Calcolo Scientifico e Matematica Applicata

Primo Parziale, 19.11.2018

Risolvere gli esercizi 2, 3, 4 oppure, in alternativa, gli esercizi 1, 2, 3, 5. Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 14$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$, $5 \mapsto 4$.

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} - 8u_{xt} + 12u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 3x + 1, \quad u_t(x,0) = x^2 - 1. \end{cases}$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + u + x + 3, \quad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \\ u(0,t) = -5, \quad u(1,t) = -6, \\ u(x,0) = \cos(\pi x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. Determinare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + (10 + \lambda)y = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \\ y(0) + 3y'(0) = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

4. Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze centrali, del seguente problema ellittico:

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} + x\cos^2(\pi y)u_x + (x^2 + y^2)u_y - (2 - \cos(xy))u = xy\cos(\pi xy), \\ \qquad\qquad 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4, \\ u(0,y) = f_1(y), \quad u(3,y) = f_2(y), \\ u(x,0) = g_1(x), \quad u(x,4) = g_2(x). \end{cases}$$

5. Illustrare la risoluzione numerica, mediante discretizzazione con le differenze finite centrali, del seguente problema con valori agli estremi:

$$\begin{cases} y'' + (x^2 + 1)y' - (2 + \sin x)y = x^2, \quad -1 \le x \le 4, \\ y(-1) = 2, \quad y(4) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni

1. Scriviamo la soluzione nella seguente forma:

$$u(x,t) = f(x+2t) + g(x+6t),$$

dove $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 3x + 1, \\ 2f'(x) + 6g'(x) = x^2 - 1, \end{cases}$$

otteniamo

$$f(x) = -\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{19}{4}x + \tfrac{3}{2} + c, \qquad g(x) = \tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2} - c,$$

essendo c un'opportuna costante. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\tfrac{1}{12}(x+2t)^3 + \tfrac{19}{4}(x+2t) + 1 + \tfrac{1}{12}(x+6t)^3 - \tfrac{7}{4}(x+6t) \\ &= x^2t + 8xt^2 + \tfrac{52}{3}t^3 + 3x - t + 1. \end{aligned}$$

Verifica: $u_{tt} - 8u_{xt} + 12u_{xx} = (16x + 104t) - 8(2x + 16t) + 24t = 0$.

2. **Conversione in un problema omogeneo**. Per arrivare al problema iperbolico omogeneo

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} - 2v_x + v, \quad 0 \le x \le 1, \ t \ge 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = \cos\frac{\pi x}{2} - \psi(x), \quad v_t(x,0) = 0, \end{cases}$$

sostituiamo $u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$ e risolviamo il problema al contorno

$$\begin{cases} \psi'' - 2\psi' + \psi = -x - 3, \\ \psi(0) = -5, \quad \psi(1) = -6. \end{cases}$$

Ponendo $\psi_p(x) = Ax + B$ si ha: $A = -1$ e $B = -5$, cioè $\psi_p(x) = -x - 5$. Dunque $\psi(x) = -x - 5 + (a + bx)e^x$ per opportune costanti a e b. Utilizzando $\psi(0) = -5 + a$ e $\psi(1) = -6 + (a+b)e$ si ha: $a = b = 0$. Quindi $\psi(x) = -x - 5$. **Separazione delle variabili**. Sia $v(x,t) = X(x)T(t)$, dove $X(0) = X(1) = T'(0) = 0$. In tal caso

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - 2\frac{X'(x)}{X(x)} + 1 = -\lambda.$$

Partendo dall'ODE

$$X''(x) - 2X'(x) + (1+\lambda)X(x) = 0$$

con condizioni di Dirichlet $X(0) = X(1) = 0$, ci risultano tre casi. **Nel caso a),** $\lambda > 0$: $\alpha = 1 \pm i\sqrt{\lambda}$. In tal caso

$$X(x) = e^x \left\{ a\cos(x\sqrt{\lambda}\,) + b\sin(x\sqrt{\lambda}\,) \right\}.$$

Poichè $X(0) = a$ e $e^{-1}X(1) = a\cos(\sqrt{\lambda}\,) + b\sin(\sqrt{\lambda}\,)$, si ha:

$$a = 0, \quad \sqrt{\lambda_n} = n\pi \ (n = 1, 2, \ldots), \quad X_n(x) \simeq e^x \sin(n\pi).$$

Nel caso b), $\lambda = 0$: $\alpha = 1$ (zero doppio). In tal caso

$$X(x) = e^x(a + bx),$$

implicando che $X(0) = a = 0$ e $X(1) = e(a+b) = 0$, cioè $a = b = 0$ (nessun autovalore). **Nel caso c),** $\lambda < 0$: $\alpha = 1 \pm \sqrt{-\lambda}$. In tal caso, per $\beta = \sqrt{-\lambda}$, si ha:

$$X(x) = e^x \left\{ a\,e^{\beta x} + b\,e^{-\beta x} \right\},$$

implicando che $X(0) = a + b = 0$ e $\frac{1}{e}X(2) = (1+\beta)a + (1-\beta)b = 0$, cioè $a = b = 0$ (nessun autovalore).

Soluzione finale. Dal sistema al contorno

$$T_n''(t) = -\lambda_n T_n(t), \qquad T_n'(0) = 0,$$

segue $T_n(t) \simeq \cos(n\pi t)$. Quindi la soluzione ha la rappresentazione

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^x \sin(\frac{(}{n}\pi x)\cos(n\pi t),$$

dove i coefficienti c_n seguono dalla serie di Fourier seno

$$e^{-x}\left(u(x,0) - \psi(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x).$$

Infatti,
$$c_n = 2\int_0^1 e^{-x}\,(u(x,0)-\psi(x))\sin(n\pi x)\,dx,$$
essendo
$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

3. L'ODE ha l'equazione caratteristica $\alpha^2+6\alpha+10+\lambda=0$, conducendo ai seguenti tre casi: a) $\lambda>-1$ e $\alpha=-3\pm i\beta$ per $\beta=\sqrt{1+\lambda}$; b) $\lambda=-1$ e $\alpha=-3$ [zero doppio]; c) $\lambda<-1$ e $\alpha=-3\pm\beta$ per $\beta=\sqrt{-1-\lambda}$. **Nel caso a)** si ha:
$$y(x)=e^{-3x}\left\{a\,\cos(\beta x)+b\,\sin(\beta x)\right\}.$$
Calcolando
$$y(x)+3y'(x)=e^{-3x}\left\{[-5a+3\beta b]\cos(\beta x)+[-3\beta a-5b]\sin(\beta x)\right\},$$
si ottiene il seguente sistema lineare per le costanti a e b:
$$-5a+3\beta b=0,\quad a\,\cos(\beta\pi)+b\,\sin(\beta\pi)=0.$$
Quindi $a=\frac{3}{8}\beta b$ e
$$b\left\{\tfrac{3}{8}\beta\,\cos(\beta\pi)+\sin(\beta\pi)\right\}=0.$$
Bisogna trovare tutti gli zeri positivi β dell'equazione
$$\mathrm{tg}\,(\beta\pi)=-\tfrac{3}{8}\beta,$$
cioè gli zeri $\frac{2n-1}{2}<\beta_n<\frac{2n+1}{2}$ per $n=1,2,\ldots$ il che conduce agli autovalori $\lambda_n=\beta_n^2-1$. Inoltre,
$$y_n(x)=\tfrac{3}{8}\beta_n b\,e^{-3x}\left\{\cos(\beta_n x)+\tfrac{8}{3}\,\frac{\sin(\beta_n x)}{\beta_n}\right\}.$$
Nel caso b) si ha:
$$y(x)=e^{-3x}(a+bx).$$
Calcolando $y+3y'=e^{-3x}\,[-8a+3b-8bx]$, si ottiene il sistema lineare
$$-8a+3b=0,\qquad a+\pi b=0,$$

oppure: $a = b = 0$ [nessun autovalore]. **Nel caso c)** si ha:

$$y(x) = e^{-3x} \left\{ a\, e^{\beta x} + b\, e^{-\beta x} \right\}.$$

Calcolando

$$y + 3y' = e^{-3x} \left((3\beta - 8) a\, e^{\beta x} - (3\beta + 8) b\, e^{-\beta x} \right),$$

risulta il sistema lineare

$$(3\beta - 8)a = (3\beta + 8)b, \qquad a + e^{-2\pi\beta}\, b = 0.$$

Quindi bisogna trovare gli zeri positivi dell'equazione

$$e^{-2\pi\beta} = \frac{8 + 3\beta}{8 - 3\beta}.$$

Tali zeri non esistono, poichè i) $e^{-2\pi\beta}$ è decrescente e positiva per $\beta \geq 0$, ii) $\frac{8+3\beta}{8-3\beta}$ è crescente e positiva per $0 \leq \beta < \frac{8}{3}$, iii) $\frac{8+3\beta}{8-3\beta}$ è negativa per $\beta > \frac{8}{3}$, iv) i due grafici passano per il punto $(0, 1)$. Nessun autovalore. **In conclusione**, scrivendo l'ODE nella forma

$$-(e^{6x} y')' - 10 e^{6x} y = \lambda e^{6x} y,$$

si trova la funzione peso $r(x) = e^{6x}$. In tal caso

$$\int_0^\pi y_n(x) y_m(x) e^{6x}\, dx = \begin{cases} N_n, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

dove N_n sono opportune costanti positive.

Alternativamente, sostituendo $y = e^{-3x} z$ si ottiene il problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} z'' + (1 + \lambda) z = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ z'(0) = \frac{8}{3} z(0), \\ z(\pi) = 0. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica $\alpha^2 + 1 + \lambda = 0$ conduce ai seguenti tre casi: a) $\lambda > -1$ e $\alpha = \pm i\beta$ per $\beta = \sqrt{1 + \lambda}$, b) $\lambda = -1$ e $\alpha = 0$ [zero doppio], c) $\lambda < -1$ e $\alpha = \pm\beta$ per $\beta = \sqrt{-1 - \lambda}$. **Nel caso a)** si ha:

$$z(x) = a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x).$$

Calcolando

$$z'(x) - \tfrac{8}{3}z(x) = (-\tfrac{8}{3}a + b\beta)\cos(\beta x) + (-a\beta - \tfrac{8}{3}b)\sin(\beta x),$$

si ottiene il seguente sistema lineare per le costanti a e b:

$$-\tfrac{8}{3}a + b\beta = 0, \qquad a\cos(\pi\beta) + b\sin(\pi\beta) = 0.$$

Quindi $a = \frac{3}{8}\beta b$ e

$$b\left\{\tfrac{3}{8}\beta\cos(\pi\beta) + \sin(\pi\beta)\right\} = 0.$$

Bisogna trovare tutti gli zeri positivi β dell'equazione

$$\mathrm{tg}\,(\beta\pi) = -\tfrac{3}{8}\beta,$$

cioè gli zeri $\frac{2n-1}{2} < \beta_n < \frac{2n+1}{2}$ per $n = 1, 2, \ldots$ il che conduce agli autovalori $\lambda_n = \beta_n^2 - 1$. Inoltre,

$$z_n(x) = \tfrac{3}{8}\beta_n b\left\{\cos(\beta_n x) + \tfrac{8}{3}\,\frac{\sin(\beta_n x)}{\beta_n}\right\}.$$

Nel caso b) si ha:

$$z(x) = a + bx.$$

Calcolando $z' - \frac{8}{3}z = b - \frac{8}{3}a - \frac{8}{3}bx$, si ottiene il sistema lineare

$$b - \tfrac{8}{3}a = 0, \qquad a + \pi\beta = 0,$$

oppure: $a = b = 0$ [nessun autovalore]. **Nel caso c)** si ha:

$$z(x) = ae^{\beta x} + be^{-\beta x}.$$

Calcolando

$$z' - \tfrac{8}{3}z = a(\beta - \tfrac{8}{3})e^{\beta x} - b(\beta + \tfrac{8}{3})e^{-\beta x},$$

risulta il sistema lineare

$$a(\beta - \tfrac{8}{3}) = b(\beta + \tfrac{8}{3}), \qquad ae^{\pi\beta} + be^{-\pi\beta} = 0.$$

Quindi bisogna trovare gli zeri positivi dell'equazione

$$e^{-2\pi\beta} = \frac{8 + 3\beta}{8 - 3\beta}.$$

Tali zeri non esistono, poichè i) $e^{-2\pi\beta}$ è decrescente e positiva per $\beta \geq 0$, ii) $\frac{8+3\beta}{8-3\beta}$ è crescente e positiva per $0 \leq \beta < \frac{8}{3}$, iii) $\frac{8+3\beta}{8-3\beta}$ è negativa per $\beta > \frac{8}{3}$, iv) i due grafici passano per il punto $(0,1)$. Nessun autovalore. **In conclusione**, poichè l'ODE ha già la forma $-z'' - z = \lambda z$, si trova la funzione peso $r(x) = 1$. In tal caso

$$\int_0^\pi z_n(x) z_m(x)\, dx = \begin{cases} N_n, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

dove N_n sono opportune costanti positive.

4. Sia $x_i = ih$ per $h = \frac{3}{n+1}$ e $y_j = jk$ per $k = \frac{4}{m+1}$. Poniamo $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, $f_{sj} = f_s(y_j)$ $[j = 0, 1, \ldots, m+1]$ e $g_{si} = g_s(x_i)$ $[i = 0, 1, \ldots, n+1]$, essendo $s = 1, 2$. Allora[1]

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + 4\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} \\ &+ x_i \cos^2(\pi y_j) \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + (x_i^2 + y_j^2) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} \\ &- (2 - \cos(x_i y_j)) u_{ij} = r_{ij}, \end{aligned}$$

dove

$$r_{ij} = \begin{cases} x_i y_j \sin(\pi x_i y_j), & i,j = 2, \ldots, n-1, , \\ x_i y_1 \cos(\pi x_i y_1) - \frac{1}{h^2} u_{i0}, & i = 2, \ldots, n+1,\ j = 1, \\ x_i y_m \cos(\pi x_i y_m) - \frac{1}{h^2} u_{i,m+1}, & i = 1, \ldots, n-1,\ j = m, \\ x_1 y_j \cos(\pi x_1 y_j) - \frac{4}{k^2} u_{0j}, & j = 2, \ldots, m+1,\ i = 1, \\ x_n y_j \cos(\pi x_n y_j) - \frac{4}{k^2} u_{n+1,j}, & j = 1, \ldots, m-1,\ i = n, \\ x_1 y_1 \cos(\pi x_1 y_1) - \frac{1}{h^2} u_{10} - \frac{4}{k^2} u_{01}, & i = j = 1, \\ x_1 y_m \cos(\pi x_1 y_m) - \frac{1}{h^2} u_{0m} - \frac{4}{k^2} u_{1,m+1}, & i = 1,\ j = m, \\ x_n y_1 \cos(\pi x_n y_1) - \frac{1}{h^2} u_{n+1,1} - \frac{4}{k^2} u_{n0}, & i = n,\ j = 1, \\ x_n y_m \cos(\pi x_n y_m) - \frac{1}{h^2} u_{n+1,m} - \frac{4}{k^2} u_{n,m+1}, & i = n,\ j = m. \end{cases}$$

L'elemento (i,j) viene "circondato" dagli elementi $(i+1,j)$, $(i-1,j)$, $(i,j+1)$ e $(i,j-1)$. Controllando se la matrice del sistema è stretta-

[1] Le ipotesi di continuità $f_{10} = g_{10} = u(0,0)$, $f_{20} = g_{2,m+1} = u(3,0)$, $f_{1,m+1} = g_{20} = u(0,4)$ e $f_{2,m+1} = g_{2,m+1} = u(3,4)$ non vengono mai utilizzate nel formulare la parte a destra del sistema lineare.

mente diagonalmente dominante, si ha:

$$\left|\frac{1}{h^2}+\frac{x_i\cos^2(\pi y_j)}{2h}\right|+\left|\frac{1}{h^2}-\frac{x_i\cos^2(\pi y_j)}{2h}\right|+\left|\frac{4}{k^2}+\frac{x_i^2+y_j^2}{2k}\right|$$
$$+\left|\frac{4}{k^2}-\frac{x_i^2+y_j^2}{2k}\right|<\left|\frac{2}{h^2}+\frac{8}{k^2}+(2-\cos(x_iy_j))\right|,$$

il che è vero se $0<h\leq\frac{2}{3}$ e $0<k\leq\frac{8}{25}$.

5. Per $x_i=-1+ih$ e $h=\frac{5}{n+1}$ otteniamo il sistema lineare

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+(x_i^2+1)\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}-(2+\sin x_i)y_i$$
$$=\begin{cases} x_1^2-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{(-1+h)^2+1}{2h}\right), & i=1,\\ x_i^2, & i=2,\ldots,n-1,\\ x_n^2-\left(\frac{1}{h^2}+\frac{(4-h)^2+1}{2h}\right), & i=n.\end{cases}$$

La matrice del sistema è reale, tridiagonale e strettamente diagonalmente dominante, quest'ultimo grazie alla stima (per $0<h<2$)

$$\underbrace{\left|\frac{1}{h^2}+\frac{x_i^2+1}{2h}\right|+\left|\frac{1}{h^2}-\frac{x_i^2+1}{2h}\right|}_{=\frac{2}{h^2}\text{ se }0<h\leq\frac{2}{x_i^2+1}}<\underbrace{\left|-\frac{2}{h^2}-(2+\sin x_i)\right|}_{\geq\frac{2}{h^2}+1}$$

per $i=1,2,\ldots,n$. Quindi $0<h\leq\frac{2}{17}$, $n\geq 42$.