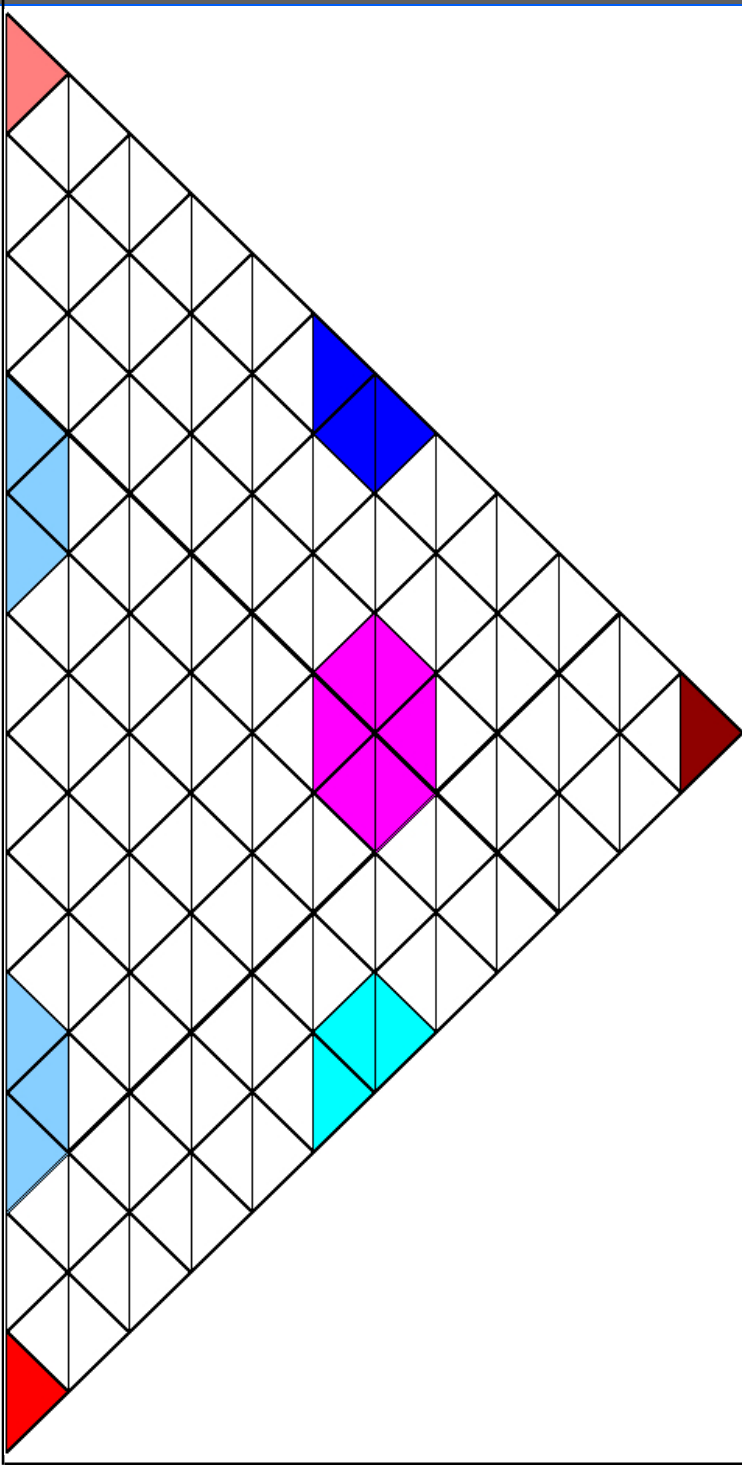


Sebastiano Seatzu
Cornelis Van der Mee
Pietro Contu



MATEMATICA APPLICATA

Un secondo corso

SIMAI

Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale

Indice

Prefazione	i
1 INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI (PDEs)	1
1.1 Preliminari	1
1.2 PDEs del secondo ordine	5
2 RISULTATI ESSENZIALI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (ODEs)	13
2.1 Preliminari	13
2.2 Trasformazione di una ODE di ordine superiore al primo in un sistema	15
2.3 Risoluzione di semplici ODEs lineari del secondo ordine	17
2.4 Esempi di ODEs di tipo inhomogeneo facilmente risolvibili	19
2.5 Risoluzione di sistemi di ODEs lineari omogenei	22
2.6 Risoluzione di sistemi di ODEs lineari inhomogenei	24
2.7 Risoluzione numerica dei sistemi di ODEs	28
3 SERIE DI FOURIER E PROBLEMI SPETTRALI DI STURM-LIOUVILLE	35
3.1 Funzioni periodiche e polinomi trigonometrici	35
3.2 Serie di Fourier	42
3.3 Serie di Fourier in due variabili	50
3.4 Problema di Sturm-Liouville: Forma canonica	53
3.5 Problema di Sturm-Liouville con condizioni di periodicit�	61
4 RISOLUZIONE ANALITICA DELLE PDEs	65
4.1 Metodo degli integrali generali	65
4.1 a Problemi di Cauchy per PDEs iperboliche	67
4.2 Metodo di separazione delle variabili	70
4.2 a Equazioni ellittiche	72
4.2 b Equazioni paraboliche	79

4.2 c	Equazioni iperboliche	97
4.2 d	PDEs in tre variabili	103
4.3	Esercizi proposti	110
5	ALGEBRA LINEARE ESSENZIALE	113
5.1	Proprietà di base	113
5.2	Norme vettoriali e matriciali	122
5.3	Sistemi lineari	132
5.4	Metodi iterativi	142
6	METODI ALLE DIFFERENZE FINITE	157
6.1	Equazioni ellittiche	160
6.2	Equazioni paraboliche	167
6.3	Equazioni iperboliche	171
6.4	Modelli debolmente non lineari	175
6.5	Problema spettrale di Helmholtz	179
6.6	Una tipica applicazione industriale	183
6.7	Esercizi proposti	185
7	SISTEMI NON LINEARI	187
7.1	Definizioni e risultati basilari	187
7.2	Caso unidimensionale	195
7.3	Caso multidimensionale	202
8	METODO AGLI ELEMENTI FINITI	213
8.1	Introduzione	213
8.2	Formulazione variazionale	215
8.2 a	Formulazione variazionale di una ODE con valori agli estremi assegnati	215
8.2 b	Richiami di calcolo vettoriale-differenziale	217
8.2 c	Forma variazionale di tipici BVPs	224
8.2 d	Differenza fondamentale tra la formulazione classica e quella variazionale	227
8.2 e	Spazi di Sobolev	228
8.3	Proprietà basilari degli spazi di Sobolev	231
8.4	Risoluzione di BVPs con il metodo degli elementi finiti	234
8.4 a	Calcolo delle funzioni di base $\phi_l(x, y)$	241
8.4 b	Calcolo della stiffness matrix e del load vector	246
8.4 c	Triangolo di riferimento e suo utilizzo nella costruzione del sistema (8.43)	249
8.5	BVPs con condizioni inomogenee al bordo	254
8.6	Convergenza del metodo degli elementi finiti	258

8.7	Problema spettrale di Helmholtz	259
8.8	Problemi parabolici e iperbolici	263
A RISULTATI ESSENZIALI DI ANALISI FUNZIONALE		273
Bibliografia		277

PREFAZIONE

Obiettivo primario del libro è la presentazione dei metodi basilari nella risoluzione analitica e numerica delle Equazioni Differenziali. Al fine di ridurre al minimo il ricorso ad altri testi, nel libro vengono richiamati i metodi e i risultati necessari alla loro reale comprensione.

Destinatari primi del libro sono gli studenti delle Lauree Magistrali in Ingegneria. Per questo motivo vengono presentati i risultati analitici e numerici che maggiormente interessano le applicazioni, rinviando a libri specialistici i risultati teorici e modellistici relativi a situazioni più complesse. È questo il motivo per il quale sono state omesse le dimostrazioni su diversi risultati analitici e numerici utilizzati. Il libro potrebbe essere adottato nella Laurea Magistrale in Matematica, a condizione che vengano apportate integrazioni sulle proprietà analitiche delle soluzioni delle equazioni differenziali e precisazioni varie sulla esistenza e unicità della soluzione in domini più generali. Considerazioni analoghe, in un certo senso complementari, valgono per la Laurea Magistrale in Fisica. In questo caso le integrazioni dovrebbero riguardare la parte modellistica. Sarebbe infatti opportuno integrare il libro con la presentazione di ulteriori problematiche fisiche, allo scopo di evidenziare maggiormente che le equazioni differenziali sono lo strumento matematico più utilizzato per descrivere le relazioni tra le diverse entità fisiche (massa, posizioni, forze, energie, momenti, ecc.). Le equazioni differenziali sono infatti utilizzate per rappresentare fenomeni stazionari ed evolutivi nella generalità dei settori dell'Ingegneria, della Fisica e di numerosissimi altri settori delle scienze applicate. Negli ultimi due decenni il loro utilizzo si è esteso a settori non tradizionali, come quello delle nanotecnologie, nel quale si presentano spesso con caratteristiche nuove, aprendo così nuovi fronti per la ricerca matematica. Due esempi relativi a questo settore sono illustrati nei capitoli quinto e settimo. Anche se buona parte degli argomenti trattati sono contenuti in [26], i due libri presentano importanti differenze. In primo luogo perché i cambiamenti, apportati nella presentazione degli argomenti, ne hanno accresciuto la leggibilità, in secondo luogo perché gli ampliamenti introdotti in alcuni capitoli lo hanno reso più completo, riducendo significativamente la necessità di ricorrere ad altri testi. Anche se la sua focalizzazione riguarda i metodi di risoluzione analitica e numerica delle equazioni

differenziali a derivate parziali, alcuni capitoli sono dedicati ai richiami e alle metodologie, le cui conoscenze sono essenziali alla loro effettiva comprensione. Dei suoi otto capitoli, il primo e il quarto riguardano la risoluzione analitica delle equazioni a derivate parziali. Più precisamente, mentre il primo capitolo contiene una presentazione di carattere generale sulle equazioni alle derivate parziali con relativa classificazione, il quarto è dedicato alla presentazione dei due metodi di risoluzione analitica maggiormente utilizzati, con applicazioni a vari problemi di tipo ellittico, parabolico e iperbolico.

Il secondo richiama i risultati essenziali sulle equazioni differenziali ordinarie, con una certa enfasi sui metodi spettrali, dato che questi sono i più utilizzati nella risoluzione analitica di quelle alle derivate parziali. Il capitolo terzo è funzionale al quarto, in quanto la generalità delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali è rappresentabile mediante serie di Fourier o di autofunzioni relative a problemi di Sturm-Liouville. Per questo motivo, in aggiunta ai richiami essenziali, vengono messe in evidenza le proprietà di decadimento dei coefficienti delle serie di Fourier in funzione della regolarità della soluzione.

Nel quinto, dedicato all'algebra lineare, oltre ai richiami di carattere generale sugli spazi vettoriali, autovalori-autovettori e norme vettoriali e matriciali, vengono richiamate le proprietà spettrali basilari nella risoluzione dei sistemi lineari mediante i metodi iterativi. Vengono quindi presentati alcuni dei metodi iterativi più utilizzati nella risoluzione numerica dei sistemi lineari tipici delle equazioni a derivate parziali.

Il sesto è dedicato alla risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali mediante i metodi alle differenze finite. Nel primo caso viene considerata la risoluzione di problemi ai limiti per equazioni lineari e debolmente lineari del secondo ordine. Nel secondo caso la risoluzione numerica di problemi ellittici, parabolici e iperbolici lineari su domini rettangolari. Nel caso ellittico debolmente non lineare ellittico, viene altresì considerata la risoluzione su domini di tipo rettangolare.

Il settimo capitolo è dedicato alla risoluzione numerica dei sistemi non lineari. Dopo una presentazione generale dei metodi di risoluzione e di alcuni metodi iterativi, vengono messe in evidenza le principali analogie e differenze con i metodi iterativi per i sistemi lineari. Il capitolo è corredato da esempi esplicativi e da applicazioni riguardanti la risoluzione numerica delle equazioni differenziali debolmente non lineari.

Il capitolo ottavo è il più vasto. Dopo aver richiamato alcune definizioni essenziali di calcolo vettoriale-differenziale, si procede alla formulazione variazionale dei problemi differenziali considerati, evidenziando le principali differenze tra le formulazioni classiche e quelle variazionali. Vengono quindi introdotti gli spazi di Sobolev, con la presentazione delle proprietà di specifico interesse per

il settore. Si passa quindi alla risoluzione dei problemi ai limiti per le equazioni differenziali lineari ordinarie e dei problemi con valori al bordo per quelle parziali di tipo ellittico. Per queste vengono considerati problemi con valori noti della soluzione al bordo, valori assegnati della derivata normale sulla frontiera e condizioni miste.

L'ultima parte riguarda la risoluzione numerica dei problemi di tipo parabolico e iperbolico. Come nel capitolo sulle differenze finite, viene infine illustrata la risoluzione di un problema spettrale di Helmholtz, tipico di alcuni settori ingegneristici.

