Calcolo Scientifico e Matematica Applicata

Primo Parziale, 14.01.2019

Risolvere gli esercizi 2, 3, 4 oppure, in alternativa, gli esercizi 1, 2, 3, 5. Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 14$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$, $5 \mapsto 4$.

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} + 9u_{xt} + 14u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 2x^2 + 1, \quad u_t(x,0) = x + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6u_x + 10u + x + 2, \quad 0 \le x \le 4, \\ u(0,t) = -\frac{13}{50}, \qquad u(4,t) = -\frac{33}{50}, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. Determinare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + (25 + \lambda)y = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \\ y(0) + 3y'(0) = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

4. Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze centrali, del seguente problema ellittico:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + x\cos^2(\pi y)u_x + (x^4 + y^4)u_y - (3 - \sin(xy))u = \cos(\pi xy), \\ \qquad\qquad -1 \le x \le 4, \ -2 \le y \le 5, \\ u(-1,y) = f_1(y), \quad u(4,y) = f_2(y), \\ u(x,-2) = g_1(x), \quad u(x,5) = g_2(x). \end{cases}$$

5. Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze finite centrali, del seguente problema con valori agli estremi:

$$\begin{cases} y'' + (2x^2 + 1)y' - (1 + \sin^2 x)y = x^2, \quad -1 \le x \le 4, \\ y(-1) = 4, \quad y(4) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni

1. Sostituendo $u(x,t) = f(x-ct)$ for $f \in C^2(\mathbb{R})$ we find $(c-2)(c-7) = c^2 - 9c + 14 = 0$. Quindi

$$u(x,t) = f(x-2t) + g(x-7t),$$

dove

$$f(x) + g(x) = 2x^2 + 1, \qquad -2f'(x) - 7g'(x) = x + \tfrac{3}{2}.$$

Quindi

$$f(x) = \tfrac{29}{10}x^2 + \tfrac{3}{10}x + \tfrac{7}{5} + \tfrac{1}{5}c, \qquad g(x) = -\tfrac{9}{10}x^2 - \tfrac{3}{10}x - \tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{5}c,$$

dove c è un'opportuna costante. Di conseguenza,

$$u(x,t) = 2x^2 + xt - \tfrac{65}{2}t^2 + \tfrac{3}{2}t + 1.$$

2. **Conversione in un problema omogeneo**. Per arrivare al problema iperbolico omogeneo

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} - 6v_x + 10v, & 0 \le x \le 4,\ t \ge 0, \\ v(0,t) = v(4,t) = 0, \\ v(x,0) = u_0(x) - \psi(x), & v_t(x,0) = 0, \end{cases}$$

sostituiamo $u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$ e risolviamo il problema al contorno

$$\begin{cases} \psi'' - 6\psi' + 10\psi = -x - 2, \\ \psi(0) = -\tfrac{13}{50}, \quad \psi(4) = -\tfrac{33}{50}. \end{cases}$$

Ponendo $\psi_p(x) = Ax + B$ si ha: $A = -\frac{1}{10}$ e $B = -\frac{13}{50}$, cioè $\psi_p(x) = -\frac{1}{10}x - \frac{13}{50}$. Dunque

$$\psi(x) = -\tfrac{1}{10}x - \tfrac{13}{50}.$$

Separazione delle variabili. Sia $v(x,t) = X(x)T(t)$, dove $X(0) = X(4) = T'(0) = 0$. In tal caso

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - 6\frac{X'(x)}{X(x)} + 10 = -\lambda.$$

Partendo dall'ODE

$$X''(x) - 6X'(x) + (10+\lambda)X(x) = 0$$

con condizioni di Dirichlet $X(0) = X(4) = 0$, ci risultano tre casi. **Nel caso a),** $\lambda > -1$: $\alpha = 3 \pm i\sqrt{1+\lambda}$. In tal caso

$$X(x) = e^{3x}\left\{a\cos(x\sqrt{1+\lambda}\,) + b\sin(x\sqrt{1+\lambda}\,)\right\}.$$

Poichè $X(0) = a$ e $e^{-12}X(4) = a\cos(\sqrt{1+\lambda}\,) + b\sin(\sqrt{1+\lambda}\,)$, si ha:

$$a = 0, \quad \sqrt{1+\lambda_n} = n\pi \ (n = 1, 2, \ldots), \quad X_n(x) \simeq e^{3x}\sin(n\pi x).$$

Nel caso b), $\lambda = -1$: $\alpha = 3$ (zero doppio). In tal caso

$$X(x) = e^{3x}(a + bx),$$

implicando che $X(0) = a = 0$ e $e^{-12}X(4) = a + 4b = 0$, cioè $a = b = 0$ (nessun autovalore). **Nel caso c),** $\lambda < -1$: $\alpha = 3 \pm \sqrt{-1-\lambda} = 3 \pm \beta]$. In tal caso

$$X(x) \simeq e^{3x}\left\{a\,e^{\beta x} + b\,e^{-\beta x}\right\},$$

implicando che $X(0) = a + b = 0$ e $e^{-12}X(4) = (3+\beta)e^{4\beta}a + (3-\beta)e^{-4\beta}b = 0$, cioè

$$e^{4\beta}b\left((3-\beta)e^{-8\beta} - (3+\beta)\right) = 0.$$

Non ci sono valori positivi di β per cui i grafici di $y = e^{-8\beta}$ e $y = [(3+\beta)/(3-\beta)]$ si intersecano. Quindi nessun autovalore.

Soluzione finale. Dal sistema al contorno

$$T_n''(t) = -\lambda_n T_n(t), \qquad T_n'(0) = 0,$$

segue $T_n(t) \simeq \cos(\sqrt{n^2\pi^2 - 1})$; si noti che $\pi^2 > 1$. Quindi la soluzione ha la rappresentazione

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{3x}\sin(n\pi x)\cos(t\sqrt{n^2\pi^2 - 1}),$$

dove i coefficienti c_n seguono dalla serie di Fourier seno

$$e^{-3x}\left(u_0(x) - \psi(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\sin(n\pi x).$$

Infatti,

$$c_n = \tfrac{1}{2} \int_0^4 e^{-3x} \left(u(x,0) - \psi(x)\right) \sin(n\pi x)\, dx,$$

essendo

$$\int_0^4 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x)\, dx = \begin{cases} 2, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

3. L'ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2 + 6\alpha + 25 + \lambda = 0$, conducendo ai seguenti tre casi: a) $\lambda > -16$ e $\alpha = -3 \pm i\beta$ per $\beta = \sqrt{16+\lambda}$; b) $\lambda = -16$ e $\alpha = -3$ [zero doppio]; c) $\lambda < -16$ e $\alpha = -3 \pm \beta$ per $\gamma = \sqrt{-16-\lambda}$. **Nel caso a)** si ha:

$$y(x) = e^{-3x} \left\{ a\, \cos(\beta x) + b\, \sin(\beta x) \right\}.$$

Calcolando

$$y(x) + 3y'(x) = e^{-3x} \left\{ [-8a + 3\beta b] \cos(\beta x) + [-3\beta a - 8b] \sin(\beta x) \right\},$$

si ottiene il seguente sistema lineare per le costanti a e b:

$$-8a + 3\beta b = 0, \quad a\, \cos(\beta\pi) + b\, \sin(\beta\pi) = 0.$$

Quindi $a = \frac{3}{8}\beta b$ e

$$b \left\{ \tfrac{3}{8}\beta\, \cos(\beta\pi) + \sin(\beta\pi) \right\} = 0.$$

Bisogna trovare tutti gli zeri positivi β dell'equazione

$$\mathrm{tg}\,(\beta\pi) = -\tfrac{3}{8}\beta,$$

cioè gli zeri $\frac{2n-1}{2} < \beta_n < \frac{2n+1}{2}$ per $n = 1, 2, \ldots$ il che conduce agli autovalori $\lambda_n = \beta_n^2 - 16$. Inoltre,

$$y_n(x) = \tfrac{3}{8}\beta_n b\, e^{-3x} \left\{ \cos(\beta_n x) + \tfrac{8}{3} \frac{\sin(\beta_n x)}{\beta_n} \right\}.$$

Nel caso b) si ha:

$$y(x) = e^{-3x}(a + bx).$$

Calcolando $y + 3y' = e^{-3x} \left[-8a + 3b - 8bx\right]$, si ottiene il sistema lineare

$$-8a + 3b = 0, \qquad a + \pi b = 0,$$

oppure: $a = b = 0$ [nessun autovalore]. **Nel caso c)** si ha:

$$y(x) = e^{-3x} \left\{ a\, e^{\gamma x} + b\, e^{-\gamma x} \right\}.$$

Calcolando

$$y + 3y' = e^{-3x} \left((3\gamma - 8) a\, e^{\gamma x} - (3\gamma + 8) b\, e^{-\gamma x} \right),$$

risulta il sistema lineare

$$(3\gamma - 8)a = (3\gamma + 8)b, \qquad a + e^{-2\pi\beta}\, b = 0.$$

Quindi bisogna trovare gli zeri positivi dell'equazione

$$e^{-2\pi\gamma} = \frac{8 + 3\gamma}{8 - 3\gamma}.$$

Tali zeri non esistono, poichè i) $e^{-2\pi\gamma}$ è decrescente e positiva per $\gamma \geq 0$, ii) $\frac{8+3\gamma}{8-3\gamma}$ è crescente e positiva per $0 \leq \gamma < \frac{8}{3}$, iii) $\frac{8+3\gamma}{8-3\gamma}$ è negativa per $\beta > \frac{8}{3}$, iv) i due grafici passano per il punto $(0, 1)$. Nessun autovalore.
In conclusione, scrivendo l'ODE nella forma

$$-(e^{6x} y')' - 25 e^{6x} y = \lambda e^{6x} y,$$

si trova la funzione peso $r(x) = e^{6x}$. In tal caso

$$\int_0^\pi y_n(x) y_m(x) e^{6x}\, dx = \begin{cases} N_n, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

dove N_n sono opportune costanti positive.

4. Sia $x_i = -1 + ih$ per $h = \frac{5}{n+1}$ e $y_j = -2 + jk$ per $k = \frac{7}{m+1}$. Poniamo $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, $f_{sj} = f_s(y_j)$ [$j = 0, 1, \ldots, m+1$] e $g_{si} = g_s(x_i)$ [$i = 0, 1, \ldots, n+1$], essendo $s = 1, 2$. Allora[1]

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} \\ &+ x_i \cos^2(\pi y_j) \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + (x_i^4 + y_j^4) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} \\ &- (3 - \sin(x_i y_j)) u_{ij} = r_{ij}, \end{aligned}$$

[1] Le ipotesi di continuità $f_{10} = g_{10} = u(-1, -2)$, $f_{20} = g_{2,m+1} = u(4, -2)$, $f_{1,m+1} = g_{20} = u(-1, 5)$ e $f_{2,m+1} = g_{2,m+1} = u(4, 5)$ non vengono mai utilizzate nel formulare la parte a destra del sistema lineare.

dove

$$r_{ij} = \begin{cases} \cos(\pi x_i y_j), & i,j = 2,\dots,n-1, \\ \cos(\pi x_i y_1) - \frac{1}{h^2} u_{i0}, & i = 2,\dots,n+1,\ j=1, \\ \cos(\pi x_i y_m) - \frac{1}{h^2} u_{i,m+1}, & i = 1,\dots,n-1,\ j=m, \\ \cos(\pi x_1 y_j) - \frac{1}{k^2} u_{0j}, & j = 2,\dots,m+1,\ i=1, \\ \cos(\pi x_n y_j) - \frac{1}{k^2} u_{n+1,j}, & j = 1,\dots,m-1,\ i=n, \\ \cos(\pi x_1 y_1) - \frac{1}{h^2} u_{10} - \frac{1}{k^2} u_{01}, & i=j=1, \\ \cos(\pi x_1 y_m) - \frac{1}{h^2} u_{0m} - \frac{1}{k^2} u_{1,m+1}, & i=1,\ j=m, \\ \cos(\pi x_n y_1) - \frac{1}{h^2} u_{n+1,1} - \frac{1}{k^2} u_{n0}, & i=n,\ j=1, \\ \cos(\pi x_n y_m) - \frac{1}{h^2} u_{n+1,m} - \frac{1}{k^2} u_{n,m+1}, & i=n,\ j=m. \end{cases}$$

L'elemento (i,j) viene "circondato" dagli elementi $(i+1,j)$, $(i-1,j)$, $(i,j+1)$ e $(i,j-1)$ [schema a 5 punti]. Controllando se la matrice del sistema è strettamente diagonalmente dominante, si ha:

$$\left|\frac{1}{h^2} + \frac{x_i \cos^2(\pi y_j)}{2h}\right| + \left|\frac{1}{h^2} - \frac{x_i \cos^2(\pi y_j)}{2h}\right| + \left|\frac{1}{k^2} + \frac{x_i^4 + y_j^4}{2k}\right|$$
$$+ \left|\frac{1}{k^2} - \frac{x_i^4 + y_j^4}{2k}\right| < \left|\frac{2}{h^2} + \frac{2}{k^2} + (3 - \sin(x_i y_j))\right|,$$

il che è vero se $0 < h \leq \frac{1}{2}$ e $0 < k \leq \frac{2}{881}$ [cioè, se $n \geq 9$ e $m \geq 3083$].

5. Per $x_i = -1 + ih$ e $h = \frac{5}{n+1}$ otteniamo il sistema lineare

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + (2x_i^2 + 1)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - (1 + \sin^2 x_i) y_i$$
$$= \begin{cases} x_1^2 - 4\left(\frac{1}{h^2} - \frac{2(-1+h)^2+1}{2h}\right), & i = 1, \\ x_i^2, & i = 2,\dots,n-1, \\ x_n^2 - \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2(4-h)^2+1}{2h}\right), & i = n. \end{cases}$$

La matrice del sistema è reale, tridiagonale e strettamente diagonalmente dominante, quest'ultimo grazie alla stima (per $0 < h < \frac{2}{33}$)

$$\underbrace{\left|\frac{1}{h^2} + \frac{2x_i^2 + 1}{2h}\right| + \left|\frac{1}{h^2} - \frac{2x_i^2 + 1}{2h}\right|}_{=\frac{2}{h^2} \text{ se } 0<h\leq\frac{2}{2x_i^2+1}} < \underbrace{\left|-\frac{2}{h^2} - (1 + \sin^2 x_i)\right|}_{\geq \frac{2}{h^2}+1}$$

per $i = 1, 2, \dots, n$.