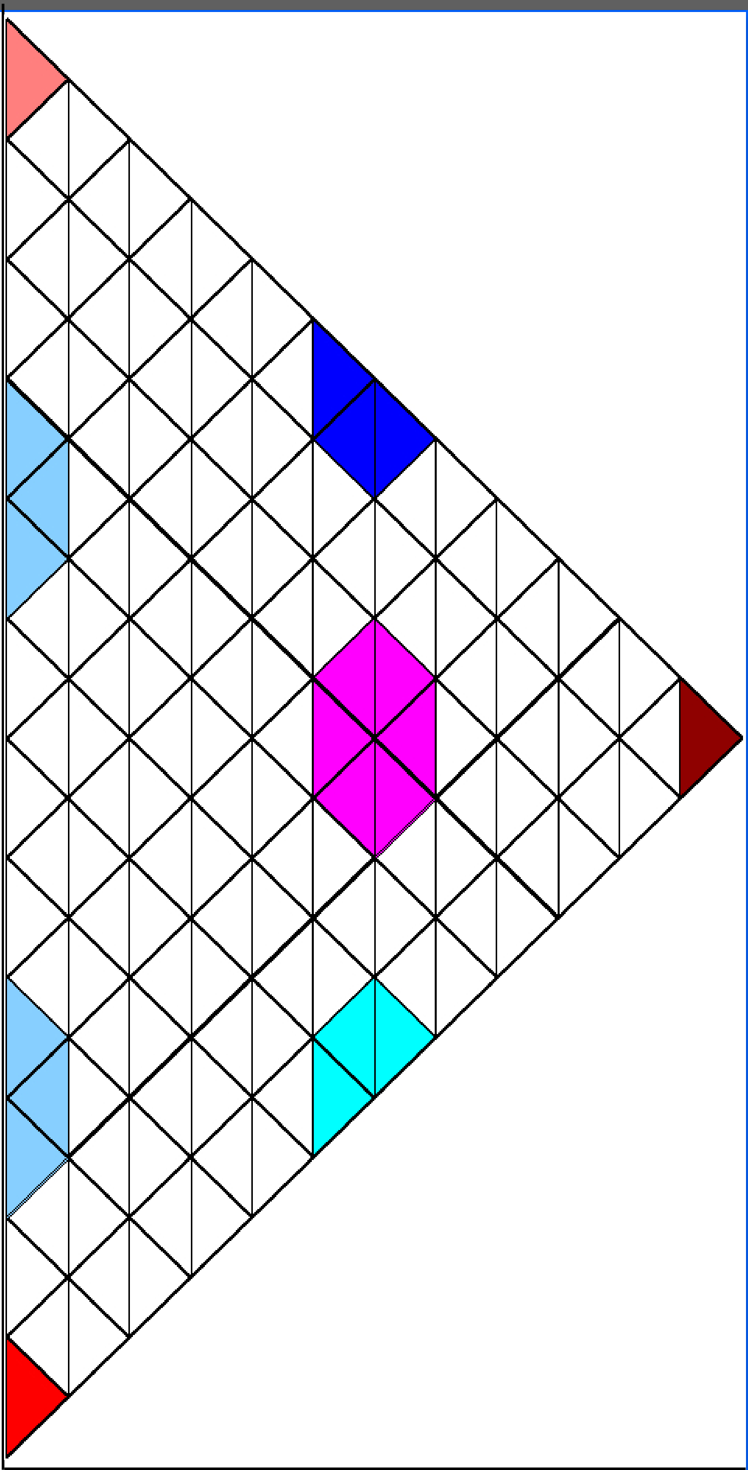
SIMAI E-Lecture notes Vol XX

ISSN 2038-0909

Sebastiano Seatzu
Cornelis Van der Mee
Pietro Contu



MATEMATICA APPLICATA

Un secondo corso

SIMAI
Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale

Indice

PREFAZIONE

Obiettivo primario del libro è la presentazione dei metodi basilari nella risoluzione analitica e numerica delle Equazioni Differenziali. Al fine di ridurre al minimo il ricorso ad altri testi, nel libro vengono richiamati i metodi e i risultati necessari alla loro reale comprensione.

Destinatari primi del libro sono gli studenti delle Lauree Magistrali in Ingegneria. Per questo motivo vengono presentati i risultati analitici e numerici che maggiormente interessano le applicazioni, rinviando a libri specialistici i risultati teorici e modellistici relativi a situazioni più complesse. È questo il motivo per il quale sono state omesse le dimostrazioni su diversi risultati analitici e numerici utilizzati. Il libro potrebbe essere adottato nella Laurea Magistrale in Matematica, a condizione che vengano apportate integrazioni sulle proprietà analitiche delle soluzioni delle equazioni differenziali e precisazioni varie sulla esistenza e unicità della soluzione in domini più generali. Considerazioni analoghe, in un certo senso complementari, valgono per la Laurea Magistrale in Fisica. In questo caso le integrazioni dovrebbero riguardare la parte modellistica. Sarebbe infatti opportuno integrare il libro con la presentazione di ulteriori problematiche fisiche, allo scopo di evidenziare maggiormente che le equazioni differenziali sono lo strumento matematico più utilizzato per descrivere le relazioni tra le diverse entità fisiche (massa, posizioni, forze, energie, momenti, ecc.). Le equazioni differenziali sono infatti utilizzate per rappresentare fenomeni stazionari ed evolutivi nella generalit dei settori dellIngegneria, della Fisica e di numerosissimi altri settori delle scienze applicate. Negli ultimi due decenni il loro utilizzo si è esteso a settori non tradizionali, come quello delle nanotecnologie, nel quale si presentano spesso con caratteristiche nuove, aprendo così nuovi fronti per la ricerca matematica. Due esempi relativi a questo settore sono illustrati nei capitoli quinto e settimo. Anche se buona parte degli argomenti trattati sono contenuti in [26], i due libri presentano importanti differenze. In primo luogo perché i cambiamenti, apportati nella presentazione degli argomenti, ne hanno accresciuto la leggibilità, in secondo luogo perché gli ampliamenti introdotti in alcuni capitoli lo hanno reso più completo, riducendo significativamente la necessità di ricorrere ad altri testi. Anche se la sua focalizzazione riguarda i metodi di risoluzione analitica e numerica delle equazioni differenziali a derivate parziali, alcuni capitoli sono dedicati ai richiami e alle metodologie, le cui conoscenze sono essenziali alla loro effettiva comprensione. Dei suoi otto capitoli, il primo e il quarto riguardano la risoluzione analitica delle equazioni a derivate parziali. Più precisamente, mentre il primo capitolo contiene una presentazione di caratttere generale sulle equazioni alle derivate parziali con relativa classificazione, il quarto è dedicato alla presentazione dei due metodi di risoluzione analitica maggiormente utilizzati, con applicazioni a vari problemi di tipo ellittico, parabolico e iperbolico.

Il secondo richiama i risultati essenziali sulle equazioni differenziali ordinarie, con una certa enfasi sui metodi spettrali, dato che questi sono i più utilizzati nella risoluzione analitica di quelle alle derivate parziali. Il capitolo terzo è funzionale al quarto, in quanto la generalità delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali è rappresentabile mediante serie di Fourier o di autofunzioni relative a problemi di Sturm-Liouville. Per questo motivo, in aggiunta ai richiami essenziali, vengono messe in evidenza le proprietà di decadimento dei coefficienti delle serie di Fourier in funzione della regolarità della soluzione.

Nel quinto, dedicato allalgebra lineare, oltre ai richiami di carattere generale sugli spazi vettoriali, autovalori-autovettori e norme vettoriali e matriciali, vengono richiamate le proprietà spettrali basilari nella risoluzione dei sistemi lineari mediante i metodi iterativi. Vengono quindi presentati alcuni dei metodi iterativi più utilizzati nella risoluzione numerica dei sistemi lineari tipici delle equazioni a derivate parziali.

Il sesto è dedicato alla risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali mediante i metodi alle differenze finite. Nel primo caso viene considerata la risoluzione di problemi ai limiti per equazioni lineari e debolmente lineari del secondo ordine. Nel secondo caso la risoluzione numerica di problemi ellittici, parabolici e iperbolici lineari su domini rettangolari. Nel caso ellittico debolmente non lineare ellittico, viene altresì considerata la risoluzione su domini di tipo rettangolare.

Il settimo capitolo è dedicato alla risoluzione numerica dei sistemi non lineari. Dopo un presentazione generale dei metodi di risoluzione e di alcuni metodi iterativi, vengono messe in evidenza le principali analogie e differenze con i metodi iterativi per i sistemi lineari. Il capitolo è corredato da esempi esplicativi e da applicazioni riguardanti la risoluzione numerica delle equazioni differenziali debolmente non lineari.

Il capitolo ottavo è il più vasto. Dopo aver richiamato alcune definizioni essenziali di calcolo vettoriale-differenziale, si procede alla formulazione variazionale dei problemi differenziali considerati, evidenziando le principali differenze tra le formulazioni classiche e quelle variazionali. Vengono quindi introdotti gli spazi di Sobolev, con la presentazione delle proprietà di specifico interesse per il settore. Si passa quindi alla risoluzione dei problemi ai limiti per le equazioni differenziali lineari ordinarie e dei problemi con valori al bordo per quelle parziali di tipo ellittico. Per queste vengono considerati problemi con valori noti della soluzione al bordo, valori assegnati della derivata normale sulla frontiera e condizioni miste.

L'ultima parte riguarda la risoluzione numerica dei problemi di tipo parabolico e iperbolico. Come nel capitolo sulle differenze finite, viene infine illustrata la risoluzione di un problema spettrale di Helmholtz, tipico di alcuni settori ingegneristici.