Calcolo Scientifico e Matematica Applicata

Secondo Parziale, 17.12.2018

Ingegneria Ambientale

Risolvere gli esercizi 1, 2, 4 oppure, in alternativa, gli esercizi 1, 3, 4. Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 14$, $2 \mapsto 8$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$.

1. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4x^2 u_x - (1+2x^2)u + \cos^2(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq t \leq 8, \\ u(0,t) = f_1, \quad u(3,t) = f_2, \\ u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = x+2. \end{cases}$$

   Discutere le condizioni sui passi affinché le matrici dei sistemi siano invertibili.

2. Illustrare la risoluzione numerica del seguente problema debolmente non lineare:

$$\begin{aligned} &u_{xx} + (3+\sin x)u_x + (\sin(u) - u)^5 = \sin^2(x), \quad 0 \leq x \leq 4, \\ &u(0) = f_1, \quad u(4) = f_2. \end{aligned}$$

3. Illustrare la risoluzione numerica del seguente problema parabolico:

$$\begin{cases} u_t = [(1+x^4)u_x]_x - (3+2\sin(x))u + f(x), \quad 0 \leq x \leq 10, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

   Discutere le proprietà principali delle matrici del sistema.

4. a. Illustrare il procedimento di risoluzione, mediante gli elementi finiti, del seguente problema ellittico:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left([1+x^4y^2]\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left([1+x^4y^2]\frac{\partial u}{\partial y}\right) + (2+\cos[x+y])u = x^2y^2, \quad (x,y) \in \Omega,$$

   sotto la condizione al contorno $u|_{\partial\Omega} = 0$.

b. Indicati con φ la box spline che assume il valore 1 nel punto nodale $(3, 4)$ e zero negli altri punti nodali e con ψ la box spline che assume il valore 1 nel punto nodale $(3 - \frac{1}{2}h, 4 + h)$ e zero negli altri, illustrare il procedimento per il calcolo del seguente integrale

$$I = \iint_T \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dxdy,$$

essendo T il triangolo di vertici

$$\left\{(3 - \tfrac{1}{2}h, 4 + h), (3, 4), (3 + \tfrac{1}{2}h, 4 + \tfrac{1}{4}h)\right\}.$$

Utilizzare il triangolo di riferimento.

Calcolo Scientifico e Matematica Applicata

Secondo Parziale, 17.12.2018

Ingegneria Meccanica

1. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4x^2 u_x - (1+2x^2)u + \cos^2(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le x \le 3,\ 0 \le t \le 8, \\ u(0,t) = f_1, \quad u(3,t) = f_2, \\ u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = x+2. \end{cases}$$

   Discutere le condizioni sui passi affinché le matrici dei sistemi siano invertibili.

2. Illustrare la risoluzione numerica del seguente problema debolmente non lineare:

$$u_{xx} + (3+\sin x)u_x + (\sin(u) - u)^5 = \sin^2(x), \quad 0 \le x \le 4,$$
$$u(0) = f_1, \quad u(4) = f_2.$$

3. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4x^2 u_x - (1+2x^2\sin^2(2t))u + 3\sin^2(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \le x \le 4,\ 0 \le t \le 12, \\ u(1,t) = f_1, \quad u(4,t) = f_2, \\ u(x,0) = x^4 + 1. \end{cases}$$

   Discutere le condizioni sui passi affinché le matrici dei sistemi siano invertibili.

Risolvere tutti gli esercizi.

Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 14$, $2 \mapsto 8$, $3 \mapsto 8$.

Soluzioni per l'ingegneria ambientale:

1. Siano $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 3$ i nodi spaziali equidistanti [$h = \frac{3}{n+1}$, $x_i = ih$] e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 8$ i nodi temporali equidistanti [$k = \frac{8}{m+1}$, $t_j = jk$]. Allora

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}\right] \\
&+ \frac{4x_i^2}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h}\right] \\
&- (1 + 2x_i^2)u_{ij} + \cos^2(x_i),
\end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Si conoscono i dati

$$u_{0,j} = f_1, \quad u_{n+1,j} = f_2, \quad u_{i0} = x_i^2,$$

dove $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$ e $j = 0, 1, \ldots, m, m+1$. Quindi bisogna risolvere il sistema per $u_{i,j+1}$ [$i = 1, \ldots, n$]

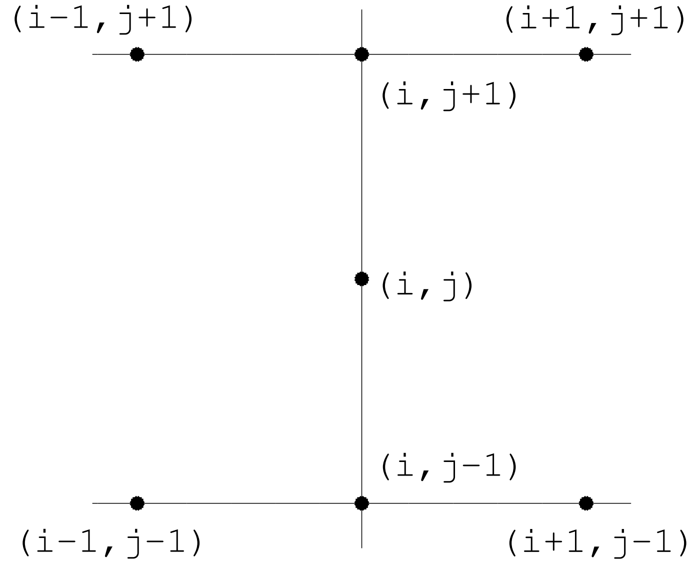
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) u_{i,j+1} - \left(\frac{1}{2h^2} + \frac{2x_i^2}{2h}\right) u_{i+1,j+1} - \left(\frac{1}{2h^2} - \frac{2x_i^2}{2h}\right) u_{i-1,j+1} \\
= \frac{2u_{ij} - u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{2h^2} \\
+ 2x_i^2 \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h} - (1 + 2x_i^2)u_{ij} + \cos^2(x_i),
\end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e i termini con pedici $i-1$ per $i = 1$ e $i+1$ per $i = n$ sono da spostare alla parte a destra.

La matrice del sistema è tridiagonale. Essa è strettamente diagonalmente dominante e quindi invertibile se

$$\left|\frac{1}{2h^2} + \frac{2x_i^2}{2h}\right| + \left|\frac{1}{2h^2} - \frac{2x_i^2}{2h}\right| < \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}.$$

Ciò è vero se $\frac{2x_i^2}{2h} \leq \frac{1}{2h^2}$ per $i = 1, \ldots, n$, cioè se $0 < h \leq [1/2 \max x_i^2] = \frac{1}{18}$, cioè se $n \geq 53$.



Ci rimane il calcolo di u_{i1}. Si ha:

$$\begin{aligned}
u_{i1} &= u(x_i,k) \simeq u(x_i,0) + k u_t(x_i,0) + \tfrac{1}{2}k^2 u_{tt}(x_i,0) \\
&\simeq u_{i0} + k u_t(x_i,0) + \tfrac{1}{2}k^2 \left[\frac{u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}}{h^2} \right. \\
&\quad \left. + 4x_i^2 \frac{u_{i+1,0} - u_{i-1,0}}{2h} - (1+2x_i^2)u_{i0} + \cos^2(x_i) \right],
\end{aligned}$$

dove $u_{i0} = x_i^2$, $u_t(x_i,0) = x_i + 2$ e $i = 1,\ldots,n$.

2. Siano $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 4$ nodi equidistanti [$h = \frac{4}{n+1}$, $x_i = ih$]. Sia $u_i = u(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Allora bisogna trovare le soluzioni del sistema di equazioni non lineari

$$F_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

dove

$$\begin{aligned}
\frac{F_i(u_{i-1},u_i,u_{i+1})}{h^2} &:= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \\
&\quad + (3 + \sin x_i)\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + (\sin(u_i) - u_i)^5 - \sin^2(x_i).
\end{aligned}$$

Scegliendo il punto d'innesco

$$u_i^{[0]} = f_i + \frac{i}{n+1}(f_2 - f_1) = \frac{(n+1-i)f_1 + if_2}{n+1},$$

si applichi il metodo di Newton-Raphson risultando nell'iterazione

$$u_i^{[k+1]} = u_i^{[k]} - \frac{F_i(u_{i-1}^{[k]}, u_i^{[k]}, u_{i+1}^{[k]})}{\frac{\partial F_i}{\partial u_i}(u_{i-1}^{[k]}, u_i^{[k]}, u_{i+1}^{[k]})}.$$

Di conseguenza, per $0 < ph \leq 2$ [con $p = \max(3 + \sin x_i) = 4$, cioè se $0 < h \leq \frac{1}{2}$ oppure se $n \geq 7$] si ha:

$$\begin{aligned} u_i^{[k+1]} &= u_i^{[k]} \\ &+ \frac{u_{i+1}^{[k]} - 2u_i^{[k]} + u_{i-1}^{[k]} + h\frac{3+\sin x_i}{2}(u_{i+1}^{[k]} - u_{i-1}^{[k]}) + (\sin(u_i^{[k]}) - u_i^{[k]})^5 - \sin^2(x_i)}{2 + 5h^2(\sin(u_i^{[k]}) - u_i^{[k]})^4(1 - \cos(u_i^{[k]}))}, \end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$. Si osservi che il denominatore della frazione è positivo.

3. Siano $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 10$ nodi non necessariamente equidistanti e siano

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} \leq x \leq 10, \end{cases}$$

le funzioni spline tali che $\phi_i(x_i) = 1$ e $\phi_i(x_j) = 0$ per $i \neq j$. Allora la formulazione variazionale del problema è il seguente: Trovare, per $t > 0$, una funzione $u(\cdot, t) \in H_0^1(0, 10)$ tale che per ogni $v \in H_0^1(0, 10)$ si ha:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_0^{10} u(x,t)v(x)\,dx \\ &= -\int_0^{10} \big((1 + x^4)u_x(x,t)v'(x) + (3 + 2\sin(x))u(x,t)v(x)\big)\,dx \\ &+ \int_0^{10} f(x,t)v(x)\,dx. \end{aligned}$$

Sostituendo $u = \sum_{j=1}^{n} c_j\phi_j$ e $v = \phi_i$ si arriva al sistema lineare

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t) \int_0^{10} \phi_i\phi_j \, dx = - \int_0^{10} \big((1+x^4)\phi_i'\phi_j' + (3+2\sin(x))\phi_i\phi_j\big) \, dx$$
$$+ \int_0^{10} f(x,t)\phi_i(x) \, dx,$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j(0) \int_0^{10} \phi_i\phi_j \, dx = \int_0^{10} G(x)\phi_i(x) \, dx,$$

dove $i = 1, \ldots, n$. Introducendo le matrici reali, simmetriche e tridiagonali M e K (quest'ultima chiamata la "stiffness matrix") come

$$M_{ij} = \int_0^{10} \phi_i\phi_j \, dx, \quad K_{ij} = \int_0^{10} \big((1+x^4)\phi_i'\phi_j' + (3+2\sin(x))\phi_i\phi_j\big) \, dx,$$

si ottiene il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Mc'(t) = -Kc(t) + f(t), \\ Mc(0) = g, \end{cases} ,$$

dove $c(t)$ è il vettore colonna dei coefficienti e $f(t)$ e g sono i vettori colonna degli integrali che riguardano f e g. Chiaramente, M è la matrice di Gram [rispetto al prodotto interno in $L^2(0,10)$] delle funzioni spline. Siccome le splines sono linearmente indipendenti, gli autovalori di M sono tutti positivi e quindi M è invertibile. La stessa cosa vale per la stiffness matrix K, poichè essa è la matrice di Gram [rispetto al prodotto interno

$$[u,v] = \int_0^{10} \big((1+x^4)u'v' + (3+2\sin(x))uv\big) \, dx$$

in $H_0^1(0,10)$ che genera la topologia di $H_0^1(0,10)$]. Quindi

$$\begin{cases} c'(t) = -M^{-1}Kc(t) + M^{-1}f(t), \\ c(0) = M^{-1}g. \end{cases}$$

4a. Il problema ellittico con condizioni di Dirichlet

$$-\nabla \cdot \big([1+x^4y^2]\nabla u\big) + (2+\cos[x+y])u = x^2y^2$$

ammette la seguente formulazione variazionale: Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ si ha:

$$\int_\Omega \big([1+x^4y^2]\nabla u\cdot\nabla v+(2+\cos[x+y])uv\big)\,dxdy=\int_\Omega x^2y^2v(x,y)\,dxdy.$$

Siano $\phi_i(x,y)$ $[i=1,\ldots,N]$ le funzioni spline con supporto l'unione di al massimo sei triangoli. Ponendo $u=\sum_{j=1}^N c_j\phi_j$ e $v=\phi_i$ si ha:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^N c_j\int_\Omega \big([1+x^4y^2]\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j+(2+\cos[x+y])\phi_i\phi_j\big)\,dxdy\\ &=\int_\Omega x^2y^2\phi_i(x,y)\,dxdy,\end{aligned}$$

dove $i=1,\ldots,N$. Scrivendo quest'ultimo sistema di equazioni lineari nella forma

$$Kc=f,$$

dove la "stiffness matrix" K è reale, simmetrica e sparsa, bisogna dimostrare l'invertibilità di K. Siccome $1+x^4y^2$ e $2+\cos[x+y]$ sono funzioni positive, la stiffness matrix è la matrice di Gram [rispetto a un prodotto interno di $H_0^1(\Omega)$ che genera la topologia di $H_0^1(\Omega)$][1] delle funzioni spline e quest'ultime sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, K ha soltanto autovalori positivi e quindi è invertibile.

4b. La trasformazione lineare che porta i punti $(s,t)\in\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ nei rispettativi punti

$$\big\{(3,4),(3-\tfrac12h,4+h),(3+\tfrac12h,4+\tfrac14h)\big\}$$

ha la forma

$$\begin{cases}x=3-\frac12hs+\frac12ht,\\ y=4+hs+\frac14ht.\end{cases}$$

Essa ha la matrice Jacobiana

$$J=\begin{pmatrix}x_s & x_t\\ y_s & y_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac12h & \frac12h\\ h & \frac14h\end{pmatrix},$$

[1] essendo $\|u\|^2_{H_0^1(0,10)}\le[u,u]\le 10001\|u\|^2_{H_0^1(0,10)}$

per cui $\det J = -\frac{5}{8}h^2$. Abbiamo ora $\gamma(s,t) = 1 - s - t$ e $\delta(s,t) = s$ per le funzioni lineari in $(s,t) \in T_R$ [il triangolo di riferimento con vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$] che si annullano in due delle tre vertici e prendono il valore 1 nella terza. Si calcoli

$$J^{-T}\nabla\gamma = \frac{-8}{5h^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}h & -h \\ -\frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/5h \\ -8/5h \end{pmatrix},$$
$$J^{-T}\nabla\delta = \frac{-8}{5h^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}h & -h \\ -\frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5h \\ 4/5h \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$I = \iint_T \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dxdy = \iint_{T_R} (J^{-T}\nabla\gamma) \cdot (J^{-T}\nabla\delta) |\det J| \, dsdt$$
$$= \frac{-4}{5h^2}\frac{5}{8}h^2 = -\frac{1}{4},$$

essendo $\frac{1}{2} = \iint_{T_R} dsdt$ l'area del triangolo di riferimento.

Soluzioni per l'ingegneria meccanica:

1. Siano $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 3$ i nodi spaziali equidistanti $[h = \frac{3}{n+1},\ x_i = ih]$ e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 8$ i nodi temporali equidistanti $[k = \frac{8}{m+1},\ t_j = jk]$. Allora

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}\right] \\
&+ \frac{4x_i^2}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h}\right] \\
&- (1 + 2x_i^2)u_{ij} + \cos^2(x_i),
\end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Si conoscono i dati

$$u_{0,j} = f_1, \quad u_{n+1,j} = f_2, \quad u_{i0} = x_i^2,$$

dove $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$ e $j = 0, 1, \ldots, m, m+1$. Quindi bisogna risolvere il sistema per $u_{i,j+1}$ $[i = 1, \ldots, n]$

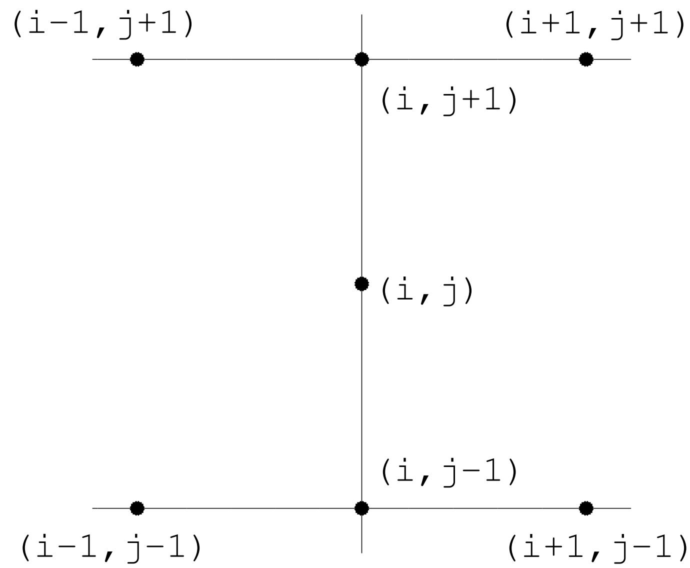
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) u_{i,j+1} - \left(\frac{1}{2h^2} + \frac{2x_i^2}{2h}\right) u_{i+1,j+1} - \left(\frac{1}{2h^2} - \frac{2x_i^2}{2h}\right) u_{i-1,j+1} \\
= \frac{2u_{ij} - u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{2h^2} \\
+ 2x_i^2 \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h} - (1 + 2x_i^2)u_{ij} + \cos^2(x_i),
\end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e i termini con pedici $i - 1$ per $i = 1$ e $i + 1$ per $i = n$ sono da spostare alla parte a destra.

La matrice del sistema è tridiagonale. Essa è strettamente diagonalmente dominante e quindi invertibile se

$$\left|\frac{1}{2h^2} + \frac{2x_i^2}{2h}\right| + \left|\frac{1}{2h^2} - \frac{2x_i^2}{2h}\right| < \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}.$$

Ciò è vero se $\frac{2x_i^2}{2h} \leq \frac{1}{2h^2}$ per $i = 1, \ldots, n$, cioè se $0 < h \leq [1/2 \max x_i^2] = \frac{1}{18}$, cioè se $n \geq 53$.



Ci rimane il calcolo di u_{i1}. Si ha:

$$\begin{aligned} u_{i1} &= u(x_i,k) \simeq u(x_i,0) + k u_t(x_i,0) + \tfrac{1}{2}k^2 u_{tt}(x_i,0) \\ &\simeq u_{i0} + k u_t(x_i,0) + \tfrac{1}{2}k^2 \Bigg[\frac{u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}}{h^2} \\ &+ 4x_i^2 \frac{u_{i+1,0} - u_{i-1,0}}{2h} - (1+2x_i^2)u_{i0} + \cos^2(x_i) \Bigg], \end{aligned}$$

dove $u_{i0} = x_i^2$, $u_t(x_i,0) = x_i + 2$ e $i = 1, \ldots, n$.

2. Siano $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 4$ nodi equidistanti $[h = \frac{4}{n+1}$, $x_i = ih]$. Sia $u_i = u(x_i)$, $f_i = f(x_i)$. Allora bisogna trovare le soluzioni del sistema di equazioni non lineari

$$F_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{F_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})}{h^2} &:= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \\ &+ (3 + \sin x_i)\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + (\sin(u_i) - u_i)^5 - \sin^2(x_i). \end{aligned}$$

Scegliendo il punto d'innesco

$$u_i^{[0]} = f_i + \frac{i}{n+1}(f_2 - f_1) = \frac{(n+1-i)f_1 + if_2}{n+1},$$

si applichi il metodo di Newton-Raphson risultando nell'iterazione

$$u_i^{[k+1]} = u_i^{[k]} - \frac{F_i(u_{i-1}^{[k]}, u_i^{[k]}, u_{i+1}^{[k]})}{\frac{\partial F_i}{\partial u_i}(u_{i-1}^{[k]}, u_i^{[k]}, u_{i+1}^{[k]})}.$$

Di conseguenza, per $0 < ph \leq 2$ [con $p = \max(3 + \sin x_i) = 4$, cioè se $0 < h \leq \frac{1}{2}$ oppure se $n \geq 7$] si ha:

$$u_i^{[k+1]} = u_i^{[k]}$$
$$+ \frac{u_{i+1}^{[k]} - 2u_i^{[k]} + u_{i-1}^{[k]} + h\frac{3+\sin x_i}{2}(u_{i+1}^{[k]} - u_{i-1}^{[k]}) + (\sin(u_i^{[k]}) - u_i^{[k]})^5 - \sin^2(x_i)}{2 + 5h^2(\sin(u_i^{[k]}) - u_i^{[k]})^4(1 - \cos(u_i^{[k]}))},$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$. Si osservi che il denominatore della frazione è positivo.

3. Siano $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 4$ i nodi spaziali equidistanti $[h = \frac{3}{n+1},\ x_i = 1 + ih]$ e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 12$ i nodi temporali equidistanti $[k = \frac{12}{m+1},\ t_j = jk]$. Allora

$$\begin{aligned} \frac{t_{ij} - t_{i,j-1}}{k} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + 4x_i^2 \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \\ &\quad - (1 + 2x_i^2 \sin^2(2t_j))u_{ij} + 3\sin^2(x_i), \\ u_{0j} = f_1, \quad u_{n+1,j} &= f_2, \quad u_{i0} = x_i^4 + 1, \end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m+1$. Quindi

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{h^2} + 1 + 2x_i^2 \sin^2(2t_j) + \frac{1}{k}\right) u_{ij} \\ &- \left(\frac{1}{2h^2} + \frac{4x_i^2}{2h}\right) u_{i+1,j} - \left(\frac{1}{2h^2} - \frac{4x_i^2}{2h}\right) u_{i-1,j} \\ &= \frac{t_{i,j-1}}{k} + 3\sin^2(x_i), \end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m+1$ e i termini con primo pedice $i-1$ per $i = 1$ e $i+1$ per $i = n$ sono da spostare nella parte a destra. Per ogni pedice $j = 1, \ldots, m+1$ la matrice del sistema è tridiagonale. Essa è strettamente diagonalmente dominante e quindi invertibile se

$$\left|\frac{1}{2h^2} + \frac{4x_i^2}{2h}\right| + \left|\frac{1}{2h^2} - \frac{4x_i^2}{2h}\right| < \frac{2}{h^2} + 1 + 2x_i^2 \sin^2(2t_j) + \frac{1}{k}.$$

Ciò è vero se $\frac{4x_i^2}{2h} \leq \frac{1}{h^2}$ per $i = 1, \ldots, n$, cioè se $0 < h \leq [1/\max 4x_i^2] = \frac{1}{64}$, cioè se $n \geq 63$.