Calcolo Scientifico e Matematica Applicata

Scritto Generale, 16.02.2019, Ingegneria **Ambientale**

Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 10$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$.

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} + 13u_{xt} + 30u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 1 + \cos(x), \quad u_t(x,0) = 2\sin(x). \end{cases}$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 49u + 3x + 2, \quad 0 \le x \le 4\pi, \\ u(0,t) = \frac{47}{49}, \qquad u(4\pi,t) = -\frac{3}{49} - \frac{12}{49}\pi, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} + (x^4+2)u_x + (1+x^2t^2)u_t - (1+x^2)u + \cos^2(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -1 \le x \le 5, \ 0 \le t \le 8, \\ u(-1,t) = f_1, \quad u(5,t) = f_2, \\ u(x,0) = x^4, \quad u_t(x,0) = 1 + x^2. \end{cases}$$

Discutere le condizioni sui passi affinché le matrici dei sistemi siano invertibili.

4. a. Illustrare il procedimento di risoluzione, mediante gli elementi finiti, del seguente problema ellittico:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left([3+\cos(xy)]\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left([3+\cos(xy)]\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\sqrt{1+x^2+y^2} = x^3\sin(y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

sotto la condizione al contorno $u|_{\partial\Omega} = 0$, essendo Ω un aperto limitato e convesso avendo una curva liscia come la sua frontiera.

b. Indicati con φ la box spline che assume il valore 1 nel punto nodale $(1,2)$ e zero negli altri punti nodali e con ψ la box spline che assume il valore 1 nel punto nodale $(1-\frac{1}{2}h, 2+h)$ e zero negli altri, illustrare il procedimento per il calcolo del seguente integrale

$$I = \iint_T \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dxdy,$$

essendo T il triangolo di vertici

$$\left\{(1-\tfrac{1}{6}h, 2+2h), (1,2), (1+\tfrac{1}{3}h, 2-\tfrac{1}{2}h)\right\}.$$

Utilizzare il triangolo di riferimento.

Calcolo Scientifico e Matematica Applicata
Scritto Generale, 16.02.2019, Ingegneria **Meccanica**

Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 10$, $3 \mapsto 8$, $5 \mapsto 8$.

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} + 13u_{xt} + 30u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 1 + \cos(x), \quad u_t(x,0) = 2\sin(x). \end{cases}$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 49u + 3x + 2, \quad 0 \le x \le 4\pi, \\ u(0,t) = \frac{47}{49}, \qquad u(4\pi,t) = -\frac{3}{49} - \frac{12}{49}\pi, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx} + (x^4+2)u_x + (1+x^2t^2)u_t - (1+x^2)u + \cos^2(x), \\ \qquad\qquad -1 \le x \le 5, \ 0 \le t \le 8, \\ u(-1,t) = f_1, \quad u(5,t) = f_2, \\ u(x,0) = x^4, \quad u_t(x,0) = 1 + x^2. \end{cases}$$

Discutere le condizioni sui passi affinché le matrici dei sistemi siano invertibili.

5. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (1+x^4)u_x - (1+2t\cos^2(2+t))u + 1 + 3\sin^4(x), \\ \qquad\qquad 1 \le x \le 6, \ 0 \le t \le 12, \\ u(1,t) = f_1, \quad u(6,t) = f_2, \\ u(x,0) = x^2 + 3. \end{cases}$$

Discutere le condizioni sui passi affinché le matrici dei sistemi siano invertibili.