Calcolo Scientifico e Matematica Applicata
Scritto Generale, 17.12.2018, Ingegneria **Meccanica**

Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 10$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} - 18u_{xt} + 45u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 3x - 2, \quad u_t(x,0) = x^3 - 2. \end{cases}$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + u + x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0, \\ u(0,t) = -5, \quad u(1,t) = -6, \\ u(x,0) = \cos(\pi x). \end{cases}$$

3. Determinare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + (13 + \lambda)y = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \\ y(0) + 4y'(0) = 0, \\ y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

4. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4x^2 u_x - (1 + 2x^2)u + \cos^2(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq t \leq 8, \\ u(0,t) = f_1, \quad u(3,t) = f_2, \\ u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = x + 2. \end{cases}$$

Discutere le condizioni sul passo affinché la matrice del sistema sia invertibile.

Calcolo Scientifico e Matematica Applicata
Scritto Generale, 17.12.2018, Ingegneria **Ambientale**

Valutazione degli esercizi: $2 \mapsto 10$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$, $5 \mapsto 4$.

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + u + x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1, \ t \geq 0, \\ u(0,t) = -5, \quad u(1,t) = -6, \\ u(x,0) = \cos(\pi x). \end{cases}$$

3. Determinare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + (13 + \lambda)y = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \\ y(0) + 4y'(0) = 0, \\ y(2\pi) = 0. \end{cases}$$

4. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 4x^2 u_x - (1 + 2x^2)u + \cos^2(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq t \leq 8, \\ u(0,t) = f_1, \quad u(3,t) = f_2, \\ u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = x + 2. \end{cases}$$

   Discutere le condizioni sul passo affinché la matrice del sistema sia invertibile.

5. Illustrare, mediante il metodo degli elementi finiti, la risoluzione numerica del seguente problema parabolico:

$$\begin{cases} u_t = [(1 + x^2)u_x]_x - (1 + \cos^2(x))u + f(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

   Discutere le proprietà principali delle matrici del sistema.

Soluzioni per i meccanici:

1. Sia $u(x,t) = f(x-ct)$. essendo $f \in C^2(\mathbb{R})$. Allora $c^2 + 18c + 45 = (c+3)(c+15) = 0$. Quindi

$$u(x,t) = f(x+3t) + g(x+15t),$$

essendo $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Risultano le seguenti identità:

$$f(x) + g(x) = 3x - 2, \qquad 3f'(x) + 15g'(x) = x^3 - 2.$$

Dunque

$$f(x) = -\tfrac{1}{48}x^4 + \tfrac{47}{12}x - \tfrac{3}{2} - \tfrac{c}{12}, \qquad g(x) = \tfrac{1}{48}x^4 - \tfrac{11}{12}x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{c}{12}.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\tfrac{1}{48}(x+3t)^4 + \tfrac{47}{12}(x+3t) - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{48}(x+15t)^4 - \tfrac{11}{12}(x+15t) - \tfrac{1}{2} \\ &= x^3t + 27x^2t^2 + 279xt^3 + 1053 + 3x - 2t - 2. \end{aligned}$$

2. Sia $u(x,t) = v(x,t) + \phi(x)$, dove

$$\phi''(x) - 2\phi'(x) + \phi(x) = -x - 3, \quad \phi(0) = -5, \quad \phi(1) = 6.$$

Quindi $\phi(x) = -x - 5 + 5e^x$. Allora

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} - 2v_x + v, & 0 \le x \le 1,\ t \ge 0, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = \cos(\pi x) - \phi(x). \end{cases}$$

Sostituendo $v(x,t) = X(x)T(t)$ si ottiene:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) - 2X'(x) + X(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

essendo λ una costante. Quindi

$$X''(x) - 2X'(x) + (1+\lambda)X(x) = 0$$

ha l'equazione caratteristica $\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \lambda$ oppure $(\alpha-1)^2 = -\lambda$. Per $\lambda > 0$ si ottengono $X_n(x) \simeq e^x \sin(x\sqrt{zl_n})$, dove $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$ per

$n = 1, 2, \ldots$ e $X_n(x) \simeq e^x \sin(n\pi x)$. Per $\lambda = 0$ si ottiene $X(x) = xe^x$ che non si annulla in $x = 1$, quindi $\lambda = 0$ non può essere un autovalore. Per $\lambda < 0$ si ottiene $X(x) \simeq e^x \sinh(x\sqrt{-\lambda})$ che non si annulla in $x = 1$, quindi non ci sono autovalori negativi. Di consequenza,

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t} e^x \sin(n\pi x),$$

dove

$$c_n = 2 \int_0^1 (\cos(\pi x) - \phi(x))\, e^{-x} \sin(n\pi x).$$

3. L'equazione caratteristica $\alpha^2 + 6\alpha + (13 + \lambda)$ si converte nella forma $(\alpha + 3)^2 = -(4 + \lambda)$. Per $\lambda > -4$ si ha

$$X(x) \simeq e^{-3x} \sin((2\pi - x)\sqrt{4 + \lambda}).$$

In tal caso si ottiene

$$X(0) + 4X'(0) \simeq -11 \sin(2\pi\sqrt{4 + \lambda}) - 4\sqrt{4 + \lambda}\, \cos(2\pi\sqrt{4 + \lambda}) = 0.$$

Quindi bisogna risolvere l'equazione

$$\tan(2\pi\sqrt{4 + \lambda}) = -\frac{4}{11}\sqrt{4 + \lambda},$$

dove $\lambda > -4$. Per $n = 1, 2, 3, \ldots$ esiste un singolo valore λ_n di λ tale che

$$\frac{2n - 1}{4} < \sqrt{4 + \lambda_n} < \frac{2n + 1}{4}.$$

Per $\lambda = -4$ si trova $X(x) \simeq (2\pi - x)e^{-3x}$ che non soddisfa la condizione in $x = 0$. Per $\lambda < -4$ si ha $X(x) \simeq e^{-3x} \sinh((2\pi - x)\sqrt{-4 - \lambda})$. Si ottiene

$$\tanh(2\pi\sqrt{-4 - \lambda}) = -\tfrac{4}{11}\sqrt{-4 - \lambda},$$

che conduce ad un'equazione trascendentale avendo tre zeri, una coppia $\pm$ e lo zero.

4. Siano $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 3$ i nodi spaziali equidistanti $[h = \frac{3}{n+1}, x_i = ih]$ e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 8$ i nodi temporali

equidistanti $[k = \frac{8}{m+1},\ t_j = jk]$. Allora

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}\right] \\
&+ \frac{4x_i^2}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h}\right] \\
&- (1 + 2x_i^2)u_{ij} + \cos^2(x_i),
\end{aligned}
$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Si conoscono i dati

$$u_{0,j} = f_1, \quad u_{n+1,j} = f_2, \quad u_{i0} = x_i^2,$$

dove $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$ e $j = 0, 1, \ldots, m, m+1$. Quindi bisogna risolvere il sistema per $u_{i,j+1}$ $[i = 1, \ldots, n]$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) u_{i,j+1} - \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2x_i^2}{2h}\right) u_{i+1,j+1} - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{2x_i^2}{2h}\right) u_{i-1,j+1} \\
= \frac{2u_{ij} - u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{2h^2} \\
+ 2x_i^2 \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h} - (1 + 2x_i^2)u_{ij} + \cos^2(x_i),
\end{aligned}
$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e i termini con pedici $i-1$ per $i = 1$ e $i+1$ per $i = n$ sono da spostare alla parte a destra.

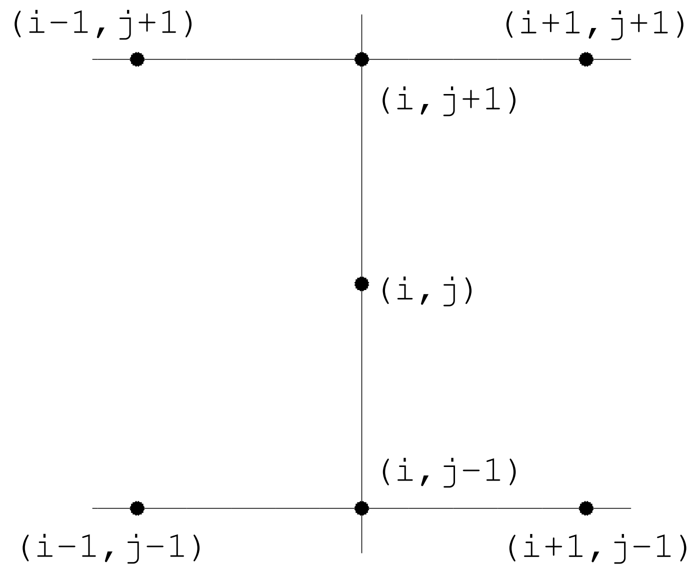
La matrice del sistema è tridiagonale. Essa è strettamente diagonalmente dominante e quindi invertibile se

$$\left|\frac{1}{h^2} + \frac{2x_i^2}{2h}\right| + \left|\frac{1}{h^2} - \frac{2x_i^2}{2h}\right| < \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}.$$

Ciò è vero se $\frac{2x_i^2}{2h} \leq \frac{1}{h^2}$ per $i = 1, \ldots, n$, cioè se $0 < h \leq [1/\max x_i^2] = \frac{1}{9}$, cioè se $n \geq 8$.

Ci rimane il calcolo di u_{i1}. Si ha:

$$
\begin{aligned}
u_{i1} = u(x_i, k) &\simeq u(x_i, 0) + k u_t(x_i, 0) + \tfrac{1}{2}k^2 u_{tt}(x_i, 0) \\
&\simeq u_{i0} + k u_t(x_i, 0) + \tfrac{1}{2}k^2 \left[\frac{u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}}{h^2}\right. \\
&\left. + 4x_i^2 \frac{u_{i+1,0} - u_{i-1,0}}{2h} - (1 + 2x_i^2)u_{i0} + \cos^2(x_i)\right],
\end{aligned}
$$



dove $u_{i0} = x_i^2$, $u_t(x_i, 0) = x_i + 2$ e $i = 1, \ldots, n$.