Calcolo Scientifico e Matematica Applicata

Scritto Generale, 14.01.2019, Ingegneria **Meccanica**

Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 10$, $3 \mapsto 8$, $5 \mapsto 8$.

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} - 18u_{xt} + 65u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = x^2 + 3, \quad u_t(x,0) = 3x - 2. \end{cases}$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 8u_x + 12u + 4x - 1, \quad 0 \le x \le 1, \ t \ge 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = -\frac{17}{36}, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + (x^2+3)u_x - 6\, u_t - (2+x)^2 u + x^4 \sin^2(2x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -1 \le x \le 3, \quad 0 \le t \le 12, \\ u(-1,t) = f_1(t), \quad u(3,t) = f_2(t), \\ u(x,0) = x + 2, \quad u_t(x,0) = x^2 + 1. \end{cases}$$

   Discutere le condizioni sul passo affinché la matrice del sistema sia invertibile.

5. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema ellittico

$$\begin{cases} -(1+x^2+y^2)u_{xx} - (1+x^2+y^2)u_{yy} + (1+3\sin^2(x+y))u = f(x,y), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le 2\pi, \\ u(x,0) = g_1(x), \quad u(x,2\pi) = g_2(x), \\ u(0,y) = h_1(y), \quad u(\pi,y) = h_2(y). \end{cases}$$

   Discutere le proprietà principali della matrice del sistema.

Soluzioni:

1. Sostituendo $u(x,t)=f(x-ct)$ otteniamo $(c^2+18c+65)f''(x-ct)=0$ oppure $c=-5$ o $c=-13$. Quindi

$$u(x,t)=f(x+5t)+g(x+13t),$$

il che implica

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{23}{16}x^2+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{39}{8}-\tfrac{1}{8}\text{cost.},\\ g(x) &= -\tfrac{7}{16}x^2-\tfrac{1}{4}x-\tfrac{15}{8}+\tfrac{1}{8}\text{cost.} \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{23}{16}(x+5t)^2+\tfrac{1}{4}(x+5t)+\tfrac{39}{8}-\tfrac{7}{16}(x+13t)^2-\tfrac{1}{4}(x+13t)-\tfrac{15}{8}\\ &= x^2+3xt-38t^2-2t+3. \end{aligned}$$

2. Ponendo $u(x,t)=v(x,t)+\phi(x)$ si ottengono i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx}-8v_x+12v,\\ v(0,t)=v(1,t)=0,\\ v(x,0)=g(x)-\phi(x), \quad v_t(x,0)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi''-8\phi'+12\phi=-4x+1,\\ \phi(0)=0, \quad \phi(1)=-\frac{17}{36}. \end{cases}$$

Allora

$$\phi(x)=-\tfrac{1}{3}x-\tfrac{5}{36}+\tfrac{5/36}{1-e^{-4}}e^{2x}+\tfrac{5/36}{1-e^{4}}e^{6x}.$$

D'altra parte, ponendo $v(x,t)=X(x)T(t)$ si ha:

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}-8\frac{X'(x)}{X(x)}+12=-\lambda,$$

dove $X(0)=X(1)=T'(0)=0$. Per $\lambda>4$ si ha per la soluzione dell'equazione caratteristica $\alpha=4+i\beta$ per $\beta=\sqrt{\lambda-4}$. In tal caso $X(x)\simeq e^{4x}\sin(\beta x)$, dove $\beta_n=n\pi$ per $n=1,2,\ldots$. Quindi $\lambda_n=4+n^2\pi^2$ e $T_n(t)=\cos(t\sqrt{4+n^2\pi^2})$. Per $\lambda=4$ si ha $\alpha=4$ (zero doppio). In tal caso $X(x)\simeq x\,e^{4x}$ che non si annulla in $x=1$. Quindi $\lambda=4$ non è autovalore. Per $\lambda<4$ si ha $\alpha=4\pm\gamma$, dove $\gamma=\sqrt{4-\lambda}$.

In tal caso $X(x) \simeq e^{4x}\sinh(\gamma x)$ che non si annulla in $x = 1$. Quindi non ci sono autovalori $\lambda < 4$. Di conseguenza,

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{4x}\sin(n\pi x)\cos(t\sqrt{4+n^2\pi^2}).$$

Inoltre,

$$c_n = 2\int_0^1 e^{-4x}(g(x)-\phi(x))\sin(n\pi x)\,dx.$$

3. I nodi sono $x_i = -1 + ih$ e $t_j = jk$, dove $h = \frac{5}{n+1}$ e $k = \frac{12}{m+1}$. Abbiamo $u_{0,j} = f_1(t_j)$, $u_{n+1,j} = f_2(t_j)$, $u_{i,0} = x_i + 2$. In tal caso

$$u_{i,1} = u_{i,0} + k(x_i^2+1) + \tfrac{1}{2}k^2\left(\frac{u_{i+1,0}-2u_{i0}+u_{i-1,0}}{h^2}\right.$$
$$\left. + (x_i^2+3)\frac{u_{i+1,0}-u_{i-1,0}}{2h} - 6(x_i^2+1) - (2+x_i)^2u_{i,0} + x_i^4\sin^2(2x_i)\right).$$

Inoltre,

$$\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{k^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1}-2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}}{h^2}\right)$$
$$+ \frac{x_i^2+3}{2}\left(\frac{u_{1+1,j+1}-u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1}-u_{i-1,j-1}}{2h}\right)$$
$$- 6\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2k} - (2+x_i)^2u_{ij} + x_i^4\sin^2(2x_i).$$

Cambiando l'ordine dei termini si ottiene:

$$\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{3}{k}\right)u_{i,j+1} + \left(\frac{1}{h^2}-\frac{x_i^2+3}{4h}\right)u_{i+1,j+1} + \left(\frac{1}{h^2}+\frac{x_i^2+3}{4h}\right)u_{i-1,j+1}$$
$$= \frac{2u_{ij}-u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i+1,j-1}-2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}}{2h^2}$$
$$+ \frac{u_{i+1,j-1}-u_{i-1,j-1}}{2h}$$
$$+ 3\frac{u_{i,j-1}}{k} - (2+x_i)^2u_{ij} + x_i^4\sin^2(2x_i).$$

La matrice del sistema è strettamente diagonalmente dominante per ogni istante t_j se

$$\frac{x_i^2+3}{4h} \le \frac{1}{h^2},$$

dove $x_i^2 + 3 \le 19$. Quindi $\frac{19}{4h} \le \frac{1}{h^2}$, cioè $n \ge 23$.

5. I nodi sono $x_i = ih$ e $y_j = jk$, dove $h = \frac{\pi}{n+1}$ e $k = \frac{2\pi}{m+1}$. Quindi

$$\begin{aligned}
&-(1+x_i^2+y_j^2)\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2} - (1+x_i^2+y_j^2)\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{k^2} \\
&+(1+3\sin^2(x_i+y_j))u_{ij} = f(x_i,y_j), \\
&u_{i0} = g_1(x_i), \quad u_{i,m+1} = g_2(x_i), \\
&u_{0j} = h_1(y_j), \quad u_{n+1,j} = h_2(y_j).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
(1+x_i^2+y_j^2)\left(\frac{2}{h^2}+\frac{2}{k^2}\right)u_{ij} &+ (1+3\sin^2(x_i+y_j))u_{ij} \\
&- \frac{1+x_i^2+y_j^2}{h^2}u_{i+1,j} - \frac{1+x_i^2+y_j^2}{h^2}u_{i-1,j} \\
&- \frac{1+x_i^2+y_j^2}{k^2}u_{i,j+1} - \frac{1+x_i^2+y_j^2}{k^2}u_{i,j-1} = f(x_i,y_j), \\
&u_{i0} = g_1(x_i), \quad u_{i,m+1} = g_2(x_i), \\
&u_{0j} = h_1(y_j), \quad u_{n+1,j} = h_2(y_j).
\end{aligned}$$

La matrice del sistema è strettamente diagonalmente dominante e quindi invertibile, grazie alla positività dell'espressione $1 + 3\sin^2(x_i + y_j)$.