Calcolo Scientifico e Matematica Applicata
Scritto Generale, 15.01.2018

Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 10$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$.

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema iperbolico:
$$\begin{cases} u_{tt} + 6u_{xt} + 8u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 2x+1, \quad u_t(x,0) = x^2. \end{cases}$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u_x + 2u + x + 2, \quad 0 \le x \le 3,\ t \ge 0, \\ u(0,t) = -1, \quad u(3,t) = 8, \\ u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{3}, \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + (2x+1)u_x - 2t\, u_t - (1+x)^2 u + x^2 \sin^2(3x), \\ \qquad\qquad -1 \le x \le 4, \quad 0 \le t \le 12, \\ u(-1,t) = f_1(t), \quad u(4,t) = f_2(t), \\ u(x,0) = x+2, \quad u_t(x,0) = x^2 \sin^2(x). \end{cases}$$
Discutere le condizioni sul passo affinché la matrice del sistema sia invertibile.

4. Illustrare la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico:
$$\begin{cases} u_{tt} = [(1+x^2)u_x]_x - (1+\cos^2(x))u + f(x), \quad 0 \le x \le 2, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x). \end{cases}$$
Discutere le proprietà principali delle matrici del sistema.

Scritto generale del 15.01.2018

① Sia

$$u(x,t) = f(x-c_1 t) + g(x-c_2 t),$$

Metodo di D'Alembert

la superposizione di due onde con le rispettive velocità c_1 e c_2.
Allora

$$c_1^2 f''(x-c_1 t) + c_2^2 g''(x-c_2 t) - 6c_1 f''(x-c_1 t) - 6c_2 g''(x-c_2 t)$$
$$+ 8 f''(x-c_1 t) + 8 g''(x-c_2 t) = 0.$$

Scegliendo $c_{1,2}$ come i due zeri dell'equazione $c^2-6c+8=0$, cioè $c_1=2$ e $c_2=4$, si ha:

$$\left.\begin{array}{l} u(x,t) = f(x-2t) + g(x-4t) \\ u_t(x,t) = -2f'(x-2t) - 4g'(x-4t) \end{array}\right\}$$

Quindi

$$\left.\begin{array}{l} f(x) + g(x) = 2x+1 \to f'(x) + g'(x) = 2 \\ -2f'(x) - 4g'(x) = x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 \\ g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2 \end{array}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 4x + 1 + c, \quad g(x) = -\frac{1}{6}x^3 - 2x - c.$$

Di conseguenza,

$$u(x,t) = \frac{1}{6}(x-2t)^3 + 4(x-2t) + 1$$
$$-\frac{1}{6}(x-4t)^3 - 2(x-4t)$$

(2) Poniamo

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x),$$

dove

$$\begin{cases} \varphi''(x) - 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) = -x-2 \\ \varphi(0) = -1, \quad \varphi(3) = 8 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} - 3v_x + 2v \\ v(0,t) = v(3,t) = 8 \\ v(x,0) = \cos\frac{\pi x}{3} - \varphi(x), \quad v_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Poniamo

$$\begin{cases} v(x,t) = X(x)T(t) \\ X(0) = X(3) = T'(0) = 0 \end{cases}$$

allora

$$-\lambda \overset{\text{def.}}{=} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) - 3X'(x) + 2X(x)}{X(x)}$$

Il primo sistema da risolvere è

$$\begin{cases} X''(x) - 3X'(x) + (2+\lambda)X(x) = 0 \\ X(0) = X(3) = 0 \end{cases}$$

il quale ha l'equazione caratteristica

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 + \lambda = 0 \quad \text{oppure} \quad \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \lambda$$

$$\begin{cases} \underline{\text{caso } \lambda > \frac{1}{4}} \quad X_n(x) \simeq e^{\frac{3}{2}x} \sin\left(x\sqrt{\lambda_n - \frac{1}{4}}\right) \\ \qquad \text{dove} \quad 3\sqrt{\lambda_n - \frac{1}{4}} = n\pi \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots \\ \text{Quindi } \lambda_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{n\pi}{3}\right)^2, \; X_n(x) \simeq e^{\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \\ \underline{\text{caso } \lambda = \frac{1}{4}} \quad X_n(x) \simeq x e^{\frac{3}{2}x} \text{ non si annulla in } x = 3. \\ \underline{\text{caso } \lambda < \frac{1}{4}} \quad X_n(x) \simeq e^{\frac{3}{2}x} \sinh\left(x\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_n}\right) \\ \qquad \text{non si annulla in } x = 3 \end{cases}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\cos\left(t\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}\right)}_{= T_n(t), \; \frac{T_n''(t)}{T_n(t)} = -\lambda_n \text{ con } T_n'(0) = 0} e^{\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

$$\longrightarrow v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right),$$

dove $\quad c_n = \int_0^2 v(x,0) e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx.$

Ci rimane il calcolo di $\varphi(x)$.

$$\varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + Ax + B \qquad A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{7}{4}$$

dove $\quad -x - 2 = \varphi'' - 3\varphi' + 2\varphi = -3A + 2(Ax + B)$

$$\Rightarrow \varphi(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \varphi(0) = c_1 + c_2 - \frac{7}{4} \\ 0 &= \varphi(3) = c_1 e^3 + c_2 e^6 - \frac{13}{4} \end{aligned}\right\} \; c_1 = \frac{-\frac{7}{4}e^6 + \frac{13}{4}}{e^6 - e^3}, \; c_2 = \frac{\frac{7}{4}e^3 - \frac{13}{4}}{e^6 - e^3}$$

(3) $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 4 \qquad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 12$

$$x_i = -1 + ih \qquad t_j = jk \qquad h = \frac{5}{n+1} \qquad k = \frac{12}{m+1}$$

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2} \right\} + \frac{(2x_i+1)}{2}\left\{ \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h} \right\} - 2t_j \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} - (1+x_i)^2 u_{i,j} + x_i^2 \sin^2(3x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

dove i termini con $u_{i-1,j\pm1}$ per $i=1$ e con $u_{i+1,j\pm1}$ per $i=n$ vengono mossi tra i termini noti [poiché $u(-1,t) = f_1(t)$, $u(4,t) = f_2(t)$].

$$\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{t_j}{k}\right) u_{i,j+1} - \left(\frac{1}{2h^2} + \frac{2x_i+1}{4h}\right) u_{i+1,j+1} - \left(\frac{1}{2h^2} - \frac{2x_i+1}{4h}\right) u_{i-1,j+1}$$
$$= (\text{termini noti})(u_{i,j}, u_{i+1,j-1}, u_{i,j-1}, u_{i-1,j-1}). \qquad (*)$$

Si ha: $u_{i,0} = u(x_i, 0) = x_i + 2$

$$\begin{cases} u_{i,1} = u(x_i, t_1) \simeq u(x_i, 0) + k\, u_t(x_i, 0) + \frac{1}{2}k^2 u_{tt}(x_i, 0) \\ \quad = x_i + 2 + k x_i^2 \sin^2(x_i) + \frac{1}{2}k^2 \Big\{ \underbrace{\frac{u_{i+1,0} - 2u_{i,0} + u_{i-1,0}}{h^2}}_{=0,\ \text{poiché } u(x_i,0) = x_i + 2} \\ \quad + (2x_i+1) \underbrace{\frac{u_{i+1,0} - u_{i-1,0}}{2h}}_{=1,\ \text{poiché } u(x_i,0) = x_i+2} - 2k x_i^2 \sin^2(x_i) - (1+x_i^2)(x_i+2) \\ \quad + x_i^2 \sin^2(3x_i) \Big\} \\ u_{0,j} = f_1(t_j) \qquad u_{n+1,j} = f_2(t_j) \end{cases}$$

Siccome $\left|\frac{1}{2h^2}+\frac{2x_i+1}{4h}\right|+\left|\frac{1}{2h^2}-\frac{2x_i+1}{4h}\right|=\frac{1}{h^2}$

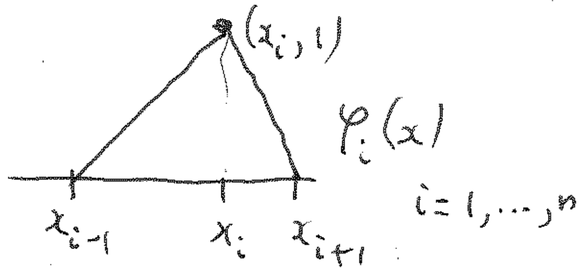
se $\frac{9}{4h}\leq\frac{1}{2h^2}$ (cioè, se $0<h\leq\frac{2}{9}$; poichè $|2x_i+1|\leq 9$),

la matrice tridiagonale di ciascuno dei m sistemi (per $u_{i,j+1}$ con $j=1,\dots,m$) è strettamente diagonalmente dominante se $0<h\leq\frac{2}{9}$. Infatti,

$$\underbrace{\left|\frac{1}{2h^2}+\frac{2x_i+1}{4h}\right|+\left|\frac{1}{2h^2}-\frac{2x_i+1}{4h}\right|}_{=\frac{1}{h^2}\text{ se } 0<h\leq\frac{2}{9}}\leq\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}<\frac{1}{h^2}+\frac{1}{K^2}+\frac{t_j}{K}.$$

$j=1,\dots,m$

④ $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 2$



Trovare $u(\cdot, t) \in H_0^1(0,2)$ tale che per ogni $v \in H_0^1(0,2)$ si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} \displaystyle\int_0^2 u(x,t)\, v(x)\, dx = -\int_0^2 \left\{ (1+x^2)\, u_x(x,t)\, v'(x) + (1+\cos^2 x)\, u(x,t)\, v(x) \right\} dx \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^2 f(x)\, v(x)\, dx \\ \displaystyle\int_0^2 u(x,0)\, v(x)\, dx = \int_0^2 g(x)\, v(x)\, dx \\ \left[\dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_0^2 u(x,t)\, v(x)\, dx \right]_{t=0} = \displaystyle\int_0^2 h(x)\, v(x)\, dx \end{cases}$$

Siano $u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\, \varphi_j(x)$, $\quad v(x) = \varphi_i(x)$

allora

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, c_j''(t) = -\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\, c_j(t) + \underbrace{\int_0^2 f(x)\, \varphi_i(x)\, dx}_{f_i}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, c_j(0) = \underbrace{\int_0^2 g(x)\, \varphi_i(x)\, dx}_{g_i}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\, c_j'(0) = \underbrace{\int_0^2 h(x)\, \varphi_i(x)\, dx}_{h_i}, \end{cases}$$

essendo

$$M_{ij} = \int_0^2 \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, dx$$

$$K_{ij} = \int_0^2 \left\{ (1+x^2)\, \varphi_i'(x)\, \varphi_j'(x) + (1+\cos^2 x)\, \varphi_i(x)\, \varphi_j(x) \right\} dx.$$

Siccome $M = (M_{ij})_{i,j=1}^{n}$ è la matrice di Gram delle funzioni linearmente indipendenti $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, M è reale e simmetrica con autovalori positivi (e anche tridiagonale).

Altro modo: Per $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij} c_i c_j = \int_0^2 \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x) \right|^2 dx$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} c_i c_j = \int_0^2 \left\{ (1+x^2) \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j'(x) \right|^2 + (1+\cos^2 x) \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x) \right|^2 \right\} dx$$

Quindi: ~~Tali~~ espressioni sono non negative e si annullano se e solo se $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Il sistema lineare ha la forma vettoriale:

$$\begin{cases} \underline{c}''(t) = -M^{-1} K \underline{c}(t) + M^{-1} \underline{f} \\ \underline{c}(0) = M^{-1} \underline{g} \\ \underline{c}'(0) = M^{-1} \underline{h} \end{cases}$$