Calcolo Scientifico e Matematica Applicata
Secondo Parziale, 10.01.2018

Risolvere gli esercizi 1, 2, 4 oppure, in alternativa, gli esercizi 1, 3, 4. Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 14$, $2 \mapsto 8$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$.

1. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2xu_x - (1+x^2)u + \sin^2(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le x \le 4,\ 0 \le t \le 5, \\ u(0,t) = f_1, \quad u(4,t) = f_2, \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = x^2. \end{cases}$$

   Discutere le condizioni sul passo affinché la matrice del sistema sia invertibile.

2. Illustrare la risoluzione numerica del seguente problema debolmente non lineare:

$$\begin{aligned} &4u_{xx} + (1+\sin^2 x)u_x - (\sin(u) - u)^3 = \sin(x), \quad 0 \le x \le 5, \\ &u(0) = f_1, \quad u(5) = f_2. \end{aligned}$$

3. Illustrare la risoluzione numerica del seguente problema parabolico:

$$\begin{cases} u_t = [(1+2x^2)u_x]_x - (2+\cos(x))u + f(x), \quad 0 \le x \le 8, \\ u(0,t) = u(8,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

   Discutere le proprietà principali delle matrici del sistema.

4. a. Illustrare il procedimento di risoluzione, mediante gli elementi finiti, del seguente problema ellittico:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left([1+x^2y^2]\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left([1+x^2y^2]\frac{\partial u}{\partial y}\right) + (1+\cos^2[x+y])u = x^2 + y^2, \quad (x,y) \in \Omega,$$

   sotto la condizione al contorno $u|_{\partial\Omega} = 0$.

b. Indicati con φ la box spline che assume il valore 1 nel punto nodale $(2,3)$ e zero negli altri punti nodali e con ψ la box spline che assume il valore 1 nel punto nodale $(2-h, 3+\frac{1}{2}h)$ e zero negli altri, illustrare il procedimento per il calcolo del seguente integrale

$$I = \iint_T \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dxdy,$$

essendo T il triangolo di vertici

$$\left\{(2-h, 3+\tfrac{1}{2}h), (2,3), (2+\tfrac{1}{4}h, 3+\tfrac{1}{2}h)\right\}.$$