Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 1

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1a. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^\infty \left(4\, e^{-(t+s)} + 3\, e^{-5(t+s)}\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

4a. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 3\, e^{-2x}, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(2\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5a. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 8\, u' + (\lambda + 25)u = 0, \\ u(0) = 0,\ u'(\pi) + 3u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6a. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + u, \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

9a. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $1 \leq r \leq R$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = 1$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = R$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 2

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1b. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^\infty \left(2\,e^{-3(t+s)} + 5\,e^{-2(t+s)}\right) \phi(s)\,ds = \omega(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

4b. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 2\,e^{-4x}, \\ u_x(0,t) = 0, \;\; u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5b. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 4\,u' + (\lambda + 29)u = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u'(2\pi) + 3u(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6b. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_x + 13u, \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x), \;\; u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

9b. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < R \leq r \leq 1$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = 1$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = R$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 3

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1c. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^\infty \left(6\, e^{-2(t+s)} + 3\, e^{-4(t+s)}\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

4c. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 5\, e^{-2x}, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5c. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 10\, u' + (\lambda + 41)u = 0, \\ u(0) = 0,\ u'(\pi) + 2u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6c. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_x + 29u, \\ u_x(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

9c. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $1 \leq r \leq R$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = R$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = 0$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 4

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1d. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^\infty \left(4\, e^{-2(t+s)} + 5\, e^{-6(t+s)}\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

4d. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 3\, e^{-x}, \\ u(0,t) = 0,\ \ u_x(2\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5d. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - 10\, u' + (\lambda + 41)u = 0, \\ u(0) = 0,\ \ u'(2\pi) + 2u(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6d. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + 5u, \\ u_x(0,t) = u(2\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = g(x),\ \ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

9d. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < R \leq r \leq 1$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = R$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = 1$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 5

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1e. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^\infty \left(4\, e^{-3(t+s)} + 7\, e^{-2(t+s)}\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

4e. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3\, e^{-x}, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(2\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5e. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - 12\, u' + (\lambda + 61)u = 0, \\ u(0) = 0,\ u'(2\pi) + 4u(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6e. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6u_x + 10u, \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

9e. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $1 \leq r \leq R$ sotto le condizioni che $\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = 1$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = R$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 6

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1f. Risolvere l'equazione integrale di Volterra

$$\phi(t) - 2\lambda \int_0^t s\phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0,4].$$

Convertire l'equazione integrale in un'equazione differenziale.

3f. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -u'' + 8u' = \lambda u, \\ u(0) = 0, \ u_x(\pi) = 0. \end{cases}$$

4f. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 2\, e^{-4x}, \\ u_x(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5f. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 8\, u' + (\lambda + 41)u = 0, \\ u(0) = 0, \ u'(2\pi) + 6u(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6f. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 8u_x + 20u, \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x), \ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

9f. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $1 \leq r \leq R$ sotto le condizioni che $\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = R$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = 1$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 7

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1g. Risolvere l'equazione integrale di Volterra

$$\phi(t) - 4\lambda \int_0^t s\phi(s)\,ds = \omega(t), \qquad t \in [0,2].$$

Convertire l'equazione integrale in un'equazione differenziale.

4g. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 3\,e^{-2x}, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(2\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5g. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 6\,u' + (\lambda + 58)u = 0, \\ u(0) = 0,\ u'(\pi) + 2u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6g. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_x + 40u, \\ u_x(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

9g. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < R \leq r \leq 1$ sotto le condizioni che $\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = 1$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = R$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 8

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1h. Risolvere l'equazione integrale di Volterra

$$\phi(t) - \lambda \int_0^t \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0, 5].$$

Convertire l'equazione integrale in un'equazione differenziale.

4h. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 5u_{xx} + 4\, e^{-x}, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(2\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5h. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 6\, u' + (\lambda + 34)u = 0, \\ u(0) = 0,\ u'(2\pi) + 4u(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6h. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6u_x + 37u, \\ u_x(0,t) = u(2\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

9h. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < R \leq r \leq 1$ sotto le condizioni che $\frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) = g(\theta)$ per $r = R$ e $u(r, \theta) = 0$ per $r = 1$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 9

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1i. Risolvere l'equazione integrale di Volterra

$$\phi(t) - 3\lambda \int_0^t s^2 \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0, 3].$$

Convertire l'equazione integrale in un'equazione differenziale.

4i. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 2\, e^{-4x}, \\ u(0,t) = 0, \;\; u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5i. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 10\, u' + (\lambda + 34)u = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u'(2\pi) + 2u(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6i. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + u, \\ u_x(0,t) = u(\pi, t) = 0, \\ u_t(x,0) = g(x), \;\; u(x,0) = 0. \end{cases}$$

9i. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $1 \le r \le R$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = 1$ e $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = 0$ per $r = R$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 10

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1j. Risolvere l'equazione integrale di Volterra

$$\phi(t) - 6\lambda \int_0^t s^2 \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0,1].$$

Convertire l'equazione integrale in un'equazione differenziale.

4j. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + e^{-2x}, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5j. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 10\, u' + (\lambda + 41)u = 0, \\ u(0) = 0,\ u'(\pi) + 4u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6j. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 8u_x + 17u, \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

9j. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < R \le r \le 1$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = 1$ e $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = 0$ per $r = R$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 11

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1k. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^\infty \left(5\, e^{-3(t+s)} + 4\, e^{-2(t+s)}\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in \mathbb{R}^+.$$

4k. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + \, e^{-x}, \\ u(0,t) = 0, \;\; u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5k. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - 12\, u' + (\lambda + 85)u = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u'(\pi) + 2u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6k. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6u_x + 13u, \\ u_x(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \\ u_t(x,0) = g(x), \;\; u(x,0) = 0. \end{cases}$$

9k. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $1 \leq r \leq R$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = R$ e $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = 0$ per $r = 1$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 12

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1l. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^2 \left(2\,e^{-3(t+s)} + 7\,e^{-4(t+s)}\right) \phi(s)\,ds = \omega(t), \qquad t \in [0,2].$$

4l. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + \, e^{-2x}, \\ u(0,t) = 0, \;\; u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5l. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - 10\,u' + (\lambda + 25)u = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u'(\pi) + 3u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6l. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_x + 5u, \\ u_x(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \\ u_t(x,0) = g(x), \;\; u(x,0) = 0. \end{cases}$$

9l. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < R \leq r \leq 1$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = R$ e $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = 0$ per $r = 1$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 13

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1m. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^1 \left(4\,e^{-(t+s)} + 3\,e^{-5(t+s)}\right) \phi(s)\,ds = \omega(t), \qquad t \in [0,1].$$

4m. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 7\,e^{-3x}, \\ u_x(0,t) = 0,\;\; u(\frac{\pi}{2},t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5m. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 6\,u' + (\lambda + 73)u = 0, \\ u(0) = 0,\;\; u'(\pi) + 5u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6m. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + u, \\ u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\;\; u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

9m. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < R \leq r \leq 1$ sotto le condizioni che $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = 1$ e $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = 0$ per $r = R$. Descrivere la non unicità delle soluzioni e la condizione necessaria e sufficiente sulla g affinchè esista almeno una soluzione. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 14

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1n. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^1 \left(4\, e^{-(t+s)} + 3\, e^{-5(t+s)}\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0,1].$$

4n. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 5\, e^{-4x}, \\ u_x(0,t) = 0, \;\; u(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5n. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - 6\, u' + (\lambda + 61)u = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u'(\pi) + 2u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6n. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + u, \\ u(0,t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

9n. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $1 \leq r \leq R$ sotto le condizioni che $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = 1$ e $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = 0$ per $r = R$. Descrivere la non unicità delle soluzioni e la condizione necessaria e sufficiente sulla g affinchè esista almeno una soluzione. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 15

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1o. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^1 \left(2ts + t^2 s^2\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0,1].$$

4o. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 5\, e^{-4x}, \\ u_x(\pi,t) = 0,\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5o. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - 6\, u' + (\lambda + 72)u = 0, \\ u(0) = 0,\ u'(\pi) + 2u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6o. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_x + 4u, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

9o. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < R \le r \le 1 < S$ sotto le condizioni che $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = R$ e $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = 0$ per $r = S$. Descrivere la non unicità delle soluzioni e la condizione necessaria e sufficiente sulla g affinchè esista almeno una soluzione. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 16

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1p. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^1 \left(-2ts + t^2 s^2\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0,1].$$

4p. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 5\, e^{-4x}, \\ u_x(\frac{\pi}{2}0, t) = 0, \;\; u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5p. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - 4\, u' + (\lambda + 68) u = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u'(\pi) + 2u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6p. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + u, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

9p. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < S \le r \le 1 < R$ sotto le condizioni che $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = R$ e $\frac{\partial u}{\partial n}(r,\theta) = 0$ per $r = S$. Descrivere la non unicità delle soluzioni e la condizione necessaria e sufficiente sulla g affinchè esista almeno una soluzione. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 17

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1q. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^1 \left(4ts + 4t^2 s^2\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0,1].$$

4q. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 5\, e^{-4x}, \\ u_x(\pi, t) = 0,\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5q. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 8\, u' + (\lambda + 57)u = 0, \\ u(0) = 0,\ u'(\pi) + 2u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6q. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_x + 4u, \\ u(0,t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

9q. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < S < 1 \le r \le R$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = S$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = R$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 18

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1r. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^1 \left(-4ts + 4t^2 s^2\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0,1].$$

4r. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 5\, e^{-4x}, \\ u_x(0,t) = 0, \;\; u(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5r. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - 10\, u' + (\lambda + 61)u = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u'(\pi) + 2u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6r. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4u_x + 4u, \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

9r. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < S < 1 \le r \le R$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = R$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = S$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 19

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1s. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^1 \left(ts + 2t^2 s^2\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0,1].$$

4s. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 5\, e^{-4x}, \\ u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \;\; u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5s. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - 10\, u' + (\lambda + 106) u = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u'(\pi) + 2u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6s. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6u_x + 9u, \\ u(0,t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

9s. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < R < 1 \leq r \leq S$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = R$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = S$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 20

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1t. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^1 \left(-ts + 2t^2 s^2\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0,1].$$

4t. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 5\, e^{-4x}, \\ u(0,t) = 0, \;\; u(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

5t. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - 4\, u' + (\lambda + 85)u = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u'(\pi) + 2u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6t. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6u_x + 9u, \\ u(0,t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

9t. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sull'anello $0 < R < 1 \leq r \leq S$ sotto le condizioni che $u(r,\theta) = g(\theta)$ per $r = S$ e $u(r,\theta) = 0$ per $r = R$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?

Esercizi per l'esame di Fisica Matematica: Versione 21

L'ultima domanda, sull'equazione di Helmholtz, può essere tralasciata.

1u. Risolvere l'equazione integrale

$$\phi(t) - \lambda \int_0^2 \left(ts + 4t^2 s^2\right) \phi(s)\, ds = \omega(t), \qquad t \in [0, 2].$$

4u. Risolvere l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 2\, e^{-3x}, \\ u(0,t) = 0, \;\; u_x(2\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

5u. Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' + 8\, u' + (\lambda + 41)u = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u'(\pi) + 5u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Spiegare la relazione di ortogonalità tra le autofunzioni.

6u. Risolvere l'equazione iperbolica

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 2u_x + 5u, \\ u_x(0, t) = u(2\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = g(x), \;\; u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

9u. Risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 u = 0$ sul semidisco $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ sotto le condizioni che $u(1, \theta) = g(\theta)$ per $0 \leq \theta \leq \pi$ e $u(r, 0) = u(r, \pi) = 0$ per $0 \leq r \leq 1$. Si utilizzino le coordinate polari definite dalle relazioni $x = r \cos\theta$ e $y = r \sin\theta$. Cosa cambia se prendiamo l'equazione di Helmholtz $-\nabla^2 u + k^2 u = 0$ al posto di quella di Laplace?