n,$$

essendo $A_n = P_n A : X_n \rightarrow X_n$.

La teoria sui metodi di proiezione assicura che se A è un operatore lineare e limitato in X , esiste un N tale che per ogni $n > N$, l'equazione proiettata possiede una e solo una soluzione in X_n . In altre parole, esiste un N tale che per ogni $n > N$ l'operatore A_n è invertibile con operatore limitato in X_n .¹

Valutazione dell'errore. Nella (3.3), ricordando la (3.1),

$$f_n = A_n^{-1} P_n g = A_n^{-1} P_n A f,$$

per cui, indicato con I l'operatore identità,

$$f_n - f = (A_n^{-1} P_n A - I) f.$$

Inoltre, dalla definizione di A_n segue che, $\forall \varphi \in X_n$,

$$A_n^{-1} P_n A \varphi = \varphi.$$

Pertanto

$$f_n - f = (A_n^{-1} P_n A - I) (f - \varphi) \quad \forall \varphi \in X_n.$$

Da cui

$$(3.4) \quad \|f_n - f\| \leq (1 + M_n) \|f - \varphi^*\|,$$

essendo $M_n = \|A_n^{-1} P_n A\|_X$ e φ^* la migliore approssimazione della f in X_n . Da notare che M_n è una successione limitata, esiste cioè un M tale che $M_n \leq M$ per ogni n .

Allo scopo di introdurre il metodo agli elementi finiti come un metodo di proiezione è importante osservare preliminarmente che l'equazione (3.1) può essere espressa nella *forma equivalente*

$$(3.5) \quad \langle A f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in X.$$

¹Se X_n ha dimensione finita, non c'è bisogno dell'ipotesi che l'operatore inverso A_n^{-1} sia limitato.

Le due forme sono equivalenti nel senso che la (3.1) implica la (3.5) e la validità della (3.5), per ogni $\varphi \in X$, implica la (3.1). Per applicare il teorema di Lax-Milgram alla nuova formulazione del problema (3.1), detta *formulazione variazionale*, occorre premettere la definizione di forma bilineare.

Una funzione $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *bilineare* se essa è lineare rispetto a ciascuna delle sue due variabili, cioè se

$$\begin{cases} a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w) \\ a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w), \end{cases}$$

qualunque siano $u, v, w \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tale funzione è limitata se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in X.$$

Inoltre essa è *coerciva* se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$a(u, u) \geq c \|u\|^2, \quad \forall u \in X.$$

Lemma 3.2 (Lax-Milgram) *Se la A è lineare e la funzione bilineare $\langle Af, g \rangle$ è coerciva, l'equazione (3.5), e pertanto anche la (3.1), è univocamente risolvibile in X .*

Il *metodo di Galerkin*, in particolare, richiede la proiezione dell'equazione (3.5) in X_n , che pertanto diventa

$$(3.6) \quad \langle Af_n, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \quad f_n \in X_n, \quad \forall \varphi \in X_n.$$

Il *metodo agli elementi finiti* consiste nell'approssimare la (3.6) in uno spazio X_n di elementi finiti. Indicata con \tilde{f}_n l'approssimazione di f_n in X_n , il metodo agli elementi finiti richiede la risoluzione dell'equazione

$$(3.7) \quad \langle A\tilde{f}_n, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle, \quad \tilde{f}_n \in X_n, \quad \forall \varphi_n \in X_n.$$

Nel caso in cui A sia lineare, l'approssimazione di \tilde{f}_n richiede dunque la risoluzione di un sistema lineare. Infatti, indicata con $\{w_j\}_{j=1}^n$ una base di X_n , \tilde{f}_n è esprimibile nella forma $\tilde{f}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$, dove gli α_j sono numeri reali che esprimono le componenti di f_n rispetto alla base di X_n . Pertanto, nel caso lineare, l'equazione (3.7) diventa

$$(3.8) \quad \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j \langle Aw_j, w_i \rangle = \langle g, w_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e $\tilde{f}_n = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j w_j$ viene assunta come approssimazione della f . Poichè al crescere di n decresce l'errore di approssimazione della f in X_n ma aumentano le difficoltà per la risoluzione del sistema (3.8), occorre un buon compromesso nella scelta di n .

Capitolo 4

Formulazione Variazionale di Problemi Ellittici

4.1 Problemi Modello Unidimensionali

Sia $v \in C^1[a, b]$ una funzione nulla agli estremi. Moltiplicando l'equazione differenziale nelle (1.1) per $v(x)$ e integrando per parti si ottiene l'equazione funzionale

$$(4.1) \quad S(u, v) = F(v), \quad \forall v \in C^1[a, b], \quad v(a) = v(b) = 0,$$

dove

$$S(u, v) = \int_a^b (pu'v' + qv) dx$$
$$F(v) = \int_a^b rv dx.$$

Ogni soluzione del problema modello (1.1) soddisfa dunque l'equazione (4.1) per ogni $v \in C^1[a, b]$ nulla agli estremi. Si può anche dimostrare il viceversa e cioè che se $u \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$ con $u(a) = u(b) = 0$ soddisfa la (4.1) per ogni $v \in C^1[a, b]$ nulla agli estremi, allora la u è l'unica soluzione del problema differenziale (1.1).

La suddetta trasformazione è essenziale per la risoluzione del problema (1.1) con il metodo degli elementi finiti. A tale scopo l'equazione funzionale deve essere considerata in uno spazio di Hilbert.

Questo per vari motivi ma soprattutto per poter utilizzare le proprietà delle funzioni bilineari e, in particolare, la seguente:

Se la $S(u, v)$ è bilineare e coerciva in uno spazio di Hilbert, allora l'equazione (4.1) possiede una e una sola soluzione.

Tale spazio di Hilbert è lo spazio di Sobolev $H^1[a, b]$, la cui introduzione necessita la definizione di derivata debole.

Sia, come usuale, $L^2[a, b]$ lo spazio delle funzioni al quadrato integrabile in $[a, b]$ nel senso di Lebesgue.

Definizione 4.1 Una funzione $u \in L^2[a, b]$ è dotata di derivata debole $u' \in L^2[a, b]$ se

$$\int_a^b uv' dx = - \int_a^b u'v dx$$

per ogni $v \in C^1[a, b]$ con $v(a) = v(b) = 0$.

Teorema 4.2 Lo spazio lineare

$$H^1[a, b] := \{u \in L^2[a, b], \text{ con } u' \in L^2[a, b]\}$$

dotato del prodotto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_a^b (uv + u'v') dx$$

è uno spazio di Hilbert.

Proprietà: $C^1[a, b]$ è denso in $H^1[a, b]$;

$$H^1[a, b] \subset C[a, b].$$

Il sottospazio $H_0^1[a, b] := \{u \in H^1[a, b] : u(a) = u(b) = 0\}$ è completo.

Teorema 4.3 In $H_0^1[a, b]$ il problema funzionale (4.1) possiede una e una sola soluzione, che è anche soluzione in $H_0^1[a, b]$ del problema modello.

Teorema 4.4 La soluzione debole è anche una soluzione classica.

Metodo agli elementi finiti per il problema di modello

Risolvere il problema modello con il metodo degli elementi finiti equivale ad applicare il metodo di Galerkin alla risoluzione in $H_0^1[a, b]$ dell'equazione (4.1), avendo assunto come X_n lo spazio delle splines lineari.

Tenuto conto del fatto che la soluzione del problema modello si annulla agli estremi, una base X_n per le splines lineari è data dalle Hat functions $\{H_i\}_{i=1}^n$, dove

$$H_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Tali funzioni sono chiaramente una base cardinale per l'interpolazione, nel senso che l'interpolante di una funzione continua $f(x)$ è del tipo

$$If(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)H_i(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Essendo $X_n \subset X_{n+1}$ e inoltre

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - If(x)| \leq \frac{M_2}{8}h^2, \quad M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|,$$

è evidente che X_n è una scelta ragionevole come sottospazio di dimensione finita nel quale approssimare la soluzione del problema modello. Posto

$$u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i H_i,$$

si deve dunque risolvere il sistema lineare

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i S(H_i, H_j) = F(H_j), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove

$$S(H_i, H_j) = \int_a^b (pH_i'H_j' + qH_iH_j) dx$$

$$F(H_j) = \int_a^b rH_j dx.$$

Discutiamo ora il calcolo della matrice $\{S(H_i, H_j)\}_{i,j=1,\dots,n}$. Poichè la matrice è simmetrica, è sufficiente calcolare gli elementi $S(H_i, H_j)$ per $i \geq j$.

Inoltre, essendo $S(H_i, H_j) = 0$ per $|i - j| \geq 2$, come è evidente dal supporto delle $\{H_i\}$, è sufficiente calcolare gli elementi $S(H_i, H_j)$ della diagonale principale e gli $S(H_{i+1}, H_j)$ della prima subdiagonale. A tale scopo è bene osservare che

$$H'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\frac{1}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} S(H_i, H_j) &= \int_a^b [p(H'_i)^2 + q(H_i)^2] dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x) dx \\ &+ \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) (x - x_{i-1})^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) (x_{i+1} - x)^2 dx \right] \end{aligned}$$

e

$$S(H_{i+1}, H_i) = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) (x_{i+1} - x)(x - x_i) dx.$$

Il vettore dei termini noti è dato da

$$F(H_i) = \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} r(x) (x - x_{i-1}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x) (x_{i+1} - x) dx \right],$$

dove $i = 1, \dots, n$. Naturalmente il calcolo effettivo può essere completato analiticamente soltanto in casi particolari, dipendenti dalle espressioni di p , q e r . Nella generalità dei casi questo viene effettuato utilizzando formule di quadratura numerica.

Per quanto concerne la distanza tra la soluzione u e la u_n valgono i due seguenti risultati:

- (1) $\|u - u_n\|_{H'} \leq c_1 \|u''\|_{L^2} h;$
- (2) $\|u - u_n\|_{L^2} \leq c_2 \|u''\|_{L^2} h^2.$

4.2 Problemi Modello Multidimensionali

La formulazione variazionale delle equazioni differenziali con condizioni al contorno è la necessaria premessa alla descrizione del metodo agli elementi

finiti. Per chiarezza espositiva consideriamo prima due problemi modello e poi la formulazione più generale.

1. Problema di Dirichlet. Indicata con Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^n con frontiera Γ C^1 a tratti e con $f \in L^2(\Omega)$ una funzione assegnata, trovare una funzione u definita in Ω soluzione del problema differenziale

$$(4.2) \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

$$(4.3) \quad u = 0 \quad \text{su } \Gamma.$$

Supponiamo ora che la soluzione u del problema (4.2)-(4.3) sia sufficientemente regolare, diciamo $u \in H^2(\Omega)$. Allora moltiplicando primo e secondo membro della (4.2) per una funzione test $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando su Ω si ha

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Da cui, sostituendo la formula di Green e ricordando che $v|_{\Gamma} = 0$, si ottiene

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Infine, essendo $u|_{\Gamma} = 0$, possiamo affermare che anche $u \in H_0^1(\Omega)$. Il problema (4.2)-(4.3) può pertanto essere sostituito con il seguente: Assegnata una $f \in L^2(\Omega)$, determinare una $u \in H_0^1(\Omega)$ che risolva il problema (4.4). Questa è la formulazione variazionale del problema di Dirichlet (4.2)-(4.3). La teoria dimostra che ogni soluzione delle (4.2)-(4.3) sufficientemente regolare è soluzione della (4.4). Viceversa, una soluzione $u \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione della (4.4) se e solo se la (4.4) è verificata per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, in quanto $H_0^1(\Omega)$ è la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$. Pertanto, se u verifica la (4.4), allora la (4.2) è verificata in Ω , nel senso delle distribuzioni e, se $f \in L^2(\Omega)$, la (4.2) è verificata in $L^2(\Omega)$, dunque quasi ovunque in Ω . Inoltre è verificata anche la (4.3), dato che $u \in H_0^1(\Omega)$.

2. Problema di Neumann. Risolvere, nelle ipotesi precedenti su Ω , Γ e f , il seguente problema differenziale

$$(4.5) \quad -\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega,$$

$$(4.6) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \Gamma.$$

Supponendo ancora che $u \in H^2(\Omega)$, moltiplichiamo primo e secondo membro della (4.5) per una funzione test $v \in H^1(\Omega)$, integriamo su Ω e utilizziamo la formula di Green. Tenuto conto della condizione (4.6) si ottiene l'equazione

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} fv dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Il problema iniziale viene pertanto sostituito con il seguente: assegnata $f \in L^2(\Omega)$, determinare una u che verifica la (4.7). Ogni soluzione u del problema (4.5)-(4.6) è soluzione dell'equazione (4.7). Viceversa, se $u \in H^1(\Omega)$ è soluzione del problema precedente, la (4.7) è verificata per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, per cui essa è la soluzione di (4.5)-(4.6) nel senso delle distribuzioni, essendo la (4.5) verificata in $L^2(\Omega)$. Quando la u è regolare, diciamo $u \in H^2(\Omega)$, dalla formula di Green segue che la (4.7) è equivalente alla (4.5) ma anche che

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

da cui

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

ossia che la (4.6) è valida nel senso delle distribuzioni.

3. Problema di Dirichlet nel caso più generale. Risolvere, nelle stesse ipotesi precedenti su Ω e f , il seguente problema ellittico con condizioni omogenee al contorno

$$(4.8) \quad Au = f \quad \text{in } \Omega$$

$$(4.9) \quad u = 0 \quad \text{su } \Gamma,$$

essendo

$$(4.10) \quad Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u.$$

Procedendo come nel problema 1, ossia supponendo $u \in H^2(\Omega)$ e la funzione test $v \in H_0^1(\Omega)$, moltiplicando il primo e secondo membro della (4.8) da v ed applicando la formula di Green si ottiene la formulazione variazionale

$$(4.11) \quad a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

dove

$$(4.12) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 uv \right) dx,$$

$$(4.13) \quad F(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

La $a(u, v)$ è bilineare ed è coerciva se le funzioni $a_{ij}(x)$ e $a_0(x)$ soddisfano le seguenti ipotesi di ellitticità:

(a) esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ quasi ovunque in } \Omega,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma euclidea.

(b) esiste una costante c_0 tale che

$$a_0(x) \geq c_0, \quad \text{quasi ovunque in } \Omega.$$

Tali ipotesi, frequentemente verificate nelle applicazioni, implicano infatti che

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2 + \alpha_0 \|v\|_{0,\Omega}^2.$$

Nella suddetta ipotesi il problema (4.11) possiede una e una sola soluzione la quale è anche soluzione, nel senso delle distribuzioni, del problema iniziale.

Osservazione 4.5 Considerazioni del tutto analoghe permettono di ottenere la formulazione variazionale del problema di Neumann associato all'operatore ellittico A . È utile notare anche che, con semplici adattamenti, è anche possibile ottenere la formulazione variazionale in condizioni di inomogeneità al contorno. Da notare che la condizione di ellitticità è chiaramente verificata nel caso dei problemi 1 e 2. Infatti essendo $a_0(x) \equiv 0$, oppure $a_0(x) \equiv 1$, la condizione (b) è banalmente verificata e la (a), essendo $a_{ij}(x) \equiv 1$ per $i = j$ e $a_{ij}(x) \equiv 0$ per $i \neq j$, lo è per $c = \frac{1}{2}$, dato che

$$\sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j = |\xi|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n \xi_i \xi_j \geq \frac{1}{2} |\xi|^2,$$

essendo

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n (\xi_i + \xi_j)^2 \geq 0.$$

4.3 Approssimazione Numerica della Soluzione del Problema Variazionale

Supponiamo di dover risolvere il problema variazionale (4.11)-(4.13), nel quale per comodità poniamo $X = H_0^1(\Omega)$. Indichiamo con X_h uno spazio di dimensione finita, caratterizzato da un parametro h che faremo tendere a zero, la cui dimensione $N = N(h)$ tende all'infinito per $h \rightarrow 0$. Supponiamo inoltre che X_h per $h \rightarrow 0$ sia denso in X . La soluzione del problema variazionale (4.11)-(4.13) viene allora sostituito dal seguente: prefissato h , determinare l'unico elemento $u_h \in X_h$ che verifica la relazione

$$(4.14) \quad a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in X_h,$$

dove $a(u_h, v_h)$ e $F(v_h)$ hanno lo stesso significato che nelle (4.12)-(4.13).

Teorema 4.6 *Le ipotesi di ellitticità sulle a_{ij} e a_0 garantiscono l'esistenza e unicità della soluzione del problema (4.14).*

Dal punto di vista numerico, indicata con $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ una base per X_h e posto $u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j$, si deve risolvere il sistema lineare

$$(4.15) \quad \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) \alpha_j = F(\varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Tale sistema ha una e una sola soluzione nelle suddette ipotesi di ellitticità. Vale inoltre il seguente risultato sull'errore di approssimazione: esiste una costante c , indipendente da h , tale che

$$\|u - u_h\| \leq c \inf_{u_h \in X_h} \|u - u_h\|.$$

Di conseguenza, se X_h è denso in X per $h \rightarrow \infty$, l'errore di proiezione $u - u_h \rightarrow 0$ in norma. Il metodo si dice definito di ordine k se $\|u - u_h\| = O(h^k)$.

Esercizio. Risolvere con un metodo di ordine s il seguente problema:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{su } \Gamma, \end{aligned}$$

dove Ω è il quadrato unitario $(0, 1) \times (0, 1)$. La formulazione variazionale richiede la valutazione di $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$Q(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in \Omega,$$

essendo

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx.$$

Per approssimare u si deve costruire un sottospazio X_h di dimensione finita $N = N(h)$ di $X = H_0^1(\Omega)$. A tale scopo consideriamo il reticolo rettangolare R_h i cui nodi sono i punti $P_{ij} = (ih, jh)$, $0 \leq i, j \leq n+1$; indichiamo Q_{ij} il quadrato con lati paralleli agli assi e di lunghezza h , avente per vertici i punti (ih, jh) , $((i+1)h, jh)$, $((i+1)h, (j+1)h)$ e $(ih, (j+1)h)$. Questo determina la seguente decomposizione del dominio $\bar{\Omega}$:

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \bigcup_{0 \leq i, j \leq n} Q_{ij} \text{ con} \\ Q_{i_1, j_1} \neq Q_{i_2, j_2} \text{ per } (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2). \end{cases}$$

Indichiamo ora con Π_1 lo spazio dei polinomi in due variabili di grado ≤ 1 in ciascuna variabile. Π_1 è dunque lo spazio di dimensione 4 generato dai polinomi $1, x_1, x_2$ e $x_1 x_2$. X_h è allora lo spazio di dimensione finita

$$X_h = \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v|_{\Gamma} = 0, v|_{Q_{ij}} \in \Pi_1, 0 \leq i, j \leq n \right\},$$

la cui dimensione è $N = n^2$. Allo scopo di costruire una base di X_h , numeriamo i punti per righe ossia per ordinate crescenti e, a parità di ordinata, per ascisse crescenti.

A questo punto consideriamo la spline lineare $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n^2} \in \Pi_1$ caratterizzata dalla relazione

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n^2.$$

È evidente che queste funzioni formano una base Lagrangiana di X_h , per cui ogni funzione $u_h \in X_h$ è esprimibile nella forma

$$(4.16) \quad u_h = \sum_{j=1}^{n^2} u_j \varphi_j,$$

dove i coefficienti $u_j = u_h(P_i)$ sono la soluzione del sistema lineare

$$(4.17) \quad \sum_{j=1}^{n^2} a(\varphi_i, \varphi_j) u_j = \int_{\Omega} f \varphi_i dx, \quad i = 1, 2, \dots, n^2.$$

È importante notare che il supporto di φ_l , $l = i + n(j-1)$, ossia il subdominio di Ω in cui è non nulla, è il quadrato di lato $2h$ definito dai vertici $(i-1, j-1)$, $(i+1, j-1)$, $(i+1, j+1)$ e $(i-1, j+1)$.

La φ_l rappresenta dunque una piramide con vertice in (i, j) di valore 1 e valore zero nei 4 lati. Pertanto il supporto della φ_l ha intersezione soltanto con quelli che hanno come vertici i punti $(i-1, j-1)$, $(i, j-1)$, $(i+1, j-1)$, $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$, $(i, j+1)$, $(i-1, j+1)$ e $(i, j+1)$. Dalla teoria sugli spazi di Sobolev segue che: se u è una funzione continua in $\bar{\Omega}$ la cui restrizione $v|_{\Omega_r}$ ad un subdominio Ω_r appartiene a $H_0^1(\Omega_r)$, allora $u \in H_0^1(\Omega)$. Di conseguenza, la φ_j e dunque anche la u_h appartengono a $H_0^1(\Omega)$. Precisiamo ora con maggiori dettagli le caratteristiche del sistema (4.17). Poniamo, per semplicità,

$$\begin{aligned} u_{lm} &= u_h(x_{il}, x_{lm}), & 1 \leq l, m \leq n^2, \\ f_{lm} &= \frac{1}{h^2} \int_{\Omega} f \varphi_{lm} dx, & 1 \leq l, m \leq n^2, \end{aligned}$$

dove φ_{lm} è la funzione di Π_1 che vale 1 nel nodo (x_{1l}, x_{lm}) e 0 negli altri nodi del reticolo. Calcoli semplici, anche se non molto brevi, dimostrano che la (4.17) si può scrivere nel modo seguente:

$$(4.18) \quad 3 u_{lm} - \frac{1}{3} \sum_{i,j=-1}^1 u_{l+i, m+j} = h^2 f_{lm}, \quad 1 \leq l, m \leq n^2,$$

essendo

$$\begin{cases} u_{l0} = u_{l, n^2+1} = 0, & 0 \leq l \leq n^2 + 1 \\ u_{0m} = u_{n^2+1, m} = 0, & 0 \leq m \leq n^2 + 1. \end{cases}$$

La matrice del sistema (4.18) è sparsa, in quanto per ogni coppia (l, m) l'equazione relativa ha 9 coefficienti $\neq 0$. Indicando con un \bullet un elemento non nullo, la matrice presenta una struttura del tipo seguente.

4.4 Applicazioni

La tecnica variazionale può essere utilizzata anche per la risoluzione delle equazioni del calore e delle onde. Più precisamente, è possibile risolvere i due tipi di equazione sfruttando opportunamente la coercività dell'operatore ellittico presente nei due tipi di equazione.

4.4.1 Risoluzione dell'Equazione del Calore

Per risolvere numericamente il problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_T = \Gamma \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

partiamo dalla formulazione variazionale

$$(4.19) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x) dx - \int_{\Omega} \Delta u(x, t)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx,$$

dove $v \in H_0^1(\Omega)$. Utilizzando la formula di Green e osservando che

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t)v(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx,$$

oppure

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle.$$

Risolviamo prima il problema spettrale

$$(4.20) \quad a(w_i, v) = \lambda_i \langle w_i, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

da cui segue

$$(4.21) \quad u(t) = \sum_{i=1}^n \langle u(t), w_i \rangle w_i,$$

essendo $\{w_i\}$ una base Hilbertiana ortonormale.¹ Arriviamo all'equazione

$$(4.22) \quad \begin{aligned} a(u(t), v) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(t), w_i \rangle a(w_i, v) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(t), w_i \rangle \lambda_i \langle w_i, v \rangle, \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(t), w_i \rangle w_i, & w_i &\in H_0^1(\Omega) \\ a(u(t), v) &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle u(t), w_j \rangle \langle w_j, v \rangle, \end{aligned}$$

da cui, per $v = w_i$, $i \in \mathbb{N}$,

$$(4.23) \quad a(u(t), w_i) = \lambda_i \langle u(t), w_i \rangle.$$

L'equazione (4.19) è dunque equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) &= \langle f(t), w_i \rangle, & i &\in \mathbb{N} \\ \alpha_i(0) &= \langle u_0, w_i \rangle, \end{aligned}$$

dove $\alpha_i(t) = \langle u(t), w_i \rangle$. Per ogni i la soluzione è pertanto

$$\alpha_i(t) = \langle u_0, w_i \rangle e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \langle f(s), w_i \rangle e^{-\lambda_i(t-s)} ds$$

e dunque

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \langle u_0, w_i \rangle e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \langle f(s), w_i \rangle e^{-\lambda_i(t-s)} ds \right\} w_i(x).$$

¹Nelle ipotesi di coercività della forma bilineare $a(u, v)$, il problema spettrale (4.20) ammette uno spettro che ha le seguenti caratteristiche: gli autovalori $\{\lambda_i\}$ formano una successione infinita di valori positivi convergenti a $+\infty$ e la successione delle autofunzioni $\{w_i\}$ è una base ortonormale di $L^2(\Omega)$.

4.4.2 Risoluzione dell'Equazione delle Onde

Per risolvere numericamente il problema differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_T = \Gamma \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = u_1 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

partiamo dalla formulazione variazionale

$$(4.24) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)v(x) dx - \int_{\Omega} \Delta u(x, t)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx,$$

dove $v \in H_0^1(\Omega)$. Utilizzando la formula di Green e osservando che

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)v(x) dx = \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(x, t)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

si ottiene

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(x, t)v(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f(x, t)v(x) dx,$$

oppure

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle u(t), v \rangle + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle.$$

Seguendo i passaggi (4.20)-(4.23) si conclude facilmente che l'equazione (4.24) è dunque equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \alpha_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) &= \langle f(t), w_i \rangle, & i \in \mathbb{N} \\ \alpha_i(0) &= \langle u_0, w_i \rangle, \\ \frac{d}{dt} \alpha_i(0) &= \langle u_1, w_i \rangle, \end{aligned}$$

dove $\alpha_i(t) = \langle u(t), w_i \rangle$. Per ogni i la soluzione è pertanto

$$\alpha_i(t) = \langle u_0, w_i \rangle \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + \langle u_1, w_i \rangle \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} + \int_0^t \langle f(s), w_i \rangle \frac{\sin((t-s)\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} ds$$

e dunque

$$(4.25) \quad u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \langle u_0, w_i \rangle \cos(t\sqrt{\lambda_i}) + \langle u_1, w_i \rangle \frac{\sin(t\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} + \int_0^t \langle f(s), w_i \rangle \frac{\sin((t-s)\sqrt{\lambda_i})}{\sqrt{\lambda_i}} ds \right\} w_i(x).$$

Nel caso in cui un autovalore λ_i si annulla, la (4.25) non presenta alcuna difficoltà di interpretazione. Ricordandosi i limiti

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \cos(t\sqrt{\lambda}) = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} = t,$$

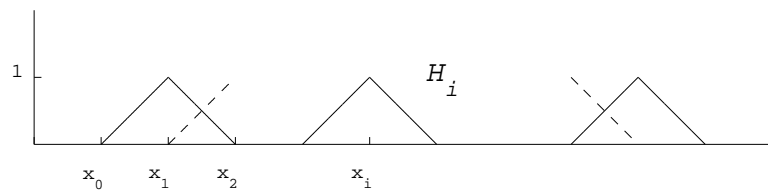
bisogna sostituire il termine i -esimo della (4.25) dal termine

$$\langle u_0, w_i \rangle + \langle u_1, w_i \rangle t + \int_0^t \langle f(s), w_i \rangle (t-s) ds$$

se $\lambda_i = 0$.



Figura 4.1: Spazio delle splines lineari: $x_j = a + jh$ ($j = 0, 1, \dots, n + 1$), dove $h = \frac{b-a}{n+1}$.



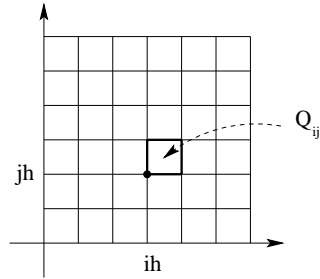


Figura 4.2: Un reticolo rettangolare per cui $\bar{\Omega} = \bigcup_{0 \leq i, j \leq n} Q_{ij}$.

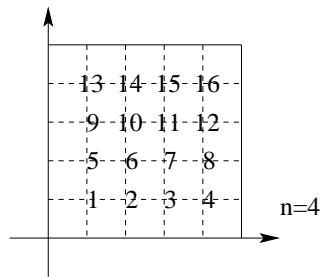
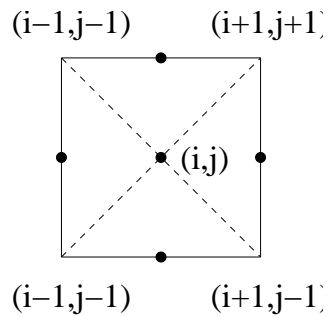


Figura 4.3: Costruzione di una base di X_h , numerando i punti interni per righe ossia per ordinate crescenti e, a parità di ordinata, per ascisse crescenti: $(i, j) \mapsto \ell = i + n(j - 1)$ e $P_{ij} \mapsto P_\ell$.



$\begin{array}{c} j \\ \backslash \\ i \end{array}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	*	*			*	*										
2	*	*	*		*	*	*									
3		*	*	*		*	*	*								
4			*	*			*	*								
5	*	*			*	*			*	*						
6	*	*	*		*	*	*		*	*	*					
7		*	*	*		*	*	*		*	*	*				
8			*	*			*	*		*	*	*				
9					*	*			*	*			*	*		
10					*	*	*		*	*	*		*	*	*	
11						*	*	*		*	*	*		*	*	*
12							*	*		*	*		*	*	*	*
13									*	*			*	*		
14									*	*	*		*	*	*	
15										*	*	*		*	*	*
16											*	*		*	*	*

Figura 4.4: Matrice del sistema (4.18): tridiagonale a blocchi, con blocchi a loro volta tridiagonali.

Capitolo 5

Differenze Finite

5.1 Metodi alle Differenze Finite

Risolviamo ora numericamente il problema differenziale

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y + r(x) \\ p, q \text{ e } r \text{ funzioni continue in } [a, b] \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

Schemi di discretizzazione alle differenze centrali:

$$\begin{aligned} y''(x_i) &\approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, & y''(x_i) - \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} &= \mathcal{O}(h^2); \\ y'(x_i) &\approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, & y'(x_i) - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} &= \mathcal{O}(h^2); \end{aligned}$$

Collocazione in x_i , $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i + r_i \quad \begin{cases} p_i = p(x_i) \\ q_i = q(x_i) \\ r_i = r(x_i) \end{cases}$$

dove $i = 0, 1, \dots, n + 1$.

Valutazione del residuo differenziale:

$$\begin{aligned} \tau(x, h) &= \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} - p(x) \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} \\ &\quad - q(x)y(x) - r(x) = \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Sistema lineare di n equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{p_i}{2}h\right) y_{i-1} - (2 + h^2 q_i) y_i + \left(1 - \frac{p_i}{2}h\right) y_{i+1} = h^2 r_i \\ y_0 = \alpha; \quad y_{n+1} = \beta. \end{cases}$$

Posto

$$a_i = -(2 + h^2 q_i), \quad b_i = \left(1 + \frac{p_i}{2}h\right), \quad c_i = \left(1 - \frac{p_i}{2}h\right)$$

per $i = 1, 2, \dots, n$, si deve risolvere il seguente sistema lineare tridiagonale

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & \ddots & c_{n-1} & \\ & & & & & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 r_1 - b_1 \alpha \\ h^2 r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 r_{n-1} \\ h^2 r_n - c_n \beta \end{pmatrix}.$$

Il caso più semplice è $q(x) \geq 0$ per $x \in (a, b)$. In questo caso la matrice del sistema è diagonalmente dominante e irriducibile se $ph < 2$, essendo $p = \max_{a \leq x \leq b} |p(x)|$. In tal caso il sistema possiede una e una sola soluzione qualunque siano le condizioni iniziali.

Teorema 5.1 (Gerschgorin) *Nelle ipotesi precedenti, l'errore possiede una maggiorazione del tipo:*

$$|y(x_i) - y_i| = c \tau(h), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

essendo c una costante indipendente da h e $\tau(h) = \max_{a \leq x \leq b} |\tau(x, h)|$.

5.1.1 Equazioni Ellittiche

Consideriamo ora il problema differenziale

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + p(x, y)u_x + q(x, y)u_y + r(x, y)u + s(x, y) = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Discretizzazione con il metodo alle differenze centrali (schema a 5 punti):

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} + p_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + q_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + r_{i,j}u_{i,j} + s_{i,j} = 0$$

per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Ordinando $\{u_{i,j}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ per linee (per j crescente e, a parità di j , per i crescente), la discretizzazione precedente genera il seguente sistema lineare

$$h^2(2 - kq_{i,j})u_{i,j-1} + k^2(2 - hp_{i,j})u_{i-1,j} - 2[2(h^2 + k^2) - h^2k^2r_{i,j}]u_{i,j} + k^2(2 + hp_{i,j})u_{i+1,j} + h^2(2 - kq_{i,j})u_{i,j+1} = -2h^2k^2$$

per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Teorema 5.2 *Se $r(x, y) \leq 0$ in Ω ed inoltre $ph \leq 2$ e $qk \leq 2$, essendo $|p(x, y)| \leq p$ e $|q(x, y)| \leq q$ per $(x, y) \in \Omega$, allora il sistema ottenuto con il metodo alle differenze centrali possiede una e una sola soluzione.*

In questo caso, se p , q , r , e s sono funzioni continue in Ω , il residuo differenziale

$$\tau(x, y; h, k) = \mathcal{O}(h^2 + k^2)$$

e inoltre

$$|u(x_i, y_j) - u_{i,j}| = \mathcal{O}(h^2 + k^2).$$

Osservazione 5.3 La scelta di n ed m dipende da p e q . Per p e q grandi h e k debbono essere piccoli e dunque n ed m grandi, per cui il sistema può risultare molto grande, anche per equazioni ellittiche teoricamente molto semplici.

Metodo upwind Qualora le condizioni $ph \leq 2$ e $qk \leq 2$ del Teorema 5.2 risultino molto restrittive, nel senso che h e/o k siano molto piccoli e dunque n e/o m molto grandi, onde evitare la risoluzione di un sistema di grandi dimensioni spesso si ricorre al cosiddetto metodo upwind.

In tal caso, mentre u_{xx} e u_{yy} vengono discretizzate con uno schema alle differenze centrali, u_x e u_y vengono discretizzate nel modo seguente:

$$\begin{aligned} u_x(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}, & \text{se } p_{ij} \geq 0 \\ u_x(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}, & \text{se } p_{ij} \leq 0 \\ u_y(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}, & \text{se } q_{ij} \geq 0 \\ u_y(x_i, y_j) &\approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}, & \text{se } q_{ij} \leq 0. \end{aligned}$$

Questo equivale a porre

$$\begin{aligned} p(x_i, y_j)u_x &\approx \frac{(|p_{ij}| + p_{ij})u_{i+1,j} - 2|p_{ij}|u_{ij} + (|p_{ij}| - p_{ij})u_{i-1,j}}{2h} \\ q(x_i, y_j)u_y &\approx \frac{(|q_{ij}| + q_{ij})u_{i,j+1} - 2|q_{ij}|u_{ij} + (|q_{ij}| - q_{ij})u_{i,j-1}}{2k}. \end{aligned}$$

Tale schema genera il sistema

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} (|q_{ij}| - q_{ij}) \right] u_{i,j-1} + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} (|p_{ij}| - p_{ij}) \right] u_{i-1,j} \\ &+ \left[\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2} + \frac{|p_{ij}|}{h} + \frac{|q_{ij}|}{k} - r_{ij} \right] u_{ij} + \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} (|p_{ij}| + p_{ij}) \right] u_{i+1,j} \\ &+ \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} (|q_{ij}| + q_{ij}) \right] u_{i,j+1} = -s_{ij} \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Tale sistema è diagonalmente dominante, e dunque univocamente risolvibile per ogni coppia (h, k) , se $r(x, y) \leq 0$.

Questo fatto non implica tuttavia che h e k possano essere presi abbastanza grandi, ossia che si debba risolvere un sistema non molto grande. Infatti si deve tenere conto del fatto che, mentre l'errore di discretizzazione del metodo alle differenze centrali è un $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$, l'errore di discretizzazione dovuto al metodo upwind è un $\mathcal{O}(h + k)$.

5.1.2 Equazioni Paraboliche (Metodo Implicito)

Consideriamo ora il problema differenziale

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} + p(x, t)u_x + q(x, t)u + r(x, t), & a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T \\ u(a, t) = f_1(t), \quad u(b, t) = f_2(t), & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Modello discretizzato (collocazione in x_i, t_j):

$$\begin{cases} x_i = a + ih, & i = 0, 1, \dots, n+1, & h = \frac{b-a}{n+1} \\ t_j = jk, & j = 0, 1, \dots, m+1, & k = \frac{T}{m+1}, \quad T \text{ valore assegnato.} \end{cases}$$

Discretizzazione con uno schema a 4 punti:

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} +_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + q_{i,j}u_{i,j} + r_{i,j}$$

per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Osservazione 5.4 Per $j = 1$, le incognite sono u_{11}, \dots, u_{n1} , le quali possono essere determinate risolvendo il sistema di ordine n ottenuto per $i = 1, \dots, n$. Più in generale, supponendo noti i valori $u_{i,j-1}$ al livello $j - 1$, i valori $u_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, al livello j possono essere calcolati risolvendo il sistema di ordine n ottenuto per $i = 1, \dots, n$.

Tenendo conto del fatto che $u_{i,j-1}$ risulta nota, lo schema precedente assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \frac{k}{h} \left(\frac{2c^2}{h} - p_{ij} \right) u_{i-1,j} - 2 \left(1 + 2 \frac{c^2 k}{h^2} - kq_{ij} \right) u_{ij} \\ + \frac{k}{h} \left(\frac{2c^2}{h} + p_{ij} \right) u_{i+1,j} = -2 (u_{ij-1} + ks_{ij}) \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, n$, prefissato $j = 1, \dots, m$.

Se $q(x, t) \leq 0$ per $a \leq x \leq b$ e $0 \leq t \leq T$, tale sistema è diagonalmente dominante per $hp \leq 2c^2$, essendo $p = \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ 0 \leq t \leq T}} |p(x, t)|$.

Osservazione 5.5 Poichè $u_t(x_i, t_j)$ è stata approssimata con uno schema alle differenze del 1° ordine in t e uno del 2° in x , l'errore di discretizzazione è un $\mathcal{O}(h^2 + k)$.

5.1.3 Equazioni Iperboliche (Metodo Implicito)

Consideriamo ora il problema differenziale

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + p(x, t)u_x + q(x, y)u_t + r(x, t)u + s(x, t), & a \leq x \leq b, t \geq 0 \\ u(a, t) = f_1(t), \quad u(b, t) = f_2(t), & 0 \leq t \leq T \\ u(x, 0) = \phi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \phi_2(x), & a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Modello discretizzato (collocazione in x_i, t_j):

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1, & h &= \frac{b - a}{n + 1} \\ t_j &= jk, \quad j = 0, 1, \dots, m + 1, & k &= \frac{T}{m + 1}, \quad T \text{ valore assegnato.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} &= c^2 \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2} \right] \\ &\quad + \frac{p_{i,j}}{2} \left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h} \right] \\ &\quad + q_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + r_{i,j}u_{i,j} + s_{i,j} \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Se, in aggiunta agli $u_{i,0}$, fossero noti in valori $u_{i,1}$, lo schema consentirebbe di calcolare gli $u_{i,2}$, $i = 1, \dots, n$, risolvendo un sistema lineare di ordine n . Di conseguenza, iterando il processo, noti i valori in 2 livelli di j , gli n valori del livello superiore verrebbero calcolati risolvendo un semplice sistema lineare di ordine n .

Per il calcolo di $u_{i,1}$, $i = 1, \dots, n$, viene generalmente utilizzata la formula di Taylor, troncata al termine di 2° ordine. Si pone cioè, tenendo conto delle condizioni iniziali,

$$\begin{aligned} u_{i1} &= u(x_i, t_1) \approx u_{i,0} + ku_t(x_i, 0) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i, 0) \\ &= \phi_1(x_i) + k\phi_2(x_i) + \frac{k^2}{2}u_{tt}(x_i, 0), \end{aligned}$$

da cui, utilizzando l'equazione stessa,

$$u_{i1} \approx \phi_1(x_i) + k\phi_2(x_i) + \frac{k^2}{2} [c^2 u_{xx}(x_i, 0) + p_{i0} u_x(x_i, 0) + q_{i0} \phi_2(x_i) + r_{i0} u_{i0} + s_{i0}].$$

I valori incogniti di quest'ultima formula, ossia $u_{xx}(x_i, 0)$ e $u_x(x_i, 0)$, possono essere infine valutati mediante lo schema alle differenze centrali

$$u_{xx}(x_i, 0) \approx \frac{u_{i+1,0} - 2u_{i,0} + u_{i-1,0}}{h^2} = \frac{\phi_1(x_{i+1}) - 2\phi_1(x_i) + \phi_1(x_{i-1}))}{h^2}$$

$$u_x(x_i, 0) \approx \frac{u_{i+1,0} - u_{i-1,0}}{2h} = \frac{\phi_1(x_{i+1}) - \phi_1(x_{i-1}))}{2h}.$$

Da notare che procedendo in tal modo, se le funzioni assegnate sono tutte continue, l'errore di discretizzazione è un $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.

Riordinando di conseguenza, ossia tenendo conto del fatto che gli unici valori incogniti sono $u_{i-1,j+1}$ e $u_{i,j+1}$, si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} \left(\frac{c^2}{h} - \frac{p_{ij}}{2} \right) u_{i-1,j+1} - \left(\frac{1}{k^2} + \frac{c^2}{h^2} - \frac{q_{ij}}{2k} \right) u_{i,j+1} + \frac{1}{2h} \left(\frac{c^2}{h} + \frac{p_{ij}}{2} \right) u_{i+1,j+1} \\ & = \frac{1}{2h} \left(\frac{p_{ij}}{2} - \frac{c^2}{h} \right) u_{i-1,j-1} + \left(\frac{1}{k^2} + \frac{c^2}{h^2} - \frac{q_{ij}}{2h} \right) u_{i,j-1} \\ & + \frac{1}{2h} \left(\frac{p_{ij}}{2} - \frac{c^2}{h} \right) u_{i+1,j-1} + \left(r_{ij} - \frac{2}{k^2} \right) u_{i,j} - s_{ij}, \end{aligned}$$

dove $i = 1, \dots, n$ per ogni prefissato $j = 1, \dots, m$. Per calcolare $u_{i,j}$ in tutti i punti nodali si debbono dunque risolvere m sistemi lineari, ciascuno di ordine n .

Da notare che questi sistemi, se $q(x, t) \leq 0$, sono tutti diagonalmente dominanti purchè risulti $hp \leq 2c^2$, essendo $p = \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ 0 \leq t \leq T}} |p(x, t)|$.

5.1.4 Modelli Non Lineari

Primo modello non lineare: Consideriamo

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x, y) + r(x) = 0, & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

Posto $x_i = a + ih$ e $y_i \approx y(x_i)$, per $i = 0, 1, \dots, n+1$ e $h = \frac{b-a}{n+1}$, lo schema alle differenze centrali trasforma il problema iniziale nel sistema non lineare

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i, y_i) + r_i = 0, & i = 1, \dots, n \\ y_0 = \alpha, \quad y_{n+1} = \beta. \end{cases}$$

Questo sistema è dunque esprimibile nella forma

$$f_i(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad y_0 = \alpha, \quad y_{n+1} = \beta,$$

essendo

$$f_i(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = \left(1 - \frac{h}{2}p_i\right) y_{i-1} - 2y_i + \left(1 + \frac{h}{2}p_i\right) y_{i+1} + q(x_i, y_i)h^2 + h^2r_i.$$

Condizione sufficiente affinché tale sistema sia univocamente risolvibile è che sia $ph \leq 2$, essendo $p = \max_{a \leq x \leq b} |p(x, t)|$ e $\frac{\partial q}{\partial y} < 0$ per $a \leq x \leq b$ e y qualsiasi.

Da notare che se il sistema fosse lineare, ossia $q(x, y) = q(x)y$, questa condizione implicherebbe la dominanza diagonale del sistema.

Nelle suddette ipotesi la soluzione può essere ottenuta mediante il metodo iterativo di Newton/Jacobi consistente nel calcolare, per ogni $k = 0, 1, \dots$, gli iterati

$$y_i^{(k+1)} = y_i^{(k)} - \frac{f_i(y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)})}{\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)})}, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove

$$f_i(y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}) = \left[1 - \frac{h}{2}p_i\right] y_{i-1}^{(k)} - 2y_i^{(k)} + \left[1 + \frac{h}{2}p_i\right] y_{i+1}^{(k)} + q(x_i, y_i^{(k)})h^2 + h^2r_i,$$

e essendo

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}) = -2 + \frac{\partial q}{\partial y_i}(x_i, y_i^{(k)}).$$

Nelle citate ipotesi il metodo è globalmente convergente, dunque teoricamente indipendente dei valori $y_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n+1$. Poiché $y_1^{(0)} = \alpha$ e $y_{n+1}^{(0)} = \beta$, la scelta più frequente consiste nell'assumere

$$y_i^{(0)} = \alpha + \frac{i}{n+1}\beta, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

ossia nell'interpolare linearmente i valori α e β .

Secondo modello non lineare (modello ellittico): Consideriamo ora

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + p(x, y)u_x + q(x, y)u_y + r(x, y)u + F(x, y, u) = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $\Omega \subset [a, b] \times [c, d]$.

Discretizzazione:

$$\begin{cases} x_i = a + ih, & i = 0, 1, \dots, n+1, & h = \frac{b-a}{n+1} \\ y_j = c + jk, & j = 0, 1, \dots, m+1, & k = \frac{d-c}{m+1} \end{cases}$$

La discretizzazione con il metodo alle differenze centrali genera il sistema debolmente non lineare

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + p_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \\ + q_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + F(x_i, y_j, u_{i,j}) = 0 \end{aligned}$$

per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Tale sistema può essere espresso nella forma

$$\phi_{i,j}(u_{i,j-1}, u_{i-1,j}, u_{i,j}, u_{i+1,j}, u_{i,j+1}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

con $u_{i,0}$ e $u_{0,j}$ noti per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$ e dove

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}(u_{i,j-1}, u_{i-1,j}, u_{i,j}, u_{i+1,j}, u_{i,j+1}) = h^2(2 - kq_{ij})u_{i,j-1} + k^2(2 - hp_{ij})u_{i-1,j} \\ - 4(h^2 + k^2)u_{i,j} + k^2(2 + hp_{ij})u_{i+1,j} \\ + h^2(2 + kq_{ij})u_{i,j+1} + 2h^2k^2F(x_i, y_j, u_{i,j}). \end{aligned}$$

Condizione sufficiente affinché questo sistema sia univocamente risolubile, nell'ipotesi che sia $\frac{\partial F}{\partial u} < 0$ per $(x, y) \in \Omega$ e u qualsiasi, è che siano $Ph \leq 2$ e $Qk \leq 2$, essendo $P = \max |p(x, y)|$ e $Q = \max |q(x, y)|$ per $(x, y) \in \Omega$.

In caso di linearità di F rispetto ad u , le condizioni precedenti assicurano che la matrice del sistema sia diagonalmente dominante.

Nelle suddette ipotesi il metodo di Newton/Jacobi applicato al sistema risulta globalmente convergente, per cui, prefissato $l = 0, 1, \dots$, la soluzione può essere ottenuta mediante il processo iterativo

$$u_{i,j}^{(l+1)} = u_{i,j}^{(l)} - \frac{\phi_{i,j}(u_{i,j-1}^{(l)}, u_{i-1,j}^{(l)}, u_{i,j}^{(l)}, u_{i+1,j}^{(l)}, u_{i,j+1}^{(l)})}{\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial u_{i,j}}(u_{i,j-1}^{(l)}, u_{i-1,j}^{(l)}, u_{i,j}^{(l)}, u_{i+1,j}^{(l)}, u_{i,j+1}^{(l)})},$$

per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Poichè la u è nota al contorno, i valori $u_{i,j}^{(0)}$ sono generalmente ottenuti per interpolazione rispetto ai valori assunti sul contorno. Da notare che

$$\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial u_{i,j}} = -4(h^2 + k^2) + 2h^2k^2 \frac{\partial F}{\partial u_{i,j}}.$$



Figura 5.1: Discretizzazione dell'intervallo: $x_i = a + ih$, dove $i = 0, 1, \dots, n + 1$ e $h = \frac{b-a}{n+1}$. In tal caso $y_i \approx y(x_i)$ per $i = 2, \dots, n + 1$.

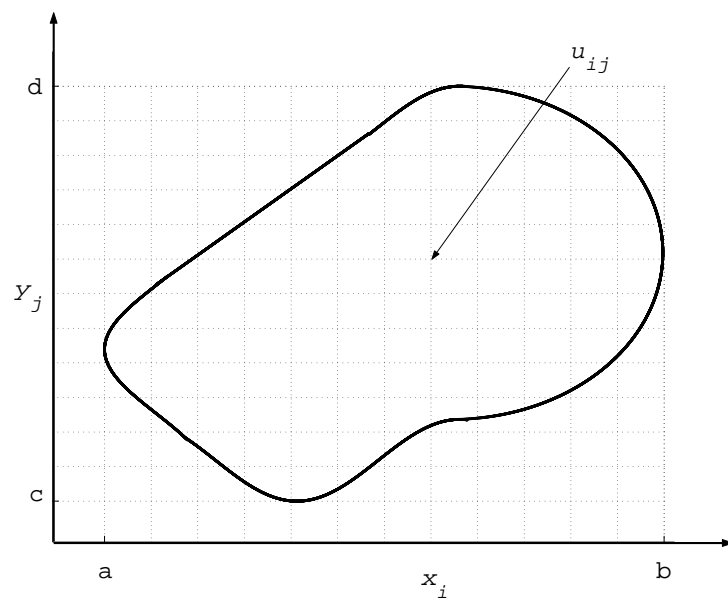


Figura 5.2: Reticolazione del dominio: $x_i = a + ih$ per $i = 0, 1, \dots, n + 1$ e $h = \frac{b - a}{n + 1}$ e $y_j = c + jk$ per $j = 0, 1, \dots, m + 1$ e $k = \frac{d - c}{m + 1}$.

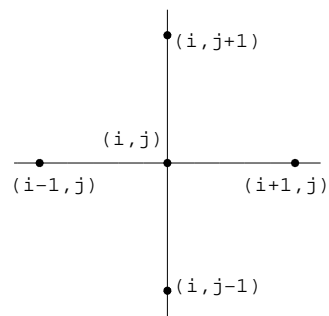


Figura 5.3: Schema di discretizzazione a 5 punti.

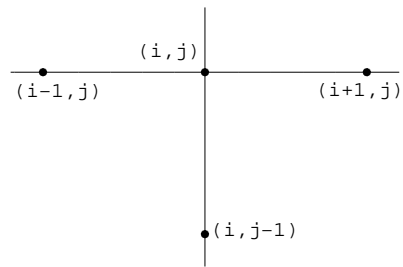


Figura 5.4: Schema di discretizzazione a 4 punti.

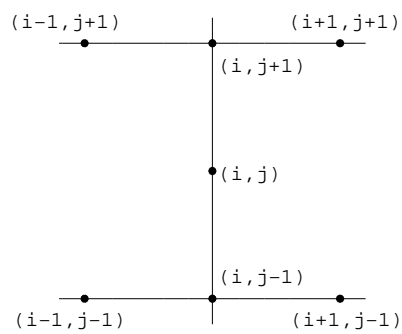
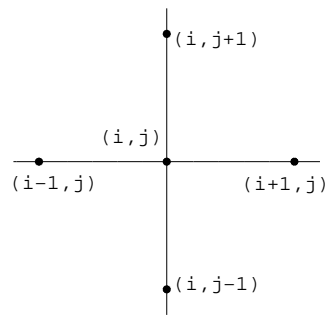


Figura 5.5: Schema di discretizzazione a 7 punti.



Capitolo 6

Elementi Finiti di Lagrange e Triangularizzazione del Dominio

La nozione di elemento finito di Lagrange è di importanza fondamentale, come pure la disponibilità di un metodo che consenta la costruzione di una famiglia di elementi finiti, partendo da uno di riferimento. Siano: K un insieme chiuso e limitato in \mathbb{R}^n , convesso e con parte interna non vuota; $\Sigma = \{p_j\}_{j=1}^N$ un insieme di N punti distinti di K ; Φ uno spazio di dimensione finita, formato da funzioni reali definite su K . Supponiamo inoltre che Σ sia Φ -*unisolvante*, ossia che esiste in Φ uno e un solo elemento φ tale che

$$\varphi(P_j) = \alpha_j, \quad \forall \alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N.$$

Definizione 6.1 *Se Σ è Φ -unisolvante, la terna (K, Φ, Σ) è un elemento finito di Lagrange. Per ogni elemento finito di Lagrange (K, Φ, Σ) e ogni intero i , $1 \leq i \leq N$, esiste dunque una e una sola funzione $\varphi_i \in \Phi$ tale che*

$$(6.1) \quad \varphi_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Più in generale per ogni funzione u definita su K , esiste una e una sola funzione φ che interpola u su Σ , ossia tale che

$$\varphi(P_j) = u(P_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Definizione 6.2 *Assegnato un elemento finito di Lagrange (K, Φ, Σ) , le N funzioni φ_i , definite dalla (6.1), costituiscono una base Lagrangiana di interpolazione. L'operatore P che, ad ogni funzione u definita su K , associa la*

sua interpolante

$$(6.2) \quad Pu = \sum_{i=1}^N u(P_i)\varphi_i$$

è detto Φ -interpolante Lagrangiano della u su Σ . Da notare che P è un operatore di proiezione, in quanto è lineare e inoltre $P^2u = Pu$ qualunque sia u definita su K .

Supponiamo ora di voler costruire un generico elemento (K, Φ, Σ) di Lagrange a partire da un prefissato elemento $(\hat{K}, \hat{\Phi}, \hat{\Sigma})$. Supponiamo inoltre che

$$(6.3) \quad K = F(\hat{K}),$$

essendo F una funzione continua e biettiva da \hat{K} a K . Allora la terna (K, Φ, Σ) , dove K segue dalla (6.3),

$$\begin{aligned} \Sigma &= F(\hat{\Sigma}) \\ \Phi &= \text{span}\{\varphi_i : 1 \leq i \leq N\}, \end{aligned}$$

dove

$$\varphi_i = \hat{\varphi}_i \circ F^{-1},$$

essendo $\{\hat{\varphi}_i\}_{i=1}^N$ una base per $\hat{\Phi}$, è un elemento finito di Lagrange. I due elementi sono detti *affini equivalenti*.

Gli elementi più comunemente utilizzati sono costruiti su un n -simpleso. Siano $a_j = (a_{ij})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n+1$, $n+1$ punti di \mathbb{R}^n non appartenenti ad uno stesso iperpiano di \mathbb{R}^n , tali cioè che la matrice di ordine $n+1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

sia non singolare. Si definisce n -simpleso K di vertici φ_j , $j = 1, \dots, n+1$, l'involuppo convesso dei punti $\{a_j\}$. Per $n = 2$ esso rappresenta un triangolo

e per $n = 3$ un tetraedro. Ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$, di coordinate cartesiane x_i , $i = 1, \dots, n$, può essere caratterizzato dagli $n + 1$ scalari $\lambda_j = \lambda_j(x)$, $j = 1, \dots, n + 1$, soluzione del sistema lineare non singolare

$$(6.4) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j = x_i, & i = 1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1. \end{cases}$$

Tali scalari sono, per definizione, le *coordinate baricentriche* di x rispetto agli $n + 1$ punti $\{a_j\}_{j=1}^{n+1}$. In altre parole, prefissati $n + 1$ punti $\{a_j\}$ di \mathbb{R}^n , non appartenenti ad uno stesso iperpiano, le coordinate baricentriche definiscono una trasformazione affine in \mathbb{R}^n , tale che ogni $x \in \mathbb{R}^n$ può essere espresso nella forma

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) a_j.$$

L' n -simpleso K di vertici $\{a_j\}$, relativamente alle coordinate baricentriche, può essere così caratterizzato

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \lambda_j(x) \leq 1, j = 1, \dots, n + 1\}.$$

Prefissato $k \geq 1$, si definisce *reticolo principale di ordine k* di un n -simpleso K , relativo ai vertici $\{a_j\}$, l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n definito dalle coordinate baricentriche nel modo seguente:

$$\Sigma_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(x) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, \frac{1}{k} \right\}, 1 \leq j \leq n + 1 \right\},$$

essendo naturalmente $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1$. Per $k = 0$, si pone

$$\Sigma_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(x) = \frac{1}{n+1}, 1 \leq j \leq n + 1 \right\},$$

per cui Σ_0 è esattamente il *baricentro* di K . Da notare che

$$\text{card } \Sigma_k = \binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{k! n!}.$$

Tale numero rappresenta anche il numero dei polinomi di base da \mathbb{R}^n a \mathbb{R} di grado k , cioè della forma

$$p_k(x) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq k}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

essendo i coefficienti α_{i_1, \dots, i_n} numeri reali. Per $k = 0$, l'unico polinomio di base è $p_0(x) = 1$. Per $k \geq 1$, ogni punto del reticolo principale Σ_k viene scritto nella forma

$$a_M = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n+1} M_j a_j, \quad M = (M_1, \dots, M_n),$$

essendo

$$M_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} M_j = k.$$

A ciascuno di tali punti si può associare un polinomio di grado k , che risulta linearmente indipendente di tutti gli altri, e precisamente il polinomio

$$P_M(x) = \left(\prod_{j=1}^{n+1} (M_j)! \right)^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ M_j \geq 1}}^{n+1} \prod_{i=0}^{M_j-1} (k \lambda_j(x) - i),$$

dove le $\lambda_j(x)$ sono le coordinate baricentriche relative ai punti $\{a_j\}_{j=1}^{n+1}$. Tali polinomi sono di tipo Lagrangiano nel senso che

$$P_M(a_\nu) = \delta_{M\nu} = \begin{cases} 1 & \text{se } M_1 = \nu_1, \dots, M_n = \nu_n \\ 0 & \text{se esiste } i \text{ per cui } M_i \neq \nu_i, \end{cases}$$

essendo a_ν un punto di Σ_k . Per ogni n -simpleso K di \mathbb{R}^n e per ogni intero $k \geq 0$, l'elemento finito (K, P_k, Σ_k) , dove Σ_k è il reticolo principale di ordine k e P_k l'insieme suddetto dei polinomi di base di grado k , è definito n -simpleso di tipo k .

Per ogni intero $k \geq 0$, due elementi finiti n -simplessi di tipo k sono affini equivalenti. Questa importante proprietà implica che, se

$$(\hat{K}, P_k, \hat{\Sigma}_k) \quad \text{e} \quad (K, P_k, \Sigma_k)$$

sono due elementi finiti n -simplessi di tipo k , ad ogni punto $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ di \hat{K} si può associare il punto $x = (x_1, \dots, x_n)$ di K mediante la relazione

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = A\hat{A}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

essendo A e \hat{A} le matrici che definiscono gli n -simplessi K e \hat{K} mediante i vertici $\{a_j\}$ e $\{\hat{a}_j\}$ rispettivamente. Quanto detto implica che ogni elemento finito di Lagrange (K, Φ, Σ) , affina-equivalente a un n -simpleso di tipo k , è un n -simpleso di tipo k . Di conseguenza, per conoscere le proprietà di tutti gli n -simplessi affini-equivalenti di ordine k , è sufficiente analizzare quella di un n -simpleso di ordine k di riferimento. Per ovvi motivi di semplicità l' n -simpleso \hat{K} di ordine K di riferimento più utilizzato è quello caratterizzato dai vertici $\hat{a}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\hat{a}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\hat{a}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ e $\hat{a}_{n+1} = (0, \dots, 0)$. In questo caso le coordinate baricentriche sono

$$\hat{\lambda}_i(\hat{x}) = \hat{x}_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad \hat{\lambda}_{n+1}(\hat{x}) = 1 - \sum_{i=1}^n \hat{x}_i.$$

Vediamo ora, con qualche dettaglio, alcuni degli esempi di elementi finiti (K, P, Σ) più utilizzati. Per $n = 2$, K è un triangolo di vertici a_1 , a_2 e a_3 .

- (a) Per $k = 0$, il triangolo di tipo 0 è caratterizzato da: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$, $\Sigma_0 = \{a_0\}$, essendo $a_0 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$, e $P = \Pi_0$ con $p_0(x) \equiv 1$ per ogni $x \in K$.
- (b) Per $k = 1$, il triangolo di tipo 1 è ottenuto ponendo $\Sigma = \Sigma_1 = \{a_j\}_{j=1}^3$, $P = P_1$, con le funzioni di base così definite, in funzione delle coordinate parametriche: $P_i = \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$.
- (c) Per $k = 2$, il triangolo di tipo 2 è caratterizzato da: $\Sigma = \Sigma_2 = \{a_i\}_{i=1}^3 \cup \{a_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq 3}$, essendo $a_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$, $1 \leq i < j \leq 3$; $P = P_2$, essendo $P_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1)$ per $i = 1, 2, 3$, $P_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j$ per $1 \leq i < j \leq 3$.

Le considerazioni possono essere estese, senza alcuna difficoltà sostanziale, al caso dei domini tridimensionali. Relativamente all'errore di approssima-

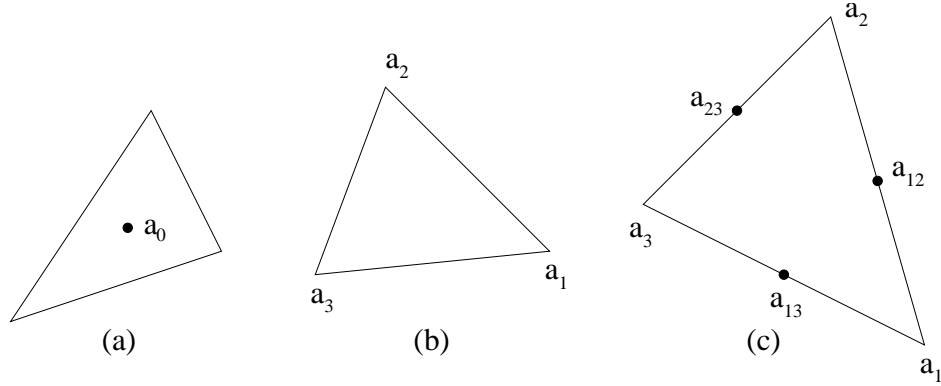


Figura 6.1: Pannello (a): Triangolo di tipo 0, $\dim \Sigma_0 = 1$, a_0 baricentro del triangolo. Pannello (b): Triangolo di tipo 1, $\dim \Sigma_1 = 2$. Pannello (c): Triangolo di tipo 2, $\dim \Sigma_2 = 6$.

zione in spazi di Sobolev, esistono vari risultati che dipendono dalla regolarità della funzione di approssimazione, dalla geometria dell'insieme chiuso e limitato, dagli elementi finiti di Lagrange e della classe dei polinomi approssimanti.

Teorema 6.3 *Sia K un sottoinsieme chiuso, limitato e convesso di \mathbb{R}^n con frontiera di classe C^1 a tratti e (K, P_k, Σ_k) un elemento finito di Lagrange, dove Σ_k è il reticolo principale di K e P_k l'insieme dei polinomi di base di grado k . Sia inoltre Π un operatore di proiezione da $H^{k+1}(K)$ a $H^m(K)$, $0 \leq m \leq k + 1$. Allora esiste una costante c tale che*

$$|v - \Pi v|_{m,K} \leq c \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K} \quad \forall v \in H^{k+1}(K),$$

essendo h_K il diametro di K e ρ_K la sfericità di K , ossia il massimo diametro della sfera contenuta in K .

Da notare che, in uno spazio di Sobolev $H^m(\Omega)$,

$$|f|_{k,\Omega} = \left(\sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2},$$

essendo

$$|f|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

6.1 Triangularizzazione del Dominio

Gli elementi finiti di Lagrange rappresentano lo strumento base per l'approssimazione dei problemi ellittici. Anche se la teoria è molto ampia, possiamo limitarci al caso in cui il dominio Ω è un poliedro. Più precisamente, indicato con Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n con frontiera Γ C^1 a tratti, sia $u \in V$ la soluzione del problema ellittico

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V,$$

essendo $a(u, v)$ e $F(v)$ la forma bilineare e la forma lineare precedentemente definite per i problemi ellittici del secondo ordine. Supponendo che Ω sia un poliedro, consideriamo una sua decomposizione finita

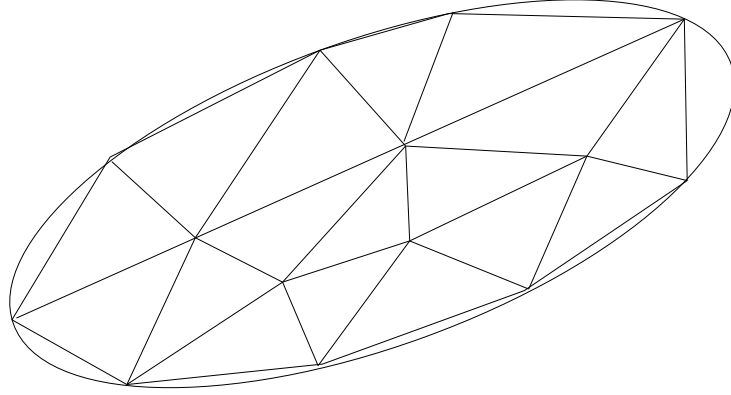
$$(6.5) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{F}_h} K$$

tale che:

- (a) ogni elemento K di \mathcal{F}_h è un poliedro di \mathbb{R}^n non vuoto;
- (b) gli interni di due poliedri distinti di \mathcal{F}_h sono disgiunti;
- (c) ogni faccia di un poliedro $K_1 \in \mathcal{F}_h$ è, o faccia di un altro poliedro $K_2 \in \mathcal{F}_h$ (nel qual caso K_1 e K_2 sono adiacenti), o parte della frontiera Γ di Ω .

Definizione 6.4 *Si definisce triangolazione di $\bar{\Omega}$, ogni decomposizione di $\bar{\Omega}$ che soddisfa le suddette tre proprietà. Si definisce inoltre diametro h della triangolazione il valore*

$$(6.6) \quad h = \max_{K \in \mathcal{F}_K} h_K,$$



essendo h_K il diametro del poliedro K . Supponiamo inoltre che a ogni poliedro K di \mathcal{F}_h sia associato un elemento finito di Lagrange (K, P_K, Σ_K) tale che

$$P_K \subset H^1(K).$$

Definiamo inoltre gli spazi di dimensione finita

$$(6.7) \quad X_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_K \in P_K, \forall K \in \mathcal{F}_h\}$$

$$(6.8) \quad X_{0h} = \{v \in X_h : v|_\Gamma = 0\}.$$

Di conseguenza, X_h è un sottospazio di $H^1(\Omega)$ e X_{0h} lo è di $H_0^1(\Omega)$.

La teoria variazionale sui problemi ellittici comporta allora la soluzione del problema

$$(6.9) \quad a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

essendo $V_h = X_h$ se $V = H^1(\Omega)$, $V_h = X_{0h}$ se $V = H_0^1(\Omega)$.

Allo scopo di costruire una base di elementi di V_h è necessario introdurre l'operatore di proiezione Π_h che ad ogni funzione v continua su $\overline{\Omega}$ associa la funzione $\Pi_h v$ di $L^2(\Omega)$ definita nel modo seguente:

$$(6.10) \quad \text{per ogni } K \in \mathcal{F}_h \text{ e ogni } x \in \overset{0}{K}, \quad \Pi_h v(v) = \Pi_K v(x),$$

dove Π_K è l'operatore di P_K -interpolazione su Σ_K . Per motivi di continuità occorre garantirsi la compatibilità tra elementi finiti, ossia che per ogni coppia $\{K_1, K_2\}$ di poliedri adiacenti di \mathcal{F}_h , aventi in comune la faccia $K' = K_1 \cap K_2$, valgono le seguenti proprietà:

$$(6.11) \quad P_{K_1}|_{K'} = P_{K_2}|_{K'}$$

$$(6.12) \quad \Sigma_{K_1} \cap K' = \Sigma_{K_2} \cap K'$$

Teorema 6.5 *Sia \mathcal{F}_h una triangolazione di $\bar{\Omega}$ e sia $(K, P_K, \Sigma_K)_{K \in \mathcal{F}_h}$ una famiglia associata di elementi finiti. Supponiamo inoltre che siano soddisfatte le condizioni di compatibilità (6.11)-(6.12) e che per ogni $K \in \mathcal{F}_h$, (K, P_K, Σ_K) sia un elemento finito di classe C^0 , essendo P_K un sottospazio di $H^1(K)$. Allora l'operatore di interpolazione Π_K definito dalla (6.10) è continuo e, più precisamente, risulta*

$$\begin{aligned} X_h &= \{ \Pi_h v : v \in C^0(\bar{\Omega}) \} \\ X_{0h} &= \{ \Pi_h v : v \in C^0(\bar{\Omega}), v|_{\Gamma} = 0 \}, \end{aligned}$$

essendo X_h e X_{0h} definiti dalle (6.7)-(6.8).

Bibliografia

- [1] O. Axelsson and V.A. Barger, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*, Academic Press, Orlando, 1984.
- [2] D. Greenspan and V. Casulli, *Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science and Engineering*, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1988.
- [3] R. Kress, *Numerical Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **181**, Springer, New York, 1998.
- [4] A. Quarteroni, *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*, Springer, Milano, 2000.
- [5] P.A. Raviart e J.M. Thomas, *Introduzione all'Analisi Numerica delle Equazioni alle Derivate Parziali*, Masson, Milano, 1989.