Calcolo Scientifico e Matematica Applicata
Scritto Generale, 28.01.2019, Ingegneria **Ambientale**

Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 10$, $3 \mapsto 8$, $4 \mapsto 8$.

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} - 14u_{xt} + 24u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 4x^2 + 3x, \quad u_t(x,0) = 4x + 6. \end{cases}$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 25u + 2x + 3, \quad 0 \le x \le 5\pi, \\ u(0,t) = \frac{47}{25}, \qquad u(5\pi,t) = -\frac{53}{25} - \frac{2}{5}\pi, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + (4x^2+1)u_x - (1+x)^2 u + \cos^4(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le x \le 5,\ 0 \le t \le 6, \\ u(0,t) = f_1, \quad u(5,t) = f_2, \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1 + x^2. \end{cases}$$

Discutere le condizioni sui passi affinché le matrici dei sistemi siano invertibili.

4. a. Illustrare il procedimento di risoluzione, mediante gli elementi finiti, del seguente problema ellittico:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left([2+\sin(x+y)]\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left([2+\sin(x+y)]\frac{\partial u}{\partial y}\right) + (1+x^2+y^2)u = 3x^2y, \quad (x,y) \in \Omega,$$

sotto la condizione al contorno $u|_{\partial\Omega} = 0$, essendo Ω un aperto limitato e convesso avendo una curva liscia come la sua frontiera.

b. Indicati con φ la box spline che assume il valore 1 nel punto nodale $(3,4)$ e zero negli altri punti nodali e con ψ la box spline che assume il valore 1 nel punto nodale $(3-\frac{1}{2}h, 4+h)$ e zero negli altri, illustrare il procedimento per il calcolo del seguente integrale

$$I = \iint_T \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dxdy,$$

essendo T il triangolo di vertici

$$\left\{(3-\tfrac{1}{2}h, 4+h), (3,4), (3+\tfrac{1}{4}h, 4-\tfrac{1}{6}h)\right\}.$$

Utilizzare il triangolo di riferimento.

Calcolo Scientifico e Matematica Applicata
Scritto Generale, 28.01.2019, Ingegneria **Meccanica**

Valutazione degli esercizi: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 10$, $3 \mapsto 8$, $5 \mapsto 8$.

1. Risolvere, con il metodo degli integrali generali, il seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} - 14u_{xt} + 24u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 4x^2 + 3x, \quad u_t(x,0) = 4x + 6. \end{cases}$$

2. Discutere la risoluzione, mediante separazione delle variabili, del seguente problema iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 25u + 2x + 3, \quad 0 \le x \le 5\pi, \\ u(0,t) = \frac{47}{25}, \qquad u(5\pi,t) = -\frac{53}{25} - \frac{2}{5}\pi, \\ u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema iperbolico

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + (4x^2 + 1)u_x - (1+x)^2 u + \cos^4(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \le x \le 5, \ 0 \le t \le 6, \\ u(0,t) = f_1, \quad u(5,t) = f_2, \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1 + x^2. \end{cases}$$

Discutere le condizioni sui passi affinché le matrici dei sistemi siano invertibili.

5. Illustrare, mediante il metodo delle differenze finite, la risoluzione numerica del seguente problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (1 + x^2)u_x - (1 + 2x\cos^2(2+t))u + 1 + 3\sin^2(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2 \le x \le 5, \ 0 \le t \le 10, \\ u(2,t) = f_1, \quad u(5,t) = f_2, \\ u(x,0) = x^4 + 1. \end{cases}$$

Discutere le condizioni sui passi affinché le matrici dei sistemi siano invertibili.

Soluzioni per gli ambientali:

1. Sostituendo $u(x,t) = f(x-ct)$ for $f \in C^2(\mathbb{R})$ we find $(c+2)(c+12) = c^2 + 14c + 24 = 0$. Quindi

$$u(x,t) = f(x+2t) + g(x+12t),$$

dove

$$f(x) + g(x) = 4x^2 + 3x, \qquad 2f'(x) + 12g'(x) = 4x + 6.$$

Quindi

$$f(x) = \tfrac{23}{5}x^2 + 3x - \tfrac{1}{5}c, \qquad g(x) = -\tfrac{3}{5}x^2 + \tfrac{1}{5}c,$$

dove c è un'opportuna costante. Di conseguenza,

$$u(x,t) = 4x^2 + 4xt - 68t^2 + 3x + 6t.$$

2. **Conversione in un problema omogeneo**. Per arrivare al problema iperbolico omogeneo

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + 25v, & 0 \leq x \leq 5\pi,\ t \geq 0, \\ v(0,t) = v(5\pi,t) = 0, \\ v(x,0) = g(x) - \psi(x), & v_t(x,0) = 0, \end{cases}$$

sostituiamo $u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$ e risolviamo il problema al contorno

$$\begin{cases} \psi'' + 25\psi = -2x - 3, \\ \psi(0) = \frac{47}{25}, \quad \psi(5\pi) = -\frac{53}{25} - \frac{2}{5}\pi. \end{cases}$$

Ponendo $\psi_p(x) = Ax + B$ si ha: $A = -\frac{2}{25}$ e $B = -\frac{3}{25}$, cioè $\psi_p(x) = -\frac{2}{25}x - \frac{3}{25}$. Dunque

$$\psi(x) = -\tfrac{2}{25}x - \tfrac{3}{25} + C\cos(5x) + D\sin(5x).$$

Quindi $-\frac{3}{25} + C = \frac{47}{25} \Longrightarrow C = 2$ e $-\frac{2}{5}\pi - \frac{3}{25} - C = -\frac{53}{25} - \frac{2}{5}\pi \Longrightarrow C = 2$, dunque $C = 2$ e D arbitraria. **Separazione delle variabili**. Sia $v(x,t) = X(x)T(t)$, dove $X(0) = X(5\pi) = T'(0) = 0$. In tal caso

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + 25 = -\lambda.$$

Partendo dall'ODE

$$X''(x) + (25+\lambda)X(x) = 0$$

con condizioni di Dirichlet $X(0) = X(5\pi) = 0$, ci risultano tre casi. **Nel caso a),** $\lambda > -25$: $\alpha = \pm i\sqrt{25+\lambda}$. In tal caso

$$X(x) = a\cos(x\sqrt{25+\lambda}\,) + b\sin(x\sqrt{25+\lambda}\,).$$

Poichè $X(0) = a$ e $X(5\pi) = a\cos(5\pi\sqrt{25+\lambda}\,) + b\sin(5\pi\sqrt{25+\lambda}\,)$, si ha:

$$a = 0, \quad \sqrt{25+\lambda_n} = \tfrac{n\pi}{5}\ (n = 1, 2, \ldots), \quad X_n(x) \simeq \sin(\tfrac{n\pi x}{5}).$$

Nel caso b), $\lambda = -25$: $\alpha = 0$ (zero doppio). In tal caso

$$X(x) = a + bx,$$

implicando che $X(0) = a = 0$ e $X(5\pi) = a + 5\pi b = 0$, cioè $a = b = 0$ (nessun autovalore). **Nel caso c),** $\lambda < -25$: $\alpha = \pm\sqrt{-25-\lambda} = \pm\beta]$. In tal caso

$$X(x) \simeq a\, e^{\beta x} + b\, e^{-\beta x},$$

implicando che $X(0) = a + b = 0$ e $X(5\pi) = \beta e^{5\pi\beta}a - \beta e^{-5\pi\beta}b = 0$, cioè $a = b = 0$. Quindi nessun autovalore.

Soluzione finale. Dal sistema al contorno

$$T_n''(t) = -\lambda_n T_n(t), \qquad T_n'(0) = 0,$$

segue

$$T_n(t) \simeq \begin{cases} \cos(t\sqrt{\frac{1}{25}n^2\pi^2 - 25}), & n \geq 8, \\ \cosh(t\sqrt{25 - \frac{1}{25}n^2\pi^2}), & n = 1, \ldots, 7, \end{cases}$$

essendo $n > \frac{25}{\pi} \simeq 7.9577$ la condizione per avere il coseno. La soluzione ha la rappresentazione

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{7} c_n \sin(\frac{n\pi x}{5})\cosh(t\sqrt{25 - \tfrac{1}{25}n^2\pi^2}) \\ &\quad + \sum_{n=8}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{5})\cos(t\sqrt{\tfrac{1}{25}n^2\pi^2 - 25}), \end{aligned}$$

dove i coefficienti c_n seguono dalla serie di Fourier seno

$$g(x) - \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{5}).$$

Infatti,

$$c_n = \tfrac{2}{5\pi} \int_0^{5\pi} (g(x) - \psi(x)) \sin(\frac{n\pi x}{5})\, dx,$$

essendo

$$\int_0^{5\pi} \sin(\frac{n\pi x}{5}) \sin(\frac{m\pi x}{5}), dx = \begin{cases} \frac{5}{2}\pi, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

3. Siano $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 5$ i nodi spaziali equidistanti $[h = \frac{5}{n+1}$, $x_i = 2 + ih]$ e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 6$ i nodi temporali equidistanti $[k = \frac{6}{m+1}$, $t_j = jk]$. Allora

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}\right] \\ &+ \frac{4x_i^2 + 1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h}\right] \\ &- (1 + x_i)^2 u_{ij} + \cos^4(x_i), \end{aligned}$$

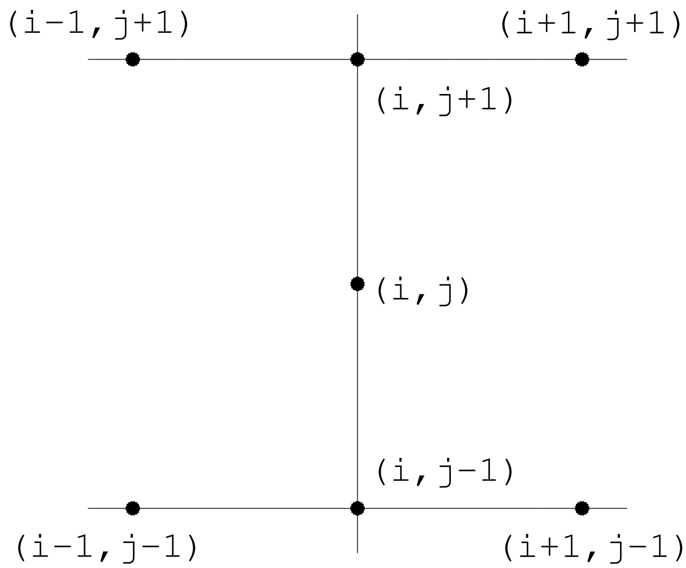
dove $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Si conoscono i dati

$$u_{0,j} = f_1, \quad u_{n+1,j} = f_2, \quad u_{i0} = x_i,$$

dove $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$ e $j = 0, 1, \ldots, m, m+1$. Quindi bisogna risolvere il sistema per $u_{i,j+1}$ $[i = 1, \ldots, n]$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) u_{i,j+1} - \left(\frac{1}{h^2} + \frac{4x_i^2 + 1}{4h}\right) u_{i+1,j+1} - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{4x_i^2 + 1}{4h}\right) u_{i-1,j+1} \\ = \frac{2u_{ij} - u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{2h^2} \\ + (4x_i^2 + 1)\frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{4h} - (1 + x_i)^2 u_{ij} + \cos^4(x_i), \end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e i termini con pedici $i - 1$ per $i = 1$ e $i + 1$ per $i = n$ sono da spostare alla parte a destra.



La matrice del sistema è tridiagonale. Essa è strettamente diagonalmente dominante e quindi invertibile se

$$\left|\frac{1}{h^2}+\frac{4x_i^2+1}{4h}\right|+\left|\frac{1}{h^2}-\frac{4x_i^2+1}{4h}\right|<\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}.$$

Ciò è vero se $\frac{4x_i^2+1}{4h}\le\frac{1}{h^2}$ per $i=1,\ldots,n$, cioè se $0<h\le[4/(1+4\max x_i^2)]=\frac{4}{101}$, cioè se $n\ge 123$.

Ci rimane il calcolo di u_{i1}. Si ha:

$$\begin{aligned}u_{i1}&=u(x_i,k)\simeq u(x_i,0)+ku_t(x_i,0)+\tfrac{1}{2}k^2u_{tt}(x_i,0)\\&\simeq u_{i0}+ku_t(x_i,0)+\tfrac{1}{2}k^2\left[\frac{u_{i+1,0}-2u_{i0}+u_{i-1,0}}{h^2}\right.\\&\left.+(4x_i^2+1)\frac{u_{i+1,0}-u_{i-1,0}}{2h}-(1+x_i)^2u_{i0}+\cos^4(x_i)\right],\end{aligned}$$

dove $u_{i0}=x_i$, $u_t(x_i,0)=1+x_i^2$ e $i=1,\ldots,n$.

4a. Il problema ellittico con condizioni di Dirichlet

$$-\nabla\cdot([2+\sin(x+y)]\nabla u)+(1+x^2+y^2)u=3x^2y$$

ammette la seguente formulazione variazionale: Trovare $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ si ha:

$$\int_\Omega \big([2+\sin(x+y)]\nabla u\cdot\nabla v + (1+x^2+y^2)uv\big)\,dxdy \\ = \int_\Omega 3x^2yv(x,y)\,dxdy.$$

Siano $\phi_i(x,y)$ $[i=1,\ldots,N]$ le funzioni spline con supporto l'unione di al massimo sei triangoli. Ponendo $u=\sum_{j=1}^N c_j\phi_j$ e $v=\phi_i$ si ha:

$$\sum_{j=1}^N c_j \int_\Omega \big([2+\sin(x+y)]\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j + (1+x^2+y^2)\phi_i\phi_j\big)\,dxdy \\ = \int_\Omega 3x^2y\phi_i(x,y)\,dxdy,$$

dove $i=1,\ldots,N$. Scrivendo quest'ultimo sistema di equazioni lineari nella forma

$$Kc = f,$$

dove la "stiffness matrix" K è reale, simmetrica e sparsa, bisogna dimostrare l'invertibilità di K. Siccome $2+\sin(x+y)$ e $1+x^2+y^2$ sono funzioni positive, la stiffness matrix è la matrice di Gram [rispetto a un prodotto interno di $H_0^1(\Omega)$ che genera la topologia di $H_0^1(\Omega)$] delle funzioni spline e quest'ultime sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, K ha soltanto autovalori positivi e quindi è invertibile.

Più dettagliatamente, poichè Ω è limitata, esistono due costanti positive C_1 e C_2 tali che

$$C_1 \iint_\Omega \big(|u|^2 + \|\nabla u\|^2\big)\,dxdy \\ \leq \iint_\Omega \big([2+\sin(x+y)]\|\nabla u\|^2 + (1+x^2+y^2)|u|^2\big)\,dxdy \\ \leq C_2 \iint_\Omega \big(|u|^2 + \|\nabla u\|^2\big)\,dxdy,$$

qualunque sia $u \in H_0^1(\Omega)$. Quindi abbiamo così trovato due prodotti scalari nello spazio di Hilbert $H_0^1(\Omega)$ che producono lo stesso concetto di convergenza.

4b. La trasformazione lineare che porta i punti $(s,t) \in \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ nei rispettativi punti

$$\left\{(3,4),(3-\tfrac{1}{2}h,4+h),(3+\tfrac{1}{4}h,4-\tfrac{1}{6}h)\right\}$$

ha la forma

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2}hs + \frac{1}{4}ht, \\ y = 4 + hs - \frac{1}{6}ht. \end{cases}$$

Essa ha la matrice Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}h & \frac{1}{4}h \\ h & -\frac{1}{6}h \end{pmatrix},$$

per cui $\det J = -\frac{1}{6}h^2$. Abbiamo ora $\gamma(s,t) = 1 - s - t$ e $\delta(s,t) = s$ per le funzioni lineari in $(s,t) \in T_R$ [il triangolo di riferimento con vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$] che si annullano in due delle tre vertici e prendono il valore 1 nella terza. Si calcoli

$$J^{-T}\nabla\gamma = \frac{-6}{h^2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}h & -h \\ -\frac{1}{4}h & -\frac{1}{2}h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/h \\ -9/2h \end{pmatrix},$$
$$J^{-T}\nabla\delta = \frac{-6}{h^2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}h & -h \\ -\frac{1}{4}h & -\frac{1}{2}h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/h \\ 3/2h \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \iint_T \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dxdy \\ &= \iint_{T_R} (J^{-T}\nabla\gamma) \cdot (J^{-T}\nabla\delta) |\det J| \, dsdt \\ &= -\frac{55}{4h^2}\frac{1}{6}h^2 \iint_{T_R} dsdt = -\frac{55}{48}, \end{aligned}$$

essendo $\frac{1}{2} = \iint_{T_R} dsdt$ l'area del triangolo di riferimento.

Soluzioni per i meccanici:

1. Sostituendo $u(x,t) = f(x-ct)$ for $f \in C^2(\mathbb{R})$ we find $(c+2)(c+12) = c^2 + 14c + 24 = 0$. Quindi

$$u(x,t) = f(x+2t) + g(x+12t),$$

dove

$$f(x) + g(x) = 4x^2 + 3x, \qquad 2f'(x) + 12g'(x) = 4x + 6.$$

Quindi

$$f(x) = \tfrac{23}{5}x^2 + 3x - \tfrac{1}{5}c, \qquad g(x) = -\tfrac{3}{5}x^2 + \tfrac{1}{5}c,$$

dove c è un'opportuna costante. Di conseguenza,

$$u(x,t) = 4x^2 + 4xt - 68t^2 + 3x + 6t.$$

2. **Conversione in un problema omogeneo**. Per arrivare al problema iperbolico omogeneo

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + 25v, & 0 \le x \le 5\pi,\ t \ge 0, \\ v(0,t) = v(5\pi,t) = 0, \\ v(x,0) = g(x) - \psi(x), & v_t(x,0) = 0, \end{cases}$$

sostituiamo $u(x,t) = v(x,t) + \psi(x)$ e risolviamo il problema al contorno

$$\begin{cases} \psi'' + 25\psi = -2x - 3, \\ \psi(0) = \frac{47}{25}, \quad \psi(5\pi) = -\frac{53}{25} - \frac{2}{5}\pi. \end{cases}$$

Ponendo $\psi_p(x) = Ax + B$ si ha: $A = -\frac{2}{25}$ e $B = -\frac{3}{25}$, cioè $\psi_p(x) = -\frac{2}{25}x - \frac{3}{25}$. Dunque

$$\psi(x) = -\tfrac{2}{25}x - \tfrac{3}{25} + C\cos(5x) + D\sin(5x).$$

Quindi $-\frac{3}{25} + C = \frac{47}{25} \Longrightarrow C = 2$ e $-\frac{2}{5}\pi - \frac{3}{25} - C = -\frac{53}{25} - \frac{2}{5}\pi \Longrightarrow C = 2$, dunque $C = 2$ e D arbitraria. **Separazione delle variabili**. Sia $v(x,t) = X(x)T(t)$, dove $X(0) = X(5\pi) = T'(0) = 0$. In tal caso

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + 25 = -\lambda.$$

Partendo dall'ODE

$$X''(x) + (25+\lambda)X(x) = 0$$

con condizioni di Dirichlet $X(0) = X(5\pi) = 0$, ci risultano tre casi. **Nel caso a),** $\lambda > -25$: $\alpha = \pm i\sqrt{25+\lambda}$. In tal caso

$$X(x) = a\cos(x\sqrt{25+\lambda}\,) + b\sin(x\sqrt{25+\lambda}\,).$$

Poichè $X(0) = a$ e $X(5\pi) = a\cos(5\pi\sqrt{25+\lambda}\,) + b\sin(5\pi\sqrt{25+\lambda}\,)$, si ha:

$$a = 0, \quad \sqrt{25+\lambda_n} = \tfrac{n\pi}{5}\ (n = 1, 2, \ldots), \quad X_n(x) \simeq \sin(\tfrac{n\pi x}{5}).$$

Nel caso b), $\lambda = -25$: $\alpha = 0$ (zero doppio). In tal caso

$$X(x) = a + bx,$$

implicando che $X(0) = a = 0$ e $X(5\pi) = a + 5\pi b = 0$, cioè $a = b = 0$ (nessun autovalore). **Nel caso c),** $\lambda < -25$: $\alpha = \pm\sqrt{-25-\lambda} = \pm\beta]$. In tal caso

$$X(x) \simeq a\,e^{\beta x} + b\,e^{-\beta x},$$

implicando che $X(0) = a+b = 0$ e $X(5\pi) = \beta e^{5\pi\beta}a - \beta e^{-5\pi\beta}b = 0$, cioè $a = b = 0$. Quindi nessun autovalore.

Soluzione finale. Dal sistema al contorno

$$T_n''(t) = -\lambda_n T_n(t), \qquad T_n'(0) = 0,$$

segue

$$T_n(t) \simeq \begin{cases} \cos(t\sqrt{\frac{1}{25}n^2\pi^2 - 25}), & n \geq 8, \\ \cosh(t\sqrt{25 - \frac{1}{25}n^2\pi^2}), & n = 1, \ldots, 7, \end{cases}$$

essendo $n > \frac{25}{\pi} \simeq 7.9577$ la condizione per avere il coseno. La soluzione ha la rappresentazione

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n=1}^{7} c_n \sin(\frac{n\pi x}{5})\cosh(t\sqrt{25 - \tfrac{1}{25}n^2\pi^2}) \\ &+ \sum_{n=8}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{5})\cos(t\sqrt{\tfrac{1}{25}n^2\pi^2 - 25}), \end{aligned}$$

dove i coefficienti c_n seguono dalla serie di Fourier seno

$$g(x) - \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{5}).$$

Infatti,

$$c_n = \tfrac{2}{5\pi} \int_0^{5\pi} (g(x) - \psi(x)) \sin(\frac{n\pi x}{5})\, dx,$$

essendo

$$\int_0^{5\pi} \sin(\frac{n\pi x}{5}) \sin(\frac{m\pi x}{5}), dx = \begin{cases} \frac{5}{2}\pi, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

3. Siano $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 5$ i nodi spaziali equidistanti $[h = \frac{5}{n+1},\ x_i = 2 + ih]$ e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 6$ i nodi temporali equidistanti $[k = \frac{6}{m+1},\ t_j = jk]$. Allora

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}\right] \\
&+ \frac{4x_i^2 + 1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h}\right] \\
&- (1 + x_i)^2 u_{ij} + \cos^4(x_i),
\end{aligned}$$

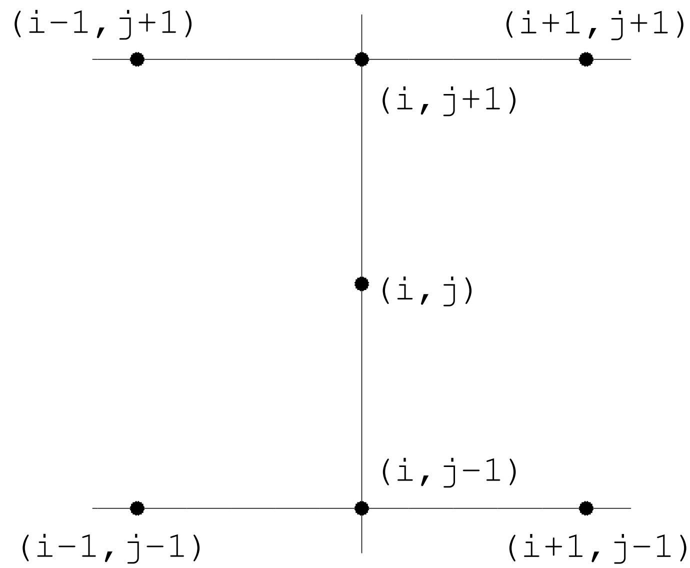
dove $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Si conoscono i dati

$$u_{0,j} = f_1, \quad u_{n+1,j} = f_2, \quad u_{i0} = x_i,$$

dove $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$ e $j = 0, 1, \ldots, m, m+1$. Quindi bisogna risolvere il sistema per $u_{i,j+1}$ $[i = 1, \ldots, n]$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) u_{i,j+1} - \left(\frac{1}{h^2} + \frac{4x_i^2 + 1}{4h}\right) u_{i+1,j+1} - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{4x_i^2 + 1}{4h}\right) u_{i-1,j+1} \\
= \frac{2u_{ij} - u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{2h^2} \\
+ (4x_i^2 + 1)\frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{4h} - (1 + x_i)^2 u_{ij} + \cos^4(x_i),
\end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e i termini con pedici $i - 1$ per $i = 1$ e $i + 1$ per $i = n$ sono da spostare alla parte a destra.



La matrice del sistema è tridiagonale. Essa è strettamente diagonalmente dominante e quindi invertibile se

$$\left|\frac{1}{h^2}+\frac{4x_i^2+1}{4h}\right|+\left|\frac{1}{h^2}-\frac{4x_i^2+1}{4h}\right|<\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}.$$

Ciò è vero se $\frac{4x_i^2+1}{4h}\leq\frac{1}{h^2}$ per $i=1,\ldots,n$, cioè se $0<h\leq[4/(1+4\max x_i^2)]=\frac{4}{101}$, cioè se $n\geq 123$.

Ci rimane il calcolo di u_{i1}. Si ha:

$$\begin{aligned}u_{i1}=u(x_i,k)&\simeq u(x_i,0)+ku_t(x_i,0)+\tfrac{1}{2}k^2u_{tt}(x_i,0)\\&\simeq u_{i0}+ku_t(x_i,0)+\tfrac{1}{2}k^2\left[\frac{u_{i+1,0}-2u_{i0}+u_{i-1,0}}{h^2}\right.\\&\left.+(4x_i^2+1)\frac{u_{i+1,0}-u_{i-1,0}}{2h}-(1+x_i)^2u_{i0}+\cos^4(x_i)\right],\end{aligned}$$

dove $u_{i0}=x_i$, $u_t(x_i,0)=1+x_i^2$ e $i=1,\ldots,n$.

5. Siano $2=x_0<x_1<\ldots<x_n<x_{n+1}=5$ i nodi spaziali equidistanti $[h=\frac{3}{n+1},\ x_i=2+ih]$ e $0=t_0<t_1<\ldots<t_m<t_{m+1}=10$ i nodi

temporali equidistanti [$k = \frac{10}{m+1}$, $t_j = jk$]. Allora

$$\begin{aligned}\frac{t_{ij} - t_{i,j-1}}{k} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + (1 + x_i^2)\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}\\ &\quad - (1 + 2x_i \cos^2(2 + t_j))u_{ij} + 3\sin^2(x_i),\\ u_{0j} = f_1, \quad u_{n+1,j} &= f_2, \quad u_{i0} = x_i^4 + 1,\end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m + 1$. Quindi

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{h^2} + 1 + 2x_i \cos^2(2 + t_j) + \frac{1}{k}\right) u_{ij}\\ &- \left(\frac{1}{2h^2} + \frac{1 + x_i^2}{2h}\right) u_{i+1,j} - \left(\frac{1}{2h^2} - \frac{1 + x_i^2}{2h}\right) u_{i-1,j}\\ &= \frac{t_{i,j-1}}{k} + 3\sin^2(x_i),\end{aligned}$$

dove $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m + 1$ e i termini con primo pedice $i - 1$ per $i = 1$ e $i + 1$ per $i = n$ sono da spostare nella parte a destra. Per ogni pedice $j = 1, \ldots, m+1$ la matrice del sistema è tridiagonale. Essa è strettamente diagonalmente dominante e quindi invertibile se

$$\left|\frac{1}{h^2} + \frac{1 + x_i^2}{2h}\right| + \left|\frac{1}{h^2} - \frac{1 + x_i^2}{2h}\right| < \frac{2}{h^2} + 1 + 2x_i \cos^2(2t_j) + \frac{1}{k}.$$

Ciò è vero se $\frac{1+x_i^2}{2h} \leq \frac{1}{h^2}$ per $i = 1, \ldots, n$, cioè se $0 < h \leq [2/(1 + \max x_i^2)] = \frac{1}{13}$, cioè se $n \geq 12$.