Calcolo Scientifico e Matematica Applicata
Primo Parziale, 15.11.2017

Risolvere gli esercizi 2, 3, 4 oppure, in alternativa, gli esercizi 1, 2, 3, 5. Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 14$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$, $5 \mapsto 4$.

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema iperbolico:
$$\begin{cases} u_{tt} + 6u_{xt} + 8u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 2x + 1, \quad u_t(x,0) = x^2. \end{cases}$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:
$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} - 4u_x + u + x + 2, \quad 0 \leq x \leq 2,\ t \geq 0, \\ u(0,t) = 1, \quad u(2,t) = -8, \\ u(x,0) = \cos \frac{\pi x}{2}, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. Determinare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:
$$\begin{cases} y'' + 4y' + (5 + \lambda)y = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \\ y(0) + 3y'(0) = 0, \\ y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

4. Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze centrali, del seguente problema ellittico:
$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{yy} + x\sin^2(\pi y)u_x + (x^2 + y^2)u_y - (2 - \cos(xy))u = xy\sin(\pi xy), \\ \qquad\qquad -1 \leq x \leq 3,\ -2 \leq y \leq 4, \\ u(-1,y) = f_1(y), \quad u(3,y) = f_2(y), \\ u(x,-2) = g_1(x), \quad u(x,4) = g_2(x). \end{cases}$$

5. Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze finite centrali, del seguente problema con valori agli estremi:
$$\begin{cases} y'' + (x^2 + 1)y' - (3 + \sin x)y = x^3, \quad -2 \leq x \leq 5, \\ y(-2) = 4, \quad y(5) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni

1. Scriviamo la soluzione nella seguente forma:

$$u(x,t) = f(x-2t) + g(x-4t),$$

dove $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 2x + 1, \\ -2f'(x) - 4g'(x) = x^2, \end{cases}$$

otteniamo

$$f(x) = \tfrac{1}{6}x^3 + 4x + c + 1, \qquad g(x) = -\tfrac{1}{6}x^3 - 2x - c,$$

essendo c un'opportuna costante. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{6}(x-2t)^3 + 4(x-2t) + 1 - \tfrac{1}{6}(x-4t)^3 - 2(x-4t) \\ &= x^2t - 6xt^2 + \tfrac{28}{3}t^3 + 2x + 1. \end{aligned}$$

2. **Conversione in un problema omogeneo**. Per arrivare al problema iperbolico omogeneo

$$\begin{cases} v_{tt} = 4v_{xx} - 4v_x + v, \quad 0 \le x \le 2,\ t \ge 0, \\ v(0,t) = v(2,t) = 0, \\ v(x,0) = \cos\frac{\pi x}{2} - \psi(x), \quad v_t(x,0) = 0, \end{cases}$$

sostituiamo $u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$ e risolviamo il problema al contorno

$$\begin{cases} 4\psi'' - 4\psi' + \psi = -x - 2, \\ \psi(0) = 1, \quad \psi(2) = -8. \end{cases}$$

Ponendo $\psi_p(x) = Ax + B$ si ha: $A = -1$ e $B = -6$, cioè $\psi_p(x) = -x - 6$. Dunque $\psi(x) = -x - 6 + (a + bx)e^{\frac{1}{2}x}$ per opportune costanti a e b. Utilizzando $\psi(0) = -6 + a$ e $\psi(2) = -8 + (a + 2b)e$ si ha: $a = 7$ e $b = -\frac{7}{2}$. Quindi

$$\psi(x) = -x - 6 + (7 - \tfrac{7}{2}x)e^{\frac{1}{2}x}.$$

Separazione delle variabili. Sia $v(x,t) = X(x)T(t)$, dove $X(0) = X(2) = T'(0) = 0$. In tal caso

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = 4\frac{X''(x)}{X(x)} - 4\frac{X'(x)}{X(x)} + 1 = -\lambda.$$

Partendo dall'ODE

$$4X''(x) - 4X'(x) + (1+\lambda)X(x) = 0$$

con condizioni di Dirichlet $X(0) = X(2) = 0$, ci risultano tre casi. **Nel caso a),** $\lambda > 0$: $\alpha = \frac{1}{2}[1 \pm i\sqrt{2\lambda}]$. In tal caso

$$X(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left\{a\cos(\tfrac{1}{2}x\sqrt{2\lambda}\,) + b\sin(\tfrac{1}{2}x\sqrt{2\lambda}\,)\right\}.$$

Poichè $X(0) = a$ e $\frac{1}{e}X(2) = a\cos(\sqrt{2\lambda}\,) + b\sin(\sqrt{2\lambda}\,)$, si ha:

$$a = 0, \quad \sqrt{2\lambda_n} = n\pi \ (n = 1, 2, \ldots), \quad X_n(x) \simeq e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Nel caso b), $\lambda = 0$: $\alpha = \frac{1}{2}$ (zero doppio). In tal caso

$$X(x) = e^{\frac{1}{2}x}(a + bx),$$

implicando che $X(0) = a = 0$ e $\frac{1}{2}X(2) = a + 2b = 0$, cioè $a = b = 0$ (nessun autovalore). **Nel caso c),** $\lambda < 0$: $\alpha = \frac{1}{2}[1 \pm \sqrt{-2\lambda}]$. In tal caso, per $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{-2\lambda}$, si ha:

$$X(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left\{a\,e^{\beta x} + b\,e^{-\beta x}\right\},$$

implicando che $X(0) = a + b = 0$ e $\frac{1}{e}X(2) = (\frac{1}{2}+\beta)a + (\frac{1}{2}-\beta)b = 0$, cioè $a = b = 0$ (nessun autovalore).

Soluzione finale. Dal sistema al contorno

$$T_n''(t) = -\lambda_n T_n(t), \qquad T_n'(0) = 0,$$

segue $T_n(t) \simeq \cos(\frac{n\pi t}{\sqrt{2}})$. Quindi la soluzione ha la rappresentazione

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{n\pi x}{2})\cos(\frac{n\pi t}{\sqrt{2}}),$$

dove i coefficienti c_n seguono dalla serie di Fourier seno

$$e^{-\frac{1}{2}x}\,(u(x,0)-\psi(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\sin(\frac{n\pi x}{2}).$$

Infatti,

$$c_n = \int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,(u(x,0)-\psi(x))\sin(\frac{n\pi x}{2})\,dx,$$

essendo

$$\int_0^2 \sin(\frac{n\pi x}{2})\sin(\frac{m\pi x}{2})\,dx = \begin{cases} 1, & n=m, \\ 0, & n\neq m. \end{cases}$$

3. L'ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2+4\alpha+5+\lambda=0$, conducendo ai seguenti tre casi: a) $\lambda>-1$ e $\alpha=-2\pm i\beta$ per $\beta=\sqrt{1+\lambda}$; b) $\lambda=-1$ e $\alpha=-2$ [zero doppio]; c) $\lambda=-1$ e $\alpha=-2\pm\beta$ per $\beta=\sqrt{-1-\lambda}$. **Nel caso a)** si ha:

$$y(x) = e^{-2x}\left\{a\,\cos(\beta x)+b\,\sin(\beta x)\right\}.$$

Calcolando

$$y(x)+3y'(x) = e^{-2x}\left\{[-5a+3\beta b]\cos(\beta x)+[-3\beta a-5b]\sin(\beta x)\right\},$$

si ottiene il seguente sistema lineare per le costanti a e b:

$$-5a+3\beta b=0, \quad a\,\cos(2\beta\pi)+b\,\sin(2\beta\pi)=0.$$

Quindi $a=\frac{3}{5}\beta b$ e

$$b\left\{\tfrac{3}{5}\beta\,\cos(2\beta\pi)+\sin(2\beta\pi)\right\}=0.$$

Bisogna trovare tutti gli zeri positivi β dell'equazione

$$\mathrm{tg}\,(2\beta\pi) = -\tfrac{3}{5}\beta,$$

cioè gli zeri $\frac{2n-1}{4}<\beta_n<\frac{2n+1}{4}$ per $n=1,2,\ldots$ il che conduce agli autovalori $\lambda_n=\beta_n^2-1$. Inoltre,

$$y_n(x) = \tfrac{3}{5}\beta_n b\,e^{-2x}\left\{\cos(\beta_n x)+\tfrac{5}{3}\,\frac{\sin(\beta_n x)}{\beta_n}\right\}.$$

Nel caso b) si ha:
$$y(x) = e^{-2x}(a + bx).$$
Calcolando $y + 3y' = e^{-2x}\,[-5a + 3b - 5bx]$, si ottiene il sistema lineare
$$-5a + 3b = 0, \qquad a + 2\pi b = 0,$$
oppure: $a = b = 0$ [nessun autovalore]. **Nel caso c)** si ha:
$$y(x) = e^{-2x}\left\{a\, e^{\beta x} + b\, e^{-\beta x}\right\}.$$
Calcolando
$$y + 3y' = e^{-2x}\left((3\beta - 5)a\, e^{\beta x} - (3\beta + 5)b\, e^{-\beta x}\right),$$
risulta il sistema lineare
$$(3\beta - 5)a = (3\beta + 5)b, \qquad a + e^{-4\pi\beta}\, b = 0.$$
Quindi bisogna trovare gli zeri positivi dell'equazione
$$e^{-4\pi\beta} = \frac{5 + 3\beta}{5 - 3\beta}.$$
Tali zeri non esistono, poichè i) $e^{-4\pi\beta}$ è decrescente e positiva per $\beta \geq 0$, ii) $\frac{5+3\beta}{5-3\beta}$ è crescente e positiva per $0 \leq \beta < \frac{5}{3}$, iii) $\frac{5+3\beta}{5-3\beta}$ è negativa per $\beta > \frac{5}{3}$, iv) i due grafici passano per il punto $(0, 1)$. Nessun autovalore.
In conclusione, scrivendo l'ODE nella forma
$$-(e^{4x}y')' - 5e^{4x}y = \lambda e^{4x}y,$$
si trova la funzione peso $r(x) = e^{4x}$. In tal caso
$$\int_0^{2\pi} y_n(x)y_m(x)e^{4x}\,dx = \begin{cases} N_n, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$
dove N_n sono opportune costanti positive.

4. Sia $x_i = -1 + ih$ per $h = \frac{4}{n+1}$ e $y_j = -2 + jk$ per $k = \frac{6}{m+1}$. Poniamo $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, $f_{sj} = f_s(y_j)$ [$j = 0, 1, \ldots, m + 1$] e $g_{si} = g_s(x_i)$ [$i =$

$0,1,\ldots,n+1]$, essendo $s=1,2$. Allora[1]

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2}+2\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{k^2}$$
$$+x_i\sin^2(\pi y_j)\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}+(x_i^2+y_j^2)\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2k}$$
$$-(2-\cos(x_iy_j))u_{ij}=r_{ij},$$

dove

$$r_{ij}=\begin{cases} x_iy_j\sin(\pi x_iy_j), & i,j=2,\ldots,n-1,, \\ x_iy_1\sin(\pi x_iy_1)-\frac{1}{h^2}u_{i0}, & i=2,\ldots,n+1,\ j=1, \\ x_iy_m\sin(\pi x_iy_m)-\frac{1}{h^2}u_{i,m+1}, & i=1,\ldots,n-1,\ j=m, \\ x_1y_j\sin(\pi x_1y_j)-\frac{2}{k^2}u_{0j}, & j=2,\ldots,m+1,\ i=1, \\ x_ny_j\sin(\pi x_ny_j)-\frac{2}{k^2}u_{n+1,j}, & j=1,\ldots,m-1,\ i=n, \\ x_1y_1\sin(\pi x_1y_1)-\frac{1}{h^2}u_{10}-\frac{2}{k^2}u_{01}, & i=j=1, \\ x_1y_m\sin(\pi x_1y_m)-\frac{1}{h^2}u_{0m}-\frac{2}{k^2}u_{1,m+1}, & i=1,\ j=m, \\ x_ny_1\sin(\pi x_ny_1)-\frac{1}{h^2}u_{n+1,1}-\frac{2}{k^2}u_{n0}, & i=n,\ j=1, \\ x_ny_m\sin(\pi x_ny_m)-\frac{1}{h^2}u_{n+1,m}-\frac{2}{k^2}u_{n,m+1}, & i=n,\ j=m. \end{cases}$$

L'elemento (i,j) viene "circondato" dagli elementi $(i+1,j)$, $(i-1,j)$, $(i,j+1)$ e $(i,j-1)$. Controllando se la matrice del sistema è strettamente diagonalmente dominante, si ha:

$$\left|\frac{1}{h^2}+\frac{x_i\sin^2(\pi y_j)}{2h}\right|+\left|\frac{1}{h^2}-\frac{x_i\sin^2(\pi y_j)}{2h}\right|+\left|\frac{2}{k^2}+\frac{x_i^2+y_j^2}{2k}\right|$$
$$+\left|\frac{2}{k^2}-\frac{x_i^2+y_j^2}{2k}\right|<\left|\frac{2}{h^2}+\frac{4}{k^2}+(2-\cos(x_iy_j))\right|,$$

il che è vero se $0<h\leq\frac{2}{5}$ e $0<k\leq\frac{4}{61}$.

[1]Le ipotesi di continuità $f_{10}=g_{10}=u(-1,-2)$, $f_{20}=g_{2,m+1}=u(5,-2)$, $f_{1,m+1}=g_{20}=u(-1,6)$ e $f_{2,m+1}=g_{2,m+1}=u(5,6)$ non vengono mai utilizzate nel formulare la parte a destra del sistema lineare.

5. Per $x_i = -2 + ih$ e $h = \frac{7}{n+1}$ otteniamo il sistema lineare

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + (x_i^2 + 1)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - (3 + \sin x_i)y_i$$
$$= \begin{cases} x_1^3 - 4\left(\frac{1}{h^2} - \frac{(-2+h)^2+1}{2h}\right), & i = 1, \\ x_i^3, & i = 2, \dots, n-1, \\ x_n^3 - \left(\frac{1}{h^2} + \frac{(5-h)^2+1}{2h}\right), & i = n. \end{cases}$$

La matrice del sistema è reale, tridiagonale e strettamente diagonalmente dominante, quest'ultimo grazie alla stima (per $0 < h < 2$)

$$\underbrace{\left|\frac{1}{h^2} + \frac{x_i^2+1}{2h}\right| + \left|\frac{1}{h^2} - \frac{x_i^2+1}{2h}\right|}_{=\frac{2}{h^2} \text{ se } 0<h\leq\frac{2}{x_i^2+1}} < \underbrace{\left|-\frac{2}{h^2} - (3 + \sin x_i)\right|}_{\geq\frac{2}{h^2}+2}$$

per $i = 1, 2, \dots, n$.