



FISICA MATEMATICA

Ancora in preparazione

Corso di Laurea Magistrale
in Matematica, A.A. 2018-2019
9 Crediti

Cornelis VAN DER MEE

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Cagliari
Viale Merello 92, 09123 Cagliari
070-6755605 (studio), 328-0089799 (cell.)

cornelis110553@gmail.com

krein.unica.it/~cornelis/DIDATTICA/FISMAT1/avanzati18.pdf

LaTeX compilation date: 13 novembre 2018

Indice

I	EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA	1
1	Coordinate ortogonali	1
2	Separazione delle variabili	4
3	Equazione di Helmholtz	9
3.1	Equazione di Helmholtz nell'Intervallo	9
3.2	Equazione di Helmholtz nel Rettangolo	13
4	Equazioni delle onde e del calore	15
4.1	Equazioni delle onde e del calore nell'intervallo	15
4.2	Equazioni delle onde e del calore nel rettangolo	17
II	EQUAZIONI DIFFERENZIALI E FUNZIONI SPECIALI	21
1	Equazioni Differenziali di Secondo Ordine	21
2	Metodo di Frobenius	23
3	Funzioni Ipergeometriche	29
4	Funzioni di Bessel	32
4.1	Definizione e proprietà semplici	32
4.2	Funzioni di Bessel di seconda specie	34
4.3	Ortogonalità e zeri	36
4.4	Altre funzioni cilindriche	40
4.5	Funzioni sferiche di Bessel	42
5	Funzioni sferiche	43
5.1	Funzioni sferiche	44
5.2	Polinomi di Legendre	45
5.3	Funzioni di Legendre associate	52
5.4	Le funzioni sferiche per $n = 3$: Completezza	53
6	Polinomi di Hermite	54
7	Polinomi di Laguerre	58
8	Polinomi di Chebyshev	63
9	Polinomi Ortogonali Generali	65

III	EQUAZIONI INTEGRALI	71
1	Proprietà Elementari e Iterazione	71
2	Equazioni integrali di Volterra	78
3	Equazioni Integrali con Nucleo Hermitiano	80
4	Teorema di Hilbert-Schmidt	87
IV	PROBLEMI DI STURM-LIOUVILLE	91
1	Problema di Sturm-Liouville	91
1.1	Funzione di Green	92
1.2	Riduzione ad un'equazione integrale	96
1.3	Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni	98
1.4	Alcuni esempi delle funzioni di Green	102
2	Problemi di Sturm-Liouville singolari	103
V	FUNZIONI DI GREEN	109
1	Classificazione delle equazioni alle derivate parziali	109
2	Problemi agli autovalori multidimensionali	111
2.1	Impostazione del problema agli autovalori	111
2.2	Formule di Green	112
2.3	Proprietà dell'operatore L	113
3	Equazioni ellittiche	115
3.1	Equazioni di Laplace e di Poisson	116
3.1.a	Equazione di Laplace nel disco	117
3.1.b	Equazione di Laplace e funzioni analitiche	120
3.1.c	Equazione di Laplace nel semipiano	122
3.1.d	Equazione di Laplace nella sfera n -dimensionale	123
3.1.e	Funzione di Green in \mathbb{R}^n	124
3.2	Equazione di Helmholtz	126
4	Equazioni paraboliche	128
4.1	Esempi su intervalli limitati	130
4.2	Esempi su domini illimitati	133
5	Equazioni iperboliche	137
A	LA FUNZIONE GAMMA	143
B	ANALISI FUNZIONALE	149
1	Spazi di Banach	149
2	Spazi di Hilbert	151
3	Basi ortonormali in spazi di Hilbert	153
4	Applicazioni all'Analisi di Fourier	155
5	Operatori lineari	157
5.1	Proprietà generali	157

5.2	Proprietà spettrali	159
5.3	Operatori autoaggiunti e unitari	161
5.4	Operatori autoaggiunti non limitati	164
C	INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE	167
1	Insiemi di Borel	167
2	Integrale di Lebesgue	169
3	Alcuni Teoremi Importanti	172
D	DISTRIBUZIONI E SPAZI DI SOBOLEV	175
1	Funzionali lineari	177
2	Funzioni Test	177
3	Distribuzioni	178
4	Trasformata di Fourier	182
4.1	Trasformata di Fourier negli spazi L^1 e L^2	182
4.2	Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	184
4.2.a	Trasformazione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	185
4.2.b	Trasformazione di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	186
4.2.c	Proprietà della trasformazione di Fourier	188
5	Distribuzione in un Dominio	190
6	Spazi di Sobolev	190
E	PROPRIETÀ ASINTOTICHE	193
1	Rappresentazioni integrali delle funzioni di MacDonalld	193
2	Sviluppo asintotico delle funzioni di Bessel	195
F	APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE E TRIGONOMETRI- CA	197
1	Teorema di approssimazione di Weierstrass	197
2	Teorema di Stone-Weierstrass	200
	Bibliografia	203

Capitolo I

EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA

1 Coordinate ortogonali

Sia Ω un insieme aperto in \mathbb{R}^3 . Sia $u = (u_1, u_2, u_3)$ una funzione delle variabili cartesiane $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ in \mathbb{R}^3 di classe C^2 tale che la matrice Jacobiana è invertibile. Allora esiste, *localmente*, una corrispondenza biunivoca tra le coordinate cartesiane $x = (x_1, x_2, x_3)$ e quelle curvilinee $u = (u_1, u_2, u_3)$. Derivando le variabili x_1, x_2, x_3 rispetto alle variabili u_1, u_2, u_3 otteniamo

$$dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j.$$

Quindi la distanza al quadrato tra due punti vicini tra loro è

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} du_i du_j,$$

dove

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l}$$

è la cosiddetta *metrica*. La trasformazione si dice *ortogonale* se la metrica $\{g_{kl}\}_{k,l=1}^3$ è una matrice diagonale, cioè se le righe (ma non necessariamente le

colonne) della matrice Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{bmatrix}$$

sono ortogonali. In altre parole, la trasformazione si dice ortogonale se

$$g_{kl} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l} = 0, \quad k \neq l.$$

In tal caso

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 (h_i du_i)^2,$$

dove

$$h_k = \left[\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Si vede facilmente che la matrice $\text{diag}(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3) J$ è ortogonale (cioè, $U^{-1} = U^T$ e quindi $\det U \in \{-1, +1\}$). Dunque

$$|\det J| = h_1 h_2 h_3.$$

Per ogni punto (u_1, u_2, u_3) per cui $(\pm \det J) > 0$, ci passano tre superfici $u_i = \text{costante}$ ($i = 1, 2, 3$). Nel tale punto definiamo il vettore \mathbf{e}_i di lunghezza 1 normale alla superficie $u_i = \text{costante}$ e nella direzione di crescita di u_i . In tal caso i tre vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ formano un sistema di coordinate cartesiane tale che $\pm(\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)) > 0$.

Il gradiente di ψ ha la forma

$$\nabla \psi = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \mathbf{e}_j,$$

la divergenza della funzione $\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3$ a valori vettoriali ha la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (V_3 h_1 h_2) \right],$$

e il rotore di \mathbf{V} ha la forma

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\left(\frac{\partial(h_3 V_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 V_2)}{\partial u_3} \right) h_1 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial(h_1 V_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(h_3 V_3)}{\partial u_1} \right) h_2 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial(h_2 V_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 V_1)}{\partial u_2} \right) h_3 \mathbf{e}_3 \right].$$

Quindi l'operatore di Laplace, oppure il Laplaciano,

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

ha la seguente rappresentazione:

$$\Delta \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right].$$

Esempio I.1 Introduciamo ora alcuni sistemi di coordinate ortogonali.

- a. **Coordinate Cilindriche:** $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$. dove $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. Allora $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_z = 1$. In tal caso

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{I.1})$$

Sostituendo per ψ una funzione $\psi = \psi(r, \theta)$ che non dipende da z si trova l'operatore di Laplace in **coordinate polari**:

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (\text{I.2})$$

- b. **Coordinate Sferiche:** $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \varphi$, dove $\rho \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Allora $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$, $h_\theta = \rho \sin \varphi$. In tal caso

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right). \quad (\text{I.3})$$

Introducendo la nuova variabile $\xi = \cos \varphi \in [-1, 1]$ (tale che $d\xi = -\sin \varphi d\varphi$, $1 - \xi^2 = \sin^2 \varphi$) otteniamo¹

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 (1 - \xi^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 - \xi^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right). \quad (\text{I.4})$$

¹Usando le coordinate ortogonali (ρ, θ, ξ) direttamente si trovano le espressioni $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho \sqrt{1 - \xi^2}$ e $h_\xi = (\rho / \sqrt{1 - \xi^2})$.

- c. **Coordinate Parabolico-cilindriche** (vedi [18]): $x = \frac{c}{2}(u^2 - v^2)$, $y = cuv$, $z = z$, dove $u \in \mathbb{R}$, $v \geq 0$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$h_u = h_v = c\sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_z = 1.$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \quad (\text{I.5})$$

- d. **Coordinate Ellittico-cilindriche** (vedi [18]): $x = c \cosh u \cos v$, $y = c \sinh u \sin v$, $z = z$, dove $u > 0$, $v \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$, e c è una costante positiva. Allora

$$\begin{cases} h_u = h_v = c\sqrt{\cosh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v} = c\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}, \\ h_z = 1. \end{cases}$$

In tal caso

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2[\sinh^2 u + \sin^2 v]} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \quad (\text{I.6})$$

2 Separazione delle variabili

1. Separazione in Coordinate Cartesiane. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in tre variabili (x, y, z) per $k \geq 0$ nel dominio $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$. Ponendo

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

dove $X(x)$, $Y(y)$ e $Z(z)$ sono di classe C^2 , si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2.$$

In tal caso esistono tre costanti k_x^2 , k_y^2 e k_z^2 tali che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + k_x^2 = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k_y^2 = \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k_z^2 = 0,$$

dove

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2.$$

2. Separazione in Coordinate Polari. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0$$

in due variabili (x, y) per $k \geq 0$ nel dominio

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq L \right\},$$

dove $L \in (0, +\infty)$. Ponendo

$$\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

dove $R(r)$ e $\Theta(\theta)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, L)$ e $\theta \in \mathbb{R}$ con

$$\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta) \quad [\text{periodicit\`a}],$$

si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{r^2\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2,$$

oppure

$$\frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + k^2r^2 + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0.$$

L'espressione precedente \u00e8 la somma costante di una funzione di r (che non dipende da θ) e una funzione di θ (che non dipende da r). Dunque i due termini devono essere costanti.

Proposizione I.2 *Sia $\Theta(\theta)$ una funzione di classe C^2 , non banale, tale che*

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -C, \quad \Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta).$$

Allora $C = m^2$ per qualche $m = 0, 1, 2, \dots$ e

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ \text{cost}_1 \cos m\theta + \text{cost}_2 \sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Dimostrazione. Prima dimostriamo che $C \geq 0$. Infatti,

$$\begin{aligned} C \int_0^{2\pi} |\Theta(\theta)|^2 d\theta &= - \int_0^{2\pi} \Theta''(\theta) \overline{\Theta(\theta)} d\theta \\ &= - \left[\Theta'(\theta) \overline{\Theta(\theta)} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} |\Theta'(\theta)|^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |\Theta'(\theta)|^2 d\theta \geq 0, \end{aligned}$$

poichè il primo termine della seconda parte si annulla per motivi di periodicità e $\Theta'(\theta) \not\equiv 0$. Quindi $C \geq 0$.

Per $C > 0$ troviamo la soluzione generale

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(\theta\sqrt{C}) + c_2 \sin(\theta\sqrt{C})$$

dell'equazione $\Theta'' = -C\Theta$. Risulta il sistema di equazioni lineari

$$\begin{bmatrix} 1 - \cos(2\pi\sqrt{C}) & -\sin(2\pi\sqrt{C}) \\ \sin(2\pi\sqrt{C}) & 1 - \cos(2\pi\sqrt{C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con determinante $2(1 - \cos(2\pi\sqrt{C}))$. Il determinante si annulla se e solo se $C = m^2$ per $m \in \mathbf{N}$. In tal caso tutti gli elementi della matrice si annullano e quindi le costanti c_1 e c_2 sono arbitrarie.

Infine, per $C = 0$ troviamo la soluzione generale $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$. In tal caso $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$ implica $c_2 = 0$. \square

Sostituendo $\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2$ per $m = 0, 1, 2, \dots$, otteniamo

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R(r) = 0$$

con le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R(L) = 0$. Se invece della condizione di Dirichlet $\psi|_{\partial D} \equiv 0$ si considera la condizione di Neumann $\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial D} \equiv 0$, risultano le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R'(L) = 0$.

Per $k = 0$ si trova l'equazione di Eulero $r^2R''(r) + rR'(r) - m^2R(r) = 0$ con soluzione generale²

$$R(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \log r, & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m}, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

La condizione che $R(0^+)$ sia finito, implica $c_2 = 0$. In tal caso $R(L) \neq 0$ per ogni $L > 0$, eccetto nel caso banale $c_1 = c_2 = 0$. Quindi per $k = 0$ non ci sono soluzioni non banali. Purtroppo, se studiamo l'equazione di Helmholtz con la condizione di Neumann, risulta la soluzione non banale costante se $m = 0$; per $m = 1, 2, 3, \dots$ non ci sono soluzioni non banali.

Per $k > 0$ si ponga $\rho = kr$. In tal caso risulta l'equazione differenziale di Bessel

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0.$$

²La sostituzione $r = e^t$ (se $r > 0$) converte l'equazione di Eulero nell'equazione differenziale a coefficienti costanti $\frac{d^2\tilde{R}}{dt^2} - m^2\tilde{R}(t) = 0$, dove $\tilde{R}(t) = R(e^t)$. Quindi $\tilde{R}(t) = c_1 + c_2 t$ per $m = 0$ e $\tilde{R}(t) = c_1 t^m + c_2 t^{-m}$ per $m = 1, 2, 3, \dots$

Quest'equazione ha una singola soluzione linearmente indipendente limitata se $\rho \rightarrow 0^+$. Con un'opportuna normalizzazione questa soluzione si chiama $J_m(\rho)$, la cosiddetta funzione di Bessel di ordine m .

3. Separazione in Coordinate Sferiche. Consideriamo l'equazione di Schrödinger

$$\Delta\psi + k^2\psi = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\psi$$

nelle variabili (x, y, z) per $k > 0$, dove il potenziale V dipende soltanto dalla variabile $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. È compreso il caso dell'equazione di Helmholtz ($V \equiv 0$). Ponendo

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)S(\theta, \varphi),$$

dove $R(r)$ e $S(\theta, \varphi)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, +\infty)$ e $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times (0, \pi)$, si trova facilmente

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 - V = \frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{r^2 S(\theta, \varphi)} \left[\frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) \right] + k^2 - V(r).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right) &= -CS(\theta, \varphi), \\ \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{C}{r^2} \right) R(r) &= V(r)R(r), \end{aligned}$$

dove C è una costante.

L'equazione differenziale per $S(\theta, \varphi)$ ha soltanto una soluzione non banale per opportuni valori della costante C . Per tali valori di C le funzioni $S(\theta, \varphi)$ sono multipli delle cosiddette funzioni sferiche.

Consideriamo ora l'equazione per $S(\theta, \varphi)$. Ponendo

$$S(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

si trova la cosiddetta *equazione di Beltrami*

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) + C = 0.$$

Come al solito,

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2,$$

dove $m = 0, 1, 2, \dots$. Utilizzando la trasformazione $X(\xi) = \Phi(\arccos \xi)$, $\xi = \cos \varphi$, arriviamo all'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right) + \left(C - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) X(\xi) = 0.$$

Quest'equazione è l'equazione differenziale per le funzioni associate di Legendre. Le sue soluzioni non banali limitate se $\xi \rightarrow \pm 1$ esistono soltanto per $C = l(l + 1)$, dove $l = m, m + 1, m + 2, \dots$. Nel caso particolare $m = 0$ si ottiene l'equazione differenziale di Legendre

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right) + l(l + 1)X(\xi) = 0,$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$.

Enunciamo infine l'equazione per $R(r)$ con $C = l(l + 1)$:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R(r) = \left(V(r) + \frac{l(l + 1)}{r^2} \right) R(r),$$

dove $m = -l, -l + 1, \dots, l - 2, l - 1, l$.

4. Separazione in Coordinate Parabolico-Cilindriche. L'equazione di Laplace in coordinate parabolico-cilindriche (u, v, z) (anche dette coordinate paraboliche) ha la forma (I.5). Sostituendo

$$\psi(u, v, z) = U(u)V(v)Z(z)$$

otteniamo

$$\frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} \right) + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Se richiediamo che $Z(z)$ sia limitata, risulta

$$\frac{1}{c^2(u^2 + v^2)} \left(\frac{U''(u)}{U(u)} + \frac{V''(v)}{V(v)} \right) = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda^2,$$

dove $\lambda \geq 0$ è una costante. Dunque

$$\begin{aligned} U''(u) + (\mu - \lambda^2 c^2 u^2)U(u) &= 0, \\ V''(v) - (\mu + \lambda^2 c^2 v^2)V(v) &= 0, \end{aligned}$$

dove μ è un'altra costante. Introducendo le variabili $\xi = u\sqrt{c\lambda}$ e $\eta = v\sqrt{c\lambda}$, dove $\xi \in \mathbb{R}$ e $\eta \geq 0$, e ponendo $\mu = (2\nu + 1)c\lambda$ otteniamo

$$\begin{aligned} U''(\xi) + (2\nu + 1 - \xi^2)U(\xi) &= 0, \\ V''(\eta) - (2\nu + 1 + \eta^2)V(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Studiamo ora l'equazione

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2)u = 0, \quad (\text{I.7})$$

dove u , z e ν non hanno più lo stesso significato come prima. Sostituendo

$$u = e^{-z^2/2} v, \quad (\text{I.8})$$

risulta l'equazione

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0. \quad (\text{I.9})$$

Per $\nu = 0, 1, 2, \dots$ la (I.9) si dice *equazione differenziale di Hermite*. Le soluzioni della (I.7) si dicono funzioni parabolico-cilindriche.

3 Equazione di Helmholtz

In questa parte vengono calcolati gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni normalizzate dell'equazione di Helmholtz in dominio abbastanza semplici.

3.1 Equazione di Helmholtz nell'Intervallo

Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$u'' + k^2 u = 0, \quad 0 < x < L, \quad (\text{I.10})$$

con una delle seguenti condizioni al contorno:

$$u(0) = u(L) = 0, \quad \text{Dirichlet} \quad (\text{I.11})$$

$$u'(0) = u'(L) = 0, \quad \text{Neumann} \quad (\text{I.12})$$

$$u(0) = u'(L) = 0, \quad \text{Dirichlet a sinistra, Neumann a destra} \quad (\text{I.13})$$

$$u'(0) = u(L) = 0, \quad \text{Neumann a sinistra, Dirichlet a destra} \quad (\text{I.14})$$

$$u(0) = u(L), \quad u'(0) = u'(L), \quad \text{condizioni periodiche} \quad (\text{I.15})$$

$$u(0) = 0, \quad (\cos \alpha)u(L) + (\sin \alpha)u'(L) = 0, \quad (\text{I.16})$$

$$(\cos \beta)u(0) - (\sin \beta)u'(0) = 0, \quad (\cos \alpha)u(L) + (\sin \alpha)u'(L) = 0, \quad (\text{I.17})$$

dove $0 \leq \alpha \leq (\pi/2)$ e $0 \leq \beta \leq (\pi/2)$. Le condizioni (I.16) e (I.17) si chiamano *miste* oppure *di Robin*. In tutti i casi determineremo gli autovalori e le autofunzioni del problema al contorno. In tutti i casi gli autovalori k^2 sono positivi, tranne nel caso delle condizioni di Neumann (I.12), dove si annulla uno degli autovalori.

a. Condizioni di Dirichlet. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\sin(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \sin(n\pi x/L)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.18})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

b. Condizioni di Neumann. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k \geq 0$. Utilizzando la condizione $u'(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \cos(kx).$$

L'altra condizione $u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = (n\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos(n\pi x/L)$ per $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \\ \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, & \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

dove $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

c. Condizione di Dirichlet in $x = 0$ e di Neumann in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = ((n - \frac{1}{2})\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \sin((n - \frac{1}{2})\pi x/L)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{L} \right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L} \right), \quad (\text{I.20})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

d. Condizione di Neumann in $x = 0$ e di Dirichlet in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k > 0$. Utilizzando la condizione $u'(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \cos(kx).$$

L'altra condizione $u(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori $\lambda_n = k_n^2 = ((n - \frac{1}{2})\pi/L)^2$ e le autofunzioni $\varphi_n(x) \sim \cos((n - \frac{1}{2})\pi x/L)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Ortonormalizzando le autofunzioni in $L^2(0, L)$ otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{L} \right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L} \right), \quad (\text{I.21})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

e. Condizioni periodiche. Le soluzioni non banali sono quelle periodiche. Dunque abbiamo la base ortonormale di autofunzioni (con corrispondenti autovalori)

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, & \lambda_0 = 0, \\ \varphi_n^c(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \left(\frac{2n\pi x}{L} \right), & \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2, \\ \varphi_n^s(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{2n\pi x}{L} \right), & \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2, \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Quindi l'autovalore zero è semplice mentre gli altri autovalori hanno molteplicità 2.

f. Condizione di Dirichlet in $x = 0$ e mista in $x = L$. Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che $k \geq 0$. Utilizzando la condizione $u(0) = 0$ si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione $(\cos \alpha)u(L) + (\sin \alpha)u'(L) = 0$ conduce alla condizione

$$\cos \alpha \sin(kL) + k \sin \alpha \cos(kL) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Escludendo i casi già trattati, cioè $\alpha = 0$ [Dirichlet] e $\alpha = (\pi/2)$ [Dirichlet in $x = 0$ e Neumann in $x = L$], risultano $k > 0$, $\sin(kL) = 0$ e $\cos(kL) \neq 0$. Arriviamo all'equazione trascendentale

$$\tan(kL) = -k \tan \alpha, \quad (\text{I.23})$$

dove $\tan \alpha > 0$. Cercando i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e la retta $k \mapsto -k \tan \alpha$ con coefficiente angolare negativo, troviamo una successione infinita di autovalori $\lambda_n = k_n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Le corrispondenti autofunzioni si possono normalizzare in $L^2(0, L)$, risultando in una base ortonormale di $L^2(0, L)$.

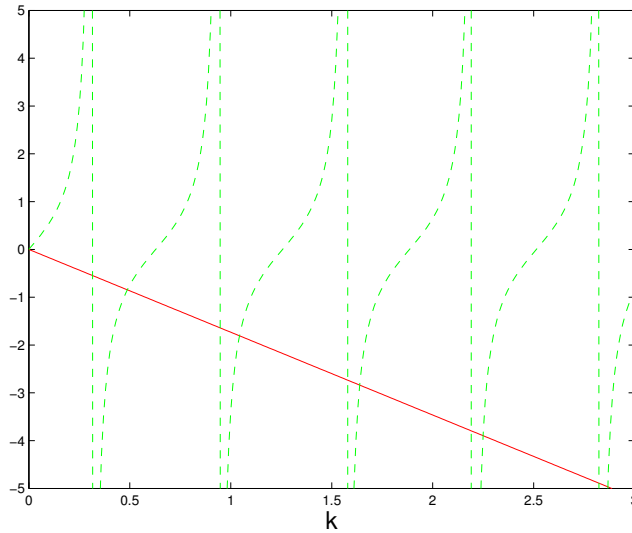


Figura I.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni $y = \tan(xL)$ e $y = -k \tan \alpha$ per $L = 5$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Gli autovalori sono i valori di $k > 0$ corrispondenti ai loro punti di intersezione.

g. Condizioni Miste Diverse. Ci limitiamo al caso in cui $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. In tal caso la soluzione

$$u(x) \sim c_1 \cos(kx) + c_2 \frac{\sin(kx)}{k}$$

per le opportune costanti c_1, c_2 e per $k > 0$ soddisfa alle due condizioni

$$c_1 \cos \beta - c_2 \sin \beta = 0, \quad (\text{I.24})$$

$$c_1 [\cos \alpha \cos(kL) - k \sin \alpha \sin(kL)] + c_2 \left[\cos \alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin \alpha \cos(kL) \right] = 0. \quad (\text{I.25})$$

L'esistenza di una soluzione non banale conduce alla condizione

$$\begin{aligned} & \cos \beta \left[\cos \alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin \alpha \cos(kL) \right] \\ & + \sin \beta [\cos \alpha \cos(kL) - k \sin \alpha \sin(kL)] = 0, \end{aligned}$$

oppure

$$\sin(\alpha + \beta) \cos(kL) = - \left[\frac{\cos \alpha \cos \beta}{k} - k \sin \alpha \sin \beta \right] \sin(kL).$$

Si cerchino i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione $k \mapsto \tan(kL)$ e quello della funzione razionale

$$k \mapsto - \frac{k \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta - k^2 \sin \alpha \sin \beta}.$$

3.2 Equazione di Helmholtz nel Rettangolo

Consideriamo ora l'equazione di Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u(x, y) = 0, \quad (\text{I.26})$$

dove $0 < x < L_1$, $0 < y < L_2$ e vengono imposte le seguenti condizioni di Dirichlet:

$$u(x, y) = 0, \quad x = 0, L_1 \text{ oppure } y = 0, L_2. \quad (\text{I.27})$$

Separando le variabili, cioè ponendo

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

e dividendo la (I.26) da $X(x)Y(y)$ otteniamo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 = 0.$$

Quindi esistono costanti k_x^2 e k_y^2 tali che

$$\begin{cases} X''(x) + k_x^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(L_1) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

$$\begin{cases} Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2. \quad (\text{I.30})$$

Quindi i problemi al contorno nelle variabili x e y sono ambedue problemi al contorno per l'equazione di Helmholtz in una variabile con le condizioni di Dirichlet. Quindi i loro autovalori e le loro autofunzioni normalizzate sono

$$(k_x^2)_n = \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L_1}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right), \quad (\text{I.31})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$, e

$$(k_y^2)_m = \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2, \quad \varphi_m(y) = \sqrt{\frac{2}{L_2}} \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \quad (\text{I.32})$$

dove $m = 1, 2, 3, \dots$. Di conseguenza, gli autovalori e autofunzioni normalizzate del problema bidimensionale sono

$$(k^2)_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2}\right), \quad \varphi_{n,m}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right), \quad (\text{I.33})$$

dove $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni formano una base ortonormale in $L^2((0, L_1) \times (0, L_2))$.

Su tutte le 4 parti del bordo, $\{0\} \times [0, L_2]$, $\{L_1\} \times [0, L_2]$, $[0, L_1] \times \{0\}$ e $[0, L_1] \times \{L_2\}$, si possono imporre diverse condizioni al contorno, quali le condizioni di Dirichlet, quelle di Neumann e quelle miste. In tutti questi casi si possono separare le variabili e risolvere i problemi al contorno unidimensionali che ne risultano.

L'equazione di Helmholtz si può risolvere per separazione delle variabili anche nei parallelepipedi rettangolari multidimensionali in dimensione ≥ 3 . Per esempio, in tre dimensioni, nel dominio $(0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$, e sotto le condizioni di Dirichlet escono gli autovalori e autofunzioni

$$(k^2)_{n,m,l} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{l^2}{L_3^2}\right),$$

$$\varphi_{n,m,l}(x, y, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{L_3}\right),$$

dove $n, m, l = 1, 2, 3, \dots$

4 Equazioni delle onde e del calore

Discutiamo ora alcuni casi in cui è abbastanza facile calcolare esplicitamente le soluzioni delle equazioni del calore e delle onde.

4.1 Equazioni delle onde e del calore nell'intervallo

Consideriamo ora l'equazione del calore per $x \in (0, L)$ con condizione iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{I.34})$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (\text{I.35})$$

dove a^2 è la diffusività termica,³ e quella delle onde con condizioni iniziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{I.36})$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (\text{I.37})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad (\text{I.38})$$

dove $c > 0$ è la velocità d'onda. In ambedue casi imporremo una condizione al contorno, quali quella di Dirichlet

$$u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (\text{I.39})$$

Al posto delle condizioni di Dirichlet si possono imporre quelle di Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (\text{I.40})$$

In ambedue i casi facciamo una separazione delle variabili di tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

e dividiamo la (I.34) e la (I.37) da $X(x)T(t)$. Otteniamo

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, & \text{equazione del calore,} \\ c^2 \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, & \text{equazione delle onde,} \end{cases}$$

³Infatti $a^2 = K/(\mu\rho)$, dove K è la conduttività termica, μ è il calore specifico e ρ è la densità del mezzo. In generale vale l'equazione $\mu\rho(\partial u/\partial t) = K\Delta u + \nabla \vec{K} \cdot \nabla u$.

con le condizioni di Dirichlet

$$X(0) = X(L) = 0.$$

La separazione delle variabili conduce al problema di contorno

$$\begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) = 0, \\ X(0) = X(L) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.41})$$

più il problema in variabile temporale

$$\begin{cases} T'(t) = -a^2 k^2 T(t), & \text{equazione del calore,} \\ T''(t) = \frac{k^2}{c^2} T(t), & \text{equazione delle onde.} \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

Quindi la soluzione della (I.41) ha la forma

$$(k^2)_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.43})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$, mentre la soluzione dei problemi temporali ha la forma

$$\begin{cases} T_n(t) = T_n(0) \exp\left(-a^2 t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right), & \text{equazione del calore,} \\ T_n(t) = T_n(0) \cos\left(\frac{n\pi t}{cL}\right) + T'_n(0) \frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{cL}\right)}{n\pi/cL}, & \text{equazione delle onde.} \end{cases} \quad (\text{I.44})$$

La soluzione generale della equazione del calore o delle onde è una combinazione lineare (facendo scorrere $n = 1, 2, 3, \dots$) delle soluzioni elementari $X_n(x)T_n(t)$. Quindi la soluzione generale dell'equazione del calore ha la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-a^2 t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.45})$$

dove

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (\text{I.46})$$

Il coefficiente di Fourier c_n viene calcolato nel seguente modo:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

D'altra parte, la soluzione generale dell'equazione delle onde ha la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos\left(\frac{n\pi t}{cL}\right) + d_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi t}{cL}\right)}{n\pi t/cL} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.47})$$

dove

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.48})$$

$$u_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (\text{I.49})$$

I coefficienti di Fourier si calcolano nel seguente modo:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$d_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Se invece della (I.39) vengono imposte le condizioni di Neumann, i dettagli della derivazione della soluzione non cambiano tantissimo.

4.2 Equazioni delle onde e del calore nel rettangolo

La risoluzione delle equazioni del calore e delle onde nel rettangolo è analoga a quella per i corrispondenti problemi unidimensionali. Al posto degli autovalori e autofunzioni dell'equazione di Helmholtz nell'intervallo si utilizzano ora quelli dell'equazione di Helmholtz nel rettangolo.

Consideriamo ora l'equazione del calore per $(x, y) \in (0, L_1) \times (0, L_2)$ con condizione iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (\text{I.50})$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (\text{I.51})$$

dove a^2 è la diffusività termica, e quella delle onde con condizioni iniziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (\text{I.52})$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (\text{I.53})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad (\text{I.54})$$

dove $c > 0$ è la velocità d'onda. In ambedue casi imporremo una condizioni al contorno, quali quella di Dirichlet

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(L_1, y, t) = 0, & y \in [0, L_2], \\ u(x, 0, t) = u(x, L_2, t) = 0, & x \in [0, L_1]. \end{cases} \quad (\text{I.55})$$

La separazione delle variabili

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

e la divisione dall'espressione $X(x)Y(y)T(t)$ conducono al problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right], \\ X(0) = X(L_1) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.56})$$

per l'equazione del calore e al problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right], \\ X(0) = X(L_1) = 0, \\ Y(0) = Y(L_2) = 0, \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

per l'equazione delle onde. Otteniamo, come al solito,

$$\begin{aligned} X''(x) + k_x^2 X(x) &= 0, & X(0) &= X(L_1) = 0, \\ Y''(y) + k_y^2 Y(y) &= 0, & Y(0) &= Y(L_2) = 0, \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} (k_x)^2 &= \left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2, & X(x) &\sim \sin \frac{n\pi x}{L_1}, \\ (k_y)^2 &= \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2, & Y(y) &\sim \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \end{aligned}$$

dove $n, m = 1, 2, 3, \dots$. Inoltre,

$$T_{nm}(t) = T_{nm}(0) \exp \left(-a^2 \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right] t \right)$$

per l'equazione del calore e

$$T_{nm}(t) = T_{nm}(0) \cos \left(\frac{t}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \\ + T'_{nm}(0) \frac{\sin \left(\frac{t}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)}{\frac{1}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

per l'equazione delle onde.

Per l'equazione del calore arriviamo alla seguente soluzione completa:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \exp \left(-a \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right] t \right) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \quad (\text{I.58})$$

dove

$$u_0(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \quad (\text{I.59})$$

$$c_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_0(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} dy dx. \quad (\text{I.60})$$

Infine l'equazione delle onde ha la seguente soluzione:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[c_{n,m} \cos \left(\frac{t}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \right. \\ \left. + d_{n,m} \frac{\sin \left(\frac{t}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2} \right)}{\frac{1}{c} \left[\left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 \right]^{1/2}} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \right], \quad (\text{I.61})$$

dove

$$u_0(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \quad (\text{I.62})$$

$$u_1(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} d_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2}, \quad (\text{I.63})$$

$$c_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_0(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} dy dx, \quad (\text{I.64})$$

$$d_{n,m} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u_1(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} dy dx. \quad (\text{I.65})$$

Capitolo II

EQUAZIONI DIFFERENZIALI E FUNZIONI SPECIALI

In questo capitolo discutiamo prima le equazioni differenziali lineari di secondo ordine, in particolare la cosiddetta teoria di Frobenius. Poi discutiamo le cosiddette funzioni speciali. Tali funzioni vengono utilizzate spesso nelle applicazioni e loro proprietà vengono tabellate. Tra i libri di tabellazione più utilizzati ci trovano i classici libri di Abramowitz e Stegun [1], di Gradshteyn e Ryzik [9], di Watson [22] (che è specializzato nelle funzioni di Bessel), e di Whittaker e Watson [23]. Sono più moderni il libro di Varshalovich, Moskalev e Khersonskii [21] e il cosiddetto NIST Handbook [14] (infatti un aggiornamento di [1]). La teoria dei polinomi ortogonali si trova nel classico libro di Szegő [19].

1 Equazioni Differenziali di Secondo Ordine

Consideriamo l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad x \in I, \quad (\text{II.1})$$

dove a_0 , a_1 e g sono funzioni reali continue di $x \in I$, essendo I un intervallo aperto della retta reale. Allora per ogni $x_0 \in I$ e per ogni coppia di numeri $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ esiste una soluzione unica della (II.1) tale che

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \quad (\text{II.2})$$

Ponendo y_p per la soluzione particolare dell'equazione non omogenea (II.1) che soddisfa alle condizioni $y_p(x_0) = y_p'(x_0) = 0$, la soluzione del problema a valori iniziali (II.1)-(II.2) ha la seguente forma:

$$y(x) = y_0 Y_0(x) + y_1 Y_1(x) + y_p(x), \quad (\text{II.3})$$

dove Y_0 e Y_1 sono le soluzioni della corrispondente equazione omogenea

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad x \in I, \quad (\text{II.4})$$

tali che

$$Y_0(x_0) = 1, \quad Y_0'(x_0) = 0, \quad (\text{II.5})$$

$$Y_1(x_0) = 0, \quad Y_1'(x_0) = 1. \quad (\text{II.6})$$

Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea (II.4) costituiscono uno spazio vettoriale reale di dimensione 2.

La mappa $(y_0, y_1) \mapsto y$, con y la soluzione dell'equazione omogenea (II.4) che soddisfa la (II.2), è una corrispondenza biunivoca lineare tra \mathbb{R}^2 e lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea (II.4). Dunque due soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione omogenea (II.4) sono linearmente indipendenti se e solo se sono linearmente indipendenti i loro vettori colonna dei dati iniziali $(y_j(x_0), y_j'(x_0))^T$ ($j = 1, 2$), cioè se e solo se il loro *Wronskiano*

$$w(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (\text{II.7})$$

La matrice 2×2 nella (II.7) si dice *matrice Wronskiana*. Siccome la trasformazione lineare dai dati iniziali delle soluzioni della equazione omogenea in x_0 ai dati iniziali in un altro punto $\hat{x}_0 \in I$ è per forza una corrispondenza biunivoca, ne segue che il Wronskiano $w(x)$ si annulla da nessuna parte oppure si annulla dappertutto in I . Quest'ultima proprietà si dimostra anche nel seguente modo:

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{d}{dx}(y_1 y_2' - y_2 y_1') = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \\ &= y_1(-a_1 y_2' - a_0 y_2) - y_2(-a_1 y_1' - a_0 y_1) \\ &= -a_1(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -a_1 w. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Quindi, $w(x) = \text{cost.} \exp(-A_1(x))$, essendo A_1 una primitiva della funzione coefficiente a_1 . Di conseguenza, $w(x) = 0$ se e solo se si annulla la costante se e solo se $w(x) = 0$ per ogni $x \in I$.

Per risolvere l'equazione non omogenea (II.1) partendo da due soluzioni linearmente indipendenti y_1 e y_2 della corrispondente equazione omogenea (II.4), si utilizzi il *metodo della variazione dei parametri*. Ponendo

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (\text{II.9})$$

e facendo l'ipotesi che $c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$ per ogni $x \in I$, si arriva al seguente sistema lineare

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.10})$$

Essendo $w(x) \neq 0$ (per ogni $x \in I$) il determinante della matrice del sistema lineare (II.10) (cioè il Wronskiano), risulta la soluzione

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{w(x)} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} = \frac{g(x)}{w(x)} \begin{pmatrix} -y_2(x) \\ y_1(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.11})$$

da cui si trovano $c_1(x)$ e $c_2(x)$ (e dunque la soluzione y) integrando.

2 Metodo di Frobenius

L'equazione differenziale ordinaria

$$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0}, \quad (\text{II.12})$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$ e quindi ammettono uno sviluppo in potenze di x con raggio di convergenza strettamente positiva, può essere risolta sostituendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Risulta una relazione di ricorrenza per i coefficienti c_n che ci consente a calcolare c_2, c_3, c_4, \dots in modo unico dai coefficienti iniziali $c_0 = y(0)$ e $c_1 = y'(0)$. Inoltre, il raggio di convergenza della serie di potenze per la $y(x)$ non è inferiore al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenze per $P(x)$ e $Q(x)$. Siccome $y(0)$ e $y'(0)$ determinano completamente la soluzione y , si trovano in tal modo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (II.12).

Esempio II.1 Il metodo di risoluzione sostituendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ viene illustrato dall'equazione di Airy¹

$$\boxed{y'' = xy.}$$

Siccome $y''(0) = 0$, abbiamo $c_2 = 0$. Quindi $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3} x^{n+1}$ e $xy = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$ implicano

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)c_{n+3} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1},$$

e quindi si arriva alla relazione di ricorrenza

$$(n+2)(n+3)c_{n+3} = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

partendo da $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$ e $c_2 = 0$. Quindi

$$c_{3k} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3k-1)(3k)}, \quad c_{3k+1} = \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3k)(3k+1)},$$

¹George Biddell Airy [1801–1892], astronomo.

e $c_2 = c_5 = c_8 = \dots = 0$. Di conseguenza

$$y(x) = y(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3k-1)(3k)} + y'(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3k)(3k+1)},$$

dove ambedue le serie hanno raggio di convergenza $+\infty$.

Il **metodo di Frobenius** (1877)² è stato sviluppato per risolvere certe equazioni differenziali ordinarie con coefficienti singolari utilizzando lo sviluppo della soluzione in serie di potenza. In tal caso l'equazione differenziale ha la forma (II.12), dove $p(x) \stackrel{\text{def}}{=} xP(x)$ e $q(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2Q(x)$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$. Si dice che $x = 0$ è una *singolarità regolare* [inglese: regular singularity] dell'equazione.

Consideriamo prima l'esempio più elementare di un'equazione differenziale con singolarità regolare ad $x = 0$, la cosiddetta *equazione di Eulero*

$$\boxed{x^2 y'' + pxy' + qy = 0}, \quad (\text{II.13})$$

dove p e q sono coefficienti costanti reali. Per $(\pm x) > 0$ sostituiamo $x = \pm e^t$, dove $t \in \mathbb{R}$, e arriviamo all'equazione a coefficienti costanti

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = 0. \quad (\text{II.14})$$

La sua equazione caratteristica, ora detta *equazione indiciale*, è

$$\alpha(\alpha-1) + p\alpha + q = 0. \quad (\text{II.15})$$

Quest'equazione segue dalla (II.13) sostituendo $y = (\pm x)^\alpha$ per $(\pm x) > 0$.

Ci sono tre possibilità:

- a. Discriminante $= (p-1)^2 - 4q > 0$. L'equazione indiciale (II.15) ha due radici reali diverse α_1 e α_2 . In tal caso la soluzione della (II.13) è

$$y(x) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t} = c_1 |x|^{\alpha_1} + c_2 |x|^{\alpha_2}.$$

- b. Discriminante $= (p-1)^2 - 4q = 0$. L'equazione indiciale (II.15) ha una singola radice reale α doppia. In tal caso la soluzione della (II.13) è

$$y(x) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} = c_1 |x|^\alpha + c_2 |x|^\alpha \ln |x|.$$

²Ferdinand Georg Frobenius [1849–1917], teorico dei gruppi.

c. Discriminante = $(p - 1)^2 - 4q < 0$. L'equazione indiciale (II.15) ha due radici complesse coniugate $\sigma \pm i\tau$ dove σ e τ sono reali. In tal caso la soluzione della (II.13) è

$$y(x) = e^{\sigma t} [c_1 \cos(\tau t) + c_2 \sin(\tau t)] = |x|^\sigma [c_1 \cos(\tau \ln |x|) + c_2 \sin(\tau \ln |x|)].$$

Spieghiamo ora il *Metodo di Frobenius* (1877). Si cerchi la generalizzazione della risoluzione dell'equazione di Eulero alle equazioni differenziali

$$\boxed{x^2 y''(x) + xp(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0}, \quad (\text{II.16})$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni analitiche in un intorno di $x = 0$ nel piano complesso. Ciò vuol dire che

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad (\text{II.17})$$

dove ambedue serie di potenze hanno un raggio di convergenza strettamente positiva. Sostituiamo ora nella (II.16)

$$y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\alpha}, \quad (\text{II.18})$$

dove, per ipotesi, la serie ha un raggio di convergenza $R > 0$.³ Allora

$$xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) c_n x^{n+\alpha}, \quad x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) c_n x^{n+\alpha}, \quad (\text{II.19})$$

dove abbiamo calcolato le derivate termine a termine. Sostituendo la (II.18) e la (II.19) nella (II.16) otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n + \alpha)(n + \alpha - 1) c_n + \sum_{j=0}^n p_{n-j} (j + \alpha) c_j + \sum_{j=0}^n q_{n-j} c_j \right] x^{n+\alpha} = 0.$$

Quindi tutti i coefficienti di questa serie si devono annullare:

$$(n + \alpha)(n + \alpha - 1) c_n + \sum_{j=0}^n p_{n-j} (j + \alpha) c_j + \sum_{j=0}^n q_{n-j} c_j = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II.20})$$

³Si può dimostrare che il raggio di convergenza di questa serie di potenze non è inferiore al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenze nella (II.17) (vedi [17]).

La (II.20) si può anche scrivere nella forma matriciale

$$\sum_{j=0}^n T(\alpha)_{nj} c_j = 0,$$

dove la matrice semiinfinita $T(\alpha)$ con elementi

$$T(\alpha)_{nj} = \begin{cases} \Lambda(\alpha + n) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) + p_0(\alpha + n) + q_0, & n = j, \\ p_{n-j}(j + \alpha) + q_{n-j}, & n > j, \\ 0, & n < j. \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

è sottotriangolare. In particolare, abbiamo trovate la cosiddetta *equazione indiciale*

$$\boxed{\Lambda(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\alpha - 1) + p_0\alpha + q_0 = 0.} \quad (\text{II.22})$$

Affinchè $c_0 \neq 0$, α deve essere una radice della (II.22).

Teorema II.2 (Frobenius) *Supponiamo che l'equazione indiciale (II.22) ha due zeri diversi con una differenza non intera. Allora, scegliendo per α uno degli zeri, si ottengono due soluzioni linearmente indipendenti della (II.16) per $|x|$ inferiore al minimo dei raggi di convergenza delle serie di potenza (II.17).*

Scrivendo la (II.21) nella forma

$$\sum_{j=1}^n T(\alpha)_{nj} c_j = -c_0 T(\alpha)_{n0}, \quad n = 1, 2, \dots, m, \dots,$$

dove α è uno zero dell'equazione indiciale (II.22) e

$$\det (T(\alpha)_{nj})_{n,j=1}^m = \Lambda(\alpha + 1)\Lambda(\alpha + 2) \dots \Lambda(\alpha + m),$$

troviamo in modo unico tutti i coefficienti $c_1, c_2, \dots, c_m, \dots$ se nessuno dei numeri $\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + m, \dots$ è uno zero dell'equazione indiciale (II.22). In tal caso risultano due soluzioni linearmente indipendenti, una per ciascuno zero della (II.22).

Se l'equazione indiciale (II.22) ha un singolo zero $\alpha \in \mathbb{R}$, allora la (II.18) conduce ad una singola soluzione linearmente indipendente della (II.16). Per trovare una seconda soluzione linearmente indipendente, si calcolino i coefficienti $c_n(\alpha)$ dal coefficiente c_0 utilizzando la (II.20) e inserendo α come fosse un parametro libero. La seconda soluzione linearmente indipendente ora ha la seguente forma:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) x^{n+\alpha} \right]_{\alpha=\alpha_0}, \quad (\text{II.23})$$

dove α_0 è il singolo zeri dell'equazione indiciale.

Se l'equazione indiciale ha due zeri reali con differenza intera, α_0 e $\alpha_0 - N$ per un opportuno $N \in \mathbb{N}$, allora la situazione è abbastanza complicata, poichè in alcuni casi si trovano due soluzioni linearmente indipendenti e negli altri casi due soluzioni proporzionali. Sostituendo $\alpha = \alpha_0$, **essendo α_0 lo zero maggiore**, si vede subito che si possono trovare tutti i coefficienti c_n dal coefficiente c_0 in modo unico. D'altra parte, sostituendo $\alpha = \alpha_0 - N$, essendo $\alpha_0 - N$ lo zero minore, si vede subito che si possono calcolare in modo unico i coefficienti $c_1, \dots, c_2, \dots, c_{N-1}$ dal coefficiente c_0 risolvendo il sistema di equazioni lineari

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda(\alpha+1) & 0 & \dots & 0 \\ T(\alpha)_{21} & \Lambda(\alpha+2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T(\alpha)_{N-1,1} & \dots & \dots & \Lambda(\alpha+N-1) \end{pmatrix}}_{\text{determinante}=\Lambda(\alpha_0-N+1)\Lambda(\alpha_0-N+2)\dots\Lambda(\alpha_0-1)\neq 0} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = -c_0 \begin{pmatrix} T(\alpha)_{10} \\ T(\alpha)_{20} \\ \vdots \\ T(\alpha)_{N-1,0} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.24})$$

dove $\alpha = \alpha_0 - N$. Arriviamo così alla soluzione unica

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = -c_0 M^{-1} \begin{pmatrix} T(\alpha_0 - N)_{10} \\ T(\alpha_0 - N)_{20} \\ \vdots \\ T(\alpha_0 - N)_{N-1,0} \end{pmatrix},$$

dove M è la matrice quadrata nella (II.24).

Estendiamo ora la (II.24) al sistema di equazioni (II.21) per $m = N$ e $\alpha = \alpha_0 - N$. In tal caso l'ultima equazione ha la forma

$$\sum_{j=0}^{N-1} [p_{N-j}(j + \alpha_0 - N) + q_{N-j}] c_j = 0,$$

oppure

$$c_0 \left\{ T(\alpha_0 - N)_{N,0} + (T(\alpha_0 - N)_{N,1} \dots T(\alpha_0 - N)_{N,N-1}) M^{-1} \begin{pmatrix} T(\alpha_0 - N)_{10} \\ \vdots \\ T(\alpha_0 - N)_{N-1,0} \end{pmatrix} \right\} = 0.$$

Ora ci sono due possibilità.

Prima: Se non si annulla l'espressione tra parentesi graffe, dobbiamo per forza scegliere $c_0 = 0$. In tal caso $c_0 = c_1 = \dots = c_{N-1} = 0$. Scegliamo ora un

coefficiente c_N . Allora la (II.20) per $n \geq N + 1$ e $\alpha = \alpha_0 - N$ ci consentono a calcolare c_{N+1}, c_{N+2}, \dots da c_N in modo unico. Ponendo $d_n = c_{N+n}$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ e $n = N + m$ per $m = 0, 1, 2, \dots$, la (II.20) ha la forma

$$(m + \alpha_0)(m + \alpha_0 - 1)d_m + \sum_{l=0}^m p_{m-l}(l + \alpha_0)d_l + \sum_{l=0}^m q_{m-l}d_l = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.25})$$

e quindi per $\alpha = \alpha_0 - N$ si otterrà una soluzione proporzionale a quella ottenuta per $\alpha = \alpha_0$.

Seconda: Se si annulla l'espressione tra parentesi graffe, allora l'equazione per c_N risulta infatti la tautologia $0 = 0$, mentre per $n \geq N + 1$ e $\alpha = \alpha_0 - N$ la (II.20) conduce a valori per i coefficienti c_{N+1}, c_{N+2}, \dots che dipendono in modo unico e lineare dai coefficienti c_0 e c_N . Quindi si otterranno due soluzioni linearmente indipendenti.

Esempio II.3 Consideriamo l'equazione differenziale di Bessel⁴

$$\boxed{x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0}$$

di ordine $\nu \geq 0$, dove $p(x) \equiv 1$ e $q(x) = x^2 - \nu^2$. Quindi $p_0 = 1$, $q_0 = -\nu^2$ e $q_2 = 1$, e l'equazione indiciale

$$\Lambda(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + p_0\alpha + q_0 = \alpha^2 - \nu^2 = 0$$

ha gli zeri $\pm\nu$. Di conseguenza, se 2ν non è un intero, il metodo di Frobenius conduce a due soluzioni linearmente indipendenti. Supponiamo ora che $0 \neq 2\nu \in \mathbb{Z}$. Allora la (II.24) implica

$$\begin{cases} \Lambda(-\nu + 1)c_1 = 0, \\ \Lambda(-\nu + n)c_n + c_{n-2} = 0, \quad n = 2, \dots, \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

dove $0 \notin \{\Lambda(-\nu + n) : n = 1, 2, \dots, 2\nu - 1\} \cup \{\Lambda(-\nu + n) : n \geq 2\nu + 1\}$. È facile capire che per 2ν dispari si trovano due soluzioni linearmente indipendenti, mentre per 2ν si trova una singola soluzione linearmente indipendente. Infatti, se 2ν è pari, per $n = 2\nu$ si trova $c_{2\nu-2} = 0$; utilizzando la (II.26) per $n = 2, 4, \dots, 2\nu - 2$ pari, otteniamo $0 = c_{2\nu-2} = c_{2\nu-4} = \dots = c_2 = c_0$, mentre la (II.26) per $n = 1, 3, \dots, 2\nu - 1$ conduce a $0 = c_1 = c_3 = \dots = c_{2\nu-1} = 0$. Per 2ν dispari, lo stesso ragionamento conduce a $c_1 = c_3 = \dots = c_{2\nu} = \dots = 0$ direttamente.

⁴Friedrich Wilhelm Bessel [1784–1846], astronomo, è stato il primo a misurare la parallasse di una stella [61 Cygni, 1838] e di scoprire il compagno Sirio B della stella Sirio [1841].

3 Funzioni Ipergeometriche

Consideriamo ora la *funzione ipergeometrica*

$$\boxed{{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} z^k} \quad (\text{II.27})$$

per $|z|$ abbastanza piccola, dove il *simbolo di Pochhammer* $\alpha_0 = 1$ e

$$\boxed{(\alpha)_k \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k-1) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}}.$$

Ovviamente si ha la relazione di simmetria

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \gamma; z)$$

per $|z|$ abbastanza piccola. Ovviamente

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 0) = 1, \quad \left[\frac{d}{dz} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) \right]_{z=0} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}. \quad (\text{II.28})$$

α	β	γ	z	${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$
α	β	β	z	$(1-z)^{-\alpha}$
1	1	2	z	$-\log(1-z)/z$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	z^2	$\frac{1}{2z} \log \frac{1+z}{1-z}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	z^2	$\arcsin(z)/z$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-z^2$	$\arctan(z)/z$

Per trovare un'espressione integrale per le funzioni ipergeometriche si ricorda prima che

$$\begin{aligned} \frac{(\beta)_k}{(\gamma)_k} &= \frac{\Gamma(\beta+k)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+k)} = \frac{B(\beta+k, \gamma-\beta)}{B(\beta, \gamma-\beta)} \\ &= \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta+k-1} dt. \end{aligned}$$

Sostituendolo nella (II.27) otteniamo

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} z^k \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta+k-1} dt \\ &= \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} (zt)^k \right\} dt \\ &= \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt, \end{aligned}$$

valida per $|z| < 1$ e $\gamma > \beta > 0$, dove B è la funzione beta di Eulero [Vedi l'Appendice A]. Sostituendo $z = 1$ si ottiene

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{1}{B(\gamma - \beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1} t^{\beta-1} dt = \frac{B(\beta, \gamma - \alpha - \beta)}{B(\beta, \gamma - \beta)}$$

per $\gamma - \alpha - \beta > 0$ e $\beta > 0$. Esprimendo le funzioni beta di Eulero in funzioni gamma (vedi l'Appendice A) otteniamo il *teorema di Gauss*

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}, \quad (\text{II.29})$$

dove $\gamma - \alpha - \beta > 0$ e $\beta > 0$.

La funzione ipergeometrica ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ soddisfa all'equazione differenziale ipergeometrica

$$\boxed{x(1-x)y''(x) + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}y'(x) - \alpha\beta y = 0.} \quad (\text{II.30})$$

Tutti i punti $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ sono punti regolari della (II.29) (cioè, esistono due soluzioni linearmente indipendenti in un intorno di ciascuno di questi punti), mentre 0, 1 e ∞ sono singolarità regolari.

Intorno a $x = 0$ la (II.30) ha la forma

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)}y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y = 0.$$

Quindi l'equazione indiciale è

$$\mu(\mu - 1) + \gamma\mu = \mu(\mu + \gamma - 1) = 0,$$

con gli zeri 0 e $1 - \gamma$. Quindi la sostituzione $y(x) = x^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ per $\mu \in \{0, 1 - \gamma\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x| < 1$ se $\gamma \notin \mathbb{Z}$.

Intorno a $x = 1$ l'equazione indiciale è

$$\mu(\mu - 1) + (\alpha + \beta - \gamma + 1)\mu = \mu(\mu + \alpha + \beta - \gamma) = 0,$$

con gli zeri 0 e $\gamma - \alpha - \beta$. Quindi la sostituzione $y(x) = (x-1)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-1)^k$ per $\mu \in \{0, \gamma - \alpha - \beta\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x-1| < 1$ se $\gamma - \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$.

Intorno a $x = \infty$ possiamo trasformare la (II.30) ponendo $z = 1/x$ e considerando $z = 0$ come singolarità regolare. Si ottiene l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{z}\right) z^2 \frac{d}{dz} (z^2 y'(z)) - \left[\gamma - \frac{\alpha + \beta + 1}{z}\right] z^2 \frac{dy}{dz} - \alpha\beta y(z) \\ & = z^2(z-1)y''(z) - z[2(1-z) + \gamma z - \alpha - \beta - 1]y'(z) - \alpha\beta y(z) = 0. \end{aligned}$$

L'equazione indiciale è

$$\mu(\mu - 1) + \mu(1 - \alpha - \beta) + \alpha\beta = (\mu - \alpha)(\mu - \beta) = 0.$$

Quindi la sostituzione $y(x) = x^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k}$ per $\mu \in \{\alpha, \beta\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x| > 1$ se $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$.

Per passare all'equazione ipergeometrica confluyente osserviamo prima che la funzione ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x/\beta)$ soddisfa all'equazione differenziale

$$x \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{ \gamma - \left(1 + \frac{\alpha + 1}{\beta}\right) x \right\} \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0. \quad (\text{II.31})$$

Facendo tendere $\beta \rightarrow \infty$ si arriva alla cosiddetta *equazione ipergeometrica confluyente*

$$xy''(x) + (\gamma - x)y'(x) - \alpha y = 0. \quad (\text{II.32})$$

Siccome $(\beta)_k/\beta^k \rightarrow 1$ se $\beta \rightarrow \infty$ per k fissa, otteniamo come una delle soluzioni la *funzione ipergeometrica confluyente*

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!} x^k. \quad (\text{II.33})$$

α	γ	z	${}_1F_1(\alpha; \gamma; z)$
α	α	z	e^z
$\alpha + 1$	α	z	$\left(1 + \frac{\alpha}{z}\right) e^z$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-z^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2z} \operatorname{erf}(z)$

Tutti i punti in $\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$ sono regolari, mentre zero e ∞ sono singolarità della (II.31). Infatti, intorno ad $x = 0$ si ottiene l'equazione indiciale

$$\mu(\mu - 1) + \gamma\mu = \mu(\mu + \gamma - 1) = 0,$$

con gli zeri 0 e $1 - \gamma$. Quindi la sostituzione $y(x) = x^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ per $\mu \in \{0, 1 - \gamma\}$ conduce a due soluzioni linearmente indipendenti per $|x| < 1$ se $\gamma \notin \mathbb{Z}$. Il punto all'infinito non è una singolarità regolare. Infatti, la sostituzione $z = (1/x)$ nella (II.32) conduce all'equazione differenziale

$$\frac{1}{z} z^2 \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dy}{dz} \right) + \left(\gamma - \frac{1}{z} \right) \frac{dy}{dz} - \alpha y = 0$$

oppure

$$z^3 \frac{d^2 y}{dz^2} + ([2 + \gamma]z^2 - z) \frac{dy}{dz} - \alpha y = 0.$$

4 Funzioni di Bessel

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\boxed{x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0}, \quad (\text{II.34})$$

detta *equazione di Bessel*. Ogni soluzione di quest'equazione non identicamente nulla è detta *funzione cilindrica*.

4.1 Definizione e proprietà semplici

Consideriamo, per $\nu \in \mathbb{R}$, la funzione⁵

$$\boxed{J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}, \quad (\text{II.35})$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione Gamma che soddisfa $\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$ e $\Gamma(1) = 1$ [vedi l'Appendice A]. Si può rappresentare nella forma

$$J_\nu(x^2) = x^\nu f_\nu(x^2), \quad (\text{II.36})$$

dove $f_\nu(\zeta)$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso,

$$f_\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta^k}{2^{2k+\nu} \Gamma(k + \nu + 1) \Gamma(k + 1)}, \quad (\text{II.37})$$

con raggio di convergenza $R = +\infty$. Quindi la sua somma definisce una funzione analitica $f_\nu(\zeta)$ in tutto il piano complesso.

Verifichiamo che la funzione $J_\nu(x)$ soddisfa l'equazione (II.34). Utilizzando la relazione $\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$, si ottiene

$$\begin{aligned} & x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [(2k + \nu)(2k + \nu - 1) + (2k + \nu) - \nu^2]}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4k(k + \nu)}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu)\Gamma(k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -x^2 J_\nu(x), \end{aligned}$$

⁵La (II.35) si può anche derivare applicando il metodo di Frobenius.

come dovevasi dimostrare. La funzione cilindrica $J_\nu(x)$ si dice *funzione di Bessel di ordine ν* , dove $x^\nu > 0$ per $x > 0$. In particolare

$$\begin{cases} J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Se $\nu > 0$ non è intero, le funzioni $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti. Ciò segue dalla (II.35) in virtù del fatto che

$$\boxed{J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} [1 + O(x^2)], \quad x \rightarrow 0; \quad \nu \neq -1, -2, -3, \dots,} \quad (\text{II.39})$$

poichè $\Gamma(\nu+1)$ è finito. Se, invece, $\nu = n$ è intero, si utilizzi il fatto che $\Gamma(-k)$ è infinito per $k = 0, 1, 2, \dots$ [vedi l'Appendice A] e quindi la sommatoria nella serie (II.35) per $J_{-n}(x)$ inizia a $k = n$. Quindi per $n = 0, 1, 2, \dots$ si ha

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &\stackrel{l=k-n}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+n}}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n} = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Dunque le funzioni $J_n(x)$ e $J_{-n}(x)$ sono linearmente dipendenti:

$$\boxed{J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).} \quad (\text{II.40})$$

Sono valide le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$\boxed{J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x).} \quad (\text{II.41})$$

Infatti, la prima formula (II.41) segue dalla (II.35):

$$\begin{aligned} &J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \right] \\ &= -\frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x). \end{aligned}$$

Nello stesso modo si ottiene

$$\begin{aligned}
& J'_\nu(x) + J_{\nu+1}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k + \nu)}{2\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} + \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + \nu)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1} \right] \\
&= \frac{\nu}{2\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \\
&\quad - \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^l (2l + \nu + 2)}{2\Gamma(l + \nu + 2)\Gamma(l + 2)} - \frac{(-1)^l}{\Gamma(l + \nu + 2)\Gamma(l + 1)} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu+1} \\
&= \frac{\nu}{2\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} - \frac{\nu}{x} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\Gamma(l + \nu + 2)\Gamma(l + 2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu+1} = \frac{\nu}{x} J_\nu(x).
\end{aligned}$$

Le formule (II.41) si possono riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

In particolare per $\nu = 0$ si trova

$$\boxed{J'_0(x) = -J_1(x)}.$$

Infine, sottraendo le formule (II.41), si ottiene ancora una relazione di ricorrenza:

$$\boxed{J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.}$$

4.2 Funzioni di Bessel di seconda specie

Il Wronskiano $W[u, v] = uv' - u'v$ di due soluzioni u e v dell'equazione di Bessel soddisfa all'equazione differenziale di primo ordine

$$W'[u, v](x) + \frac{1}{x} W[u, v](x) = 0,$$

e quindi $W[u, v](x)$ è proporzionale alla funzione $1/x$. Per trovare la costante di proporzionalità basta studiare l'andamento del Wronskiano se $x \rightarrow 0$. Per $\nu \notin \mathbb{Z}$ si vede subito che

$$\begin{cases} J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \\ xJ'_\nu(x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \\ J_{-\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \\ xJ'_{-\nu}(x) = \frac{-\nu}{\Gamma(-\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + O(x^{-\nu+2}), \end{cases}$$

e dunque [vedi la (A.10) nell'Appendice A]

$$\begin{aligned} W[J_\nu, J_{-\nu}](x) &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} + \underbrace{O(x)}_{=0} \\ &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{-2 \sin(\nu\pi)}{\pi x}. \end{aligned}$$

Quindi $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ sono linearmente indipendenti [cioè, il Wronskiano non si annulla per $x \neq 0$] se e solo se ν non è un intero. Se $\nu \in \mathbb{Z}$, risulta $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$.

Per $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) esiste una soluzione dell'equazione di Bessel linearmente indipendente della $J_n(x)$. Per trovarla definiamo la *funzione di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

per $\nu \notin \mathbb{Z}$. Siccome sia il numeratore che il denominatore sono funzioni analitiche di $\nu \in \mathbb{C}$ e $(d/d\nu) \sin(\nu\pi) = \pi \cos(\nu\pi) \neq 0$ per $\nu = 0, 1, 2, \dots$, il limite di $Y_\nu(x)$ per $\nu \rightarrow n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ esiste ed è uguale all'espressione

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}.$$

Calcolando la derivata della serie di potenza per $J_\nu(x)$ rispetto a ν ed introducendo la funzione $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ otteniamo per $x \geq 0$

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{(k!)^2} \left[\log \frac{x}{2} - \psi(k+1) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} J_0(x) \log \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{(k!)^2} \psi(k+1), \\ Y_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-n} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[2 \log \frac{x}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)]. \end{aligned}$$

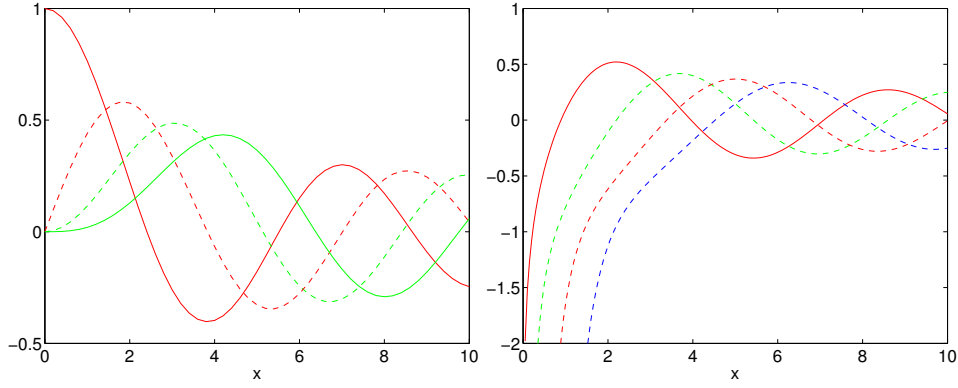


Figura II.1: Pannello sinistro: le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$. Pannello destro: le funzioni di Neumann $Y_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Quest'espressione conduce alle rappresentazioni asintotiche per $x \rightarrow 0^+$

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2}, & n = 0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

implicando che $|Y_n(x)| \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow 0$.

Per ragioni di linearità le funzioni di Bessel di seconda specie soddisfano alle stesse formule di ricorrenza di quelle di prima specie. In particolare

$$Y'_\nu(x) = Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x);$$

$$\frac{d}{dx} [x^\nu Y_\nu(x)] = x^\nu Y_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} Y_\nu(x)] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x);$$

$$Y'_0(x) = -Y_1(x); \quad Y_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) + Y_{\nu-1}(x) = 0.$$

4.3 Ortogonalità e zeri

La seguente proposizione ci importa nei casi $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ (cercando gli zeri) e $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ (cercando i valori estremi).

Proposizione II.4 Per $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta > 0$, siano μ_1 e μ_2 zeri reali dell'equazione

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0, \quad (\text{II.43})$$

dove $\nu > -1$. Allora

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & \mu_1^2 \neq \mu_2^2, \\ \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1)^2, & \mu_1 = \mu_2, \\ -\frac{1}{2} J'_\nu(\mu_1) J'_\nu(-\mu_1) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu(\mu_1) J_\nu(-\mu_1), & \mu_1 = -\mu_2. \end{cases} \quad (\text{II.44}) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Siano $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. In virtù della (II.34), le funzioni $J_\nu(\mu_1 x)$ e $J_\nu(\mu_2 x)$ soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right] + \left(\mu_1^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_1 x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left[x \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} \right] + \left(\mu_2^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(\mu_2 x) &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la prima per $J_\nu(\mu_2 x)$ e la seconda per $J_\nu(\mu_1 x)$, poi sottraiamo termine a termine la prima dalla seconda ed integriamo da 0 a 1. Si ottiene

$$\begin{aligned} & (\mu_2^2 - \mu_1^2) \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx \\ &= \int_0^1 \left[J_\nu(\mu_2 x) \frac{d}{dx} \left(x \frac{dJ_\nu(\mu_1 x)}{dx} \right) - J_\nu(\mu_1 x) \frac{d}{dx} \left(x \frac{dJ_\nu(\mu_2 x)}{dx} \right) \right] dx \\ &= [\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x)]_{x=0}^1. \quad (\text{II.45}) \end{aligned}$$

Dalla (II.35) [vedi anche la (II.39)] abbiamo per $x \rightarrow 0^+$

$$J_\nu(\mu x) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}), \quad \mu x J'_\nu(\mu x) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{\mu x}{2} \right)^\nu + O(x^{\nu+2}),$$

e perciò

$$\mu_1 x J_\nu(\mu_2 x) J'_\nu(\mu_1 x) - \mu_2 x J_\nu(\mu_1 x) J'_\nu(\mu_2 x) = O(x^{2\nu+2}), \quad x \rightarrow 0^+.$$

Quindi, grazie alla condizione $\nu > -1$, il primo membro della (II.45) si annulla per $x = 0$ e si ottiene

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2}. \quad (\text{II.46})$$

Se μ_1 e μ_2 sono zeri reali dell'equazione (II.43) dove $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta > 0$, il determinante del sistema lineare

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta \mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0, \quad \alpha J_\nu(\mu_2) + \beta \mu_2 J'_\nu(\mu_2) = 0,$$

per (α, β) si annulla, cioè il numeratore della frazione nella (II.46) si annulla. Di conseguenza, se $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$, segue la proprietà di ortogonalità (cioè, si annulla la parte a sinistra della (II.46)).

Per dimostrare la (II.44) se $\mu_1 = \mu_2$, si passi al limite per $\mu_2 \rightarrow \mu_1$ nella (II.46) utilizzando la regola di De L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_\nu(\mu_1 x)^2 dx &= \lim_{\mu_2 \rightarrow \mu_1} \frac{\mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2)}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 - \frac{1}{2\mu_1} J_\nu(\mu_1) [J'_\nu(\mu_1) + \mu_1 J''_\nu(\mu_1)] \\ &= \frac{1}{2} [J'_\nu(\mu_1)]^2 + \frac{1}{2} J_\nu(\mu_1)^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right). \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato la (II.44) per $\mu_1 = \mu_2$. La dimostrazione per $\mu_1 = -\mu_2$ è analoga. \square

Dimostriamo ora le seguenti proprietà degli zeri dell'equazione (II.43) per $\nu > -1$. Per $\beta = 0$ quest'equazione definisce gli zeri delle funzioni di Bessel.

Teorema II.5 *Gli zeri dell'equazione (II.43) per $\nu > -1$ sono reali, semplici, ad eccezione, forse, dello 0; questi zeri sono simmetricamente disposte rispetto all'origine e non hanno punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Dalla (II.35), in virtù del fatto che α, β e $\Gamma(\xi)$ sono reali, per ξ reali, si ottiene $J_\nu(x) = \overline{J_\nu(\bar{x})}$. Quindi

$$\overline{\alpha J_\nu(\bar{\mu}) + \beta \bar{\mu} J'_\nu(\bar{\mu})} = \alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu).$$

Per questa ragione, se μ è uno zero dell'equazione (II.43), $\bar{\mu}$ è anche esso uno suo zero. Se $\mu^2 \neq \bar{\mu}^2$, applicando la formula (II.44) per $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = \bar{\mu}$, si arriva ad una contraddizione:

$$0 = \int_0^1 x J_\nu(\mu x) J_\nu(\bar{\mu} x) dx = \int_0^1 x |J_\nu(\mu x)|^2 dx.$$

Ciò significa che $\mu^2 = \bar{\mu}^2$, cioè μ è un numero reale o immaginario. Ma quest'ultimo caso non ha luogo, poichè, in virtù della (II.35) e del fatto che $\Gamma(\xi) > 0$ per $\xi > 0$, si ha per $0 \neq a \in \mathbb{R}$

$$\alpha J_\nu(ia) + i \beta a J'_\nu(ia) = \left(\frac{ia}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha + \beta(2k + \nu)}{\Gamma(k + \nu + 1)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \neq 0.$$

Siccome $\mu^{-\nu} [\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu)]$ è una funzione analitica di μ in tutto il piano complesso, i suoi zeri non si possono accumulare ad un punto finito.

Dimostriamo ora la semplicità degli zeri. Sia $\mu_0 > 0$ uno zero della (II.43) di molteplicità 2, in modo che

$$\begin{cases} \alpha J_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J'_\nu(\mu_0) = 0, \\ \alpha J'_\nu(\mu_0) + \beta J'_\nu(\mu_0) + \beta \mu_0 J''_\nu(\mu_0) = -\beta \left(\mu_0 - \frac{\nu^2}{\mu_0} \right) J_\nu(\mu_0) + \alpha J'_\nu(\mu_0) = 0, \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

in virtù dell'equazione (II.34). Dalla (II.47) [che è un sistema di equazioni lineari per $J_\nu(\mu_0)$ e $J'_\nu(\mu_0)$] concludiamo che a) $J_\nu(\mu_0) = J'_\nu(\mu_0) = 0$, oppure b) $\alpha^2 + \beta^2(\mu_0^2 - \nu^2) = 0$. Il caso a) è impossibile grazie al teorema sull'unicità della soluzione della (II.34), poichè $\mu_0 > 0$ non è un punto singolare dell'equazione (II.34). Dimostriamo che è anche impossibile il caso b). Per realizzare il caso b) ci vuole $\beta > 0$ e $(\alpha/\beta) = \sqrt{\nu^2 - \mu_0^2}$, dove $0 < \mu_0 \leq |\nu|$. Sostituendo quest'equazione nella (II.47) si ottiene

$$[J'_\nu(\mu_0)]^2 = \left(\frac{\nu^2}{\mu_0^2} - 1 \right) J_\nu(\mu_0)^2,$$

il che, in virtù della (II.44), porta all'uguaglianza contraddittoria

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_0 x)^2 dx = \frac{1}{2} \left\{ [J'_\nu(\mu_0)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_0^2} \right) J_\nu(\mu_0)^2 \right\} = 0.$$

Il teorema è stato dimostrato. \square

In base al teorema dimostrato si possono numerare gli zeri dell'equazione (II.43), disponendole in ordine crescente:

$$\boxed{0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \mu_3^{(\nu)} < \dots}$$

Se $\nu > 0$, $J_\nu(x)$ si annulla per $x = 0$.

Abbiamo la seguente espressione asintotica per la funzione $J_\nu(x)$:⁶

$$\boxed{J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow +\infty.} \quad (\text{II.48})$$

Ne segue la formula approssimativa per gli zeri di $J_\nu(x)$:

$$\mu_k^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \nu + k\pi, \quad k \rightarrow +\infty.$$

La dimostrazione della formula asintotica (II.48) si trova nell'Appendice E.

⁶Vedi l'Appendice E per la dimostrazione.

4.4 Altre funzioni cilindriche

Insieme con le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$, sono importanti per le applicazioni altri tipi di funzioni cilindriche. Queste funzioni sono le seguenti:

1. *Le funzioni di Neumann o le funzioni di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \nu \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}, & \nu = n = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^n Y_n(-x), & \nu = -n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Spesso si vede la notazione $N_\nu(x)$ invece di $Y_\nu(x)$.

2. *Le funzioni di Hankel di prima specie*

$$\boxed{H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i Y_\nu(x)} \quad (\text{II.49})$$

e le funzioni di Hankel di seconda specie

$$\boxed{H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i Y_\nu(x)}. \quad (\text{II.50})$$

3. *Le funzioni di Bessel di argomento immaginario*

$$\boxed{I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ix),} \quad \boxed{K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2} e^{\pi\nu i/2} H_\nu^{(1)}(ix)}. \quad (\text{II.51})$$

Le funzioni $I_\nu(x)$ si chiamano funzioni di Bessel modificate di prima specie ("modified Bessel functions of the first kind"), mentre le funzioni $K_\nu(x)$ si chiamano funzioni di MacDonald.⁷

Utilizzando l'espressione asintotica (II.48) per $J_\nu(x)$, si ha⁶ per $x \rightarrow +\infty$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \quad (\text{II.52})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O(x^{-3/2}), \quad (\text{II.53})$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad (\text{II.54})$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} [1 + O(x^{-1})], \quad (\text{II.55})$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(x^{-1})]. \quad (\text{II.56})$$

⁷Nella letteratura ci sono diversi nomi e notazioni per queste funzioni. In particolare, in [23] si utilizza una definizione diversa della nostra.

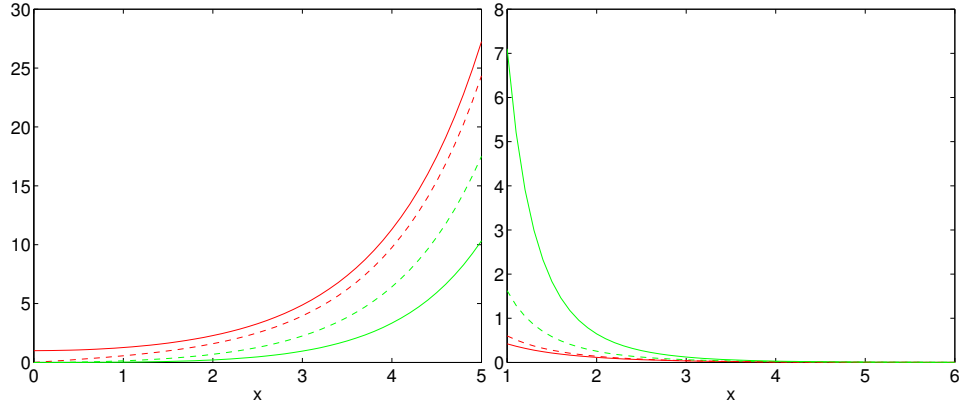


Figura II.2: Pannello sinistro: le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ per $\nu = 0, 1, 2, 3$. Pannello destro: le funzioni di MacDonald $K_\nu(x)$ per $\nu = 0, 1, 2, 3$.

Le dimostrazioni delle formule asintotiche (II.52)-(II.56) si trovano nell'Appendice E. Analogamente, utilizzando la (II.39), si ottiene per $x \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(x) \approx -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & H_0^{(2)}(x) \approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, \\ Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & K_0(x) \approx \ln \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} (I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)) &= \frac{\pi}{2} (e^{\nu\pi i/2} J_{-\nu}(iz) - e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(iz)) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2} (J_{-\nu}(iz) - e^{-\nu\pi i} J_\nu(iz)) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2} (-[J_\nu(iz) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(iz)] + i \sin(\nu\pi) J_\nu(iz)) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2} \sin(\nu\pi) (J_\nu(iz) + iY_\nu(iz)) \\ &= \frac{\pi i}{2} e^{\nu\pi i/2} H_\nu^{(1)}(iz) \sin(\nu\pi) = K_\nu(z) \sin(\nu\pi), \end{aligned}$$

implicando che⁸

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}.$$

Per $\nu = n \in \mathbb{Z}$ bisogna calcolare il limite se $\nu \rightarrow n$.

⁸In [23, Sec. 17.71] la funzione di MacDonald $K_\nu(z)$ viene definita in modo diverso: $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} (I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)) \cot(\nu\pi)$.

Troviamo ora le equazioni differenziali per le funzioni $I_\nu(x)$ e $K_\nu(x)$. Sostituendo $x \mapsto ix$ nella (II.34), otteniamo l'equazione differenziale

$$\boxed{x^2 u'' + xu' - (x^2 + \nu^2)u = 0.} \quad (\text{II.57})$$

Dal Teorema II.5 segue che per $\nu > -1$ le funzioni di Bessel immaginarie $I_\nu(x)$ e le loro derivate prime non hanno zeri reali (con l'eccezione di $x = 0$ se $\nu > 0$).

4.5 Funzioni sferiche di Bessel

Le funzioni di Bessel $J_{\pm(l+\frac{1}{2})}(x)$, dove $l = 0, 1, 2, \dots$, appaiono nello studio dello scattering quantistico e dello scattering della luce. Per questo motivo vengono introdotte le seguenti funzioni:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+\frac{1}{2}}(z), \quad (\text{II.58})$$

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{l+\frac{1}{2}}(z), \quad (\text{II.59})$$

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + iy_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(z), \quad (\text{II.60})$$

$$h_l^{(2)}(z) = j_l(z) - iy_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(z). \quad (\text{II.61})$$

Le funzioni $j_l(z)$, $y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z)$ e $h_l^{(1,2)}(z)$ si dicono *funzioni sferiche di Bessel* di prima, seconda e terza specie. Quindi

$$\begin{aligned} j_0(z) &= \frac{\sin(z)}{z}, \\ j_1(z) &= \frac{\sin(z)}{z^2} - \frac{\cos(z)}{z}, \\ j_2(z) &= \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \sin(z) - \frac{3}{z^2} \cos(z), \\ y_0(z) &= -n_0(z) = -\frac{\cos(z)}{z}, \\ y_1(z) &= n_1(z) = -\frac{\cos(z)}{z^2} - \frac{\sin(z)}{z}, \\ y_2(z) &= -n_2(z) = \left(-\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z} \right) \cos(z) - \frac{3}{z^2} \sin(z). \end{aligned}$$

Si vede facilmente che

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = (-1)^{l+1} j_{-l-1}(z). \quad (\text{II.62})$$

È anche abbastanza facile trovare le seguenti espressioni esplicite:

$$j_l(z) = z^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\sin(z)}{z}, \quad y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = -z^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l \frac{\cos(z)}{z}. \quad (\text{II.63})$$

Asintoticamente (se $x \rightarrow +\infty$) abbiamo le seguenti espressioni:

$$j_l(x) \simeq \begin{cases} (-1)^{l/2} \frac{\sin(x)}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{\cos(x)}{x}, & l \text{ dispari,} \end{cases} \quad (\text{II.64})$$

$$y_l(x) = (-1)^{l+1} n_l(z) \simeq \begin{cases} (-1)^{(l+2)/2} \frac{\cos(x)}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{\sin(x)}{x}, & l \text{ dispari,} \end{cases} \quad (\text{II.65})$$

$$h_l^{(1)}(x) \simeq \begin{cases} -i(-1)^{l/2} \frac{e^{ix}}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{e^{ix}}{x}, & l \text{ dispari,} \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

$$h_l^{(2)}(x) \simeq \begin{cases} i(-1)^{l/2} \frac{e^{-ix}}{x}, & l \text{ pari,} \\ (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{e^{-ix}}{x}, & l \text{ dispari.} \end{cases} \quad (\text{II.67})$$

Sostituendo $y = \sqrt{x} Y$ nell'equazione di Bessel di ordine $\nu = l + \frac{1}{2}$ si arriva all'equazione differenziale

$$\boxed{Y'' + \frac{2}{x} Y' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) Y = 0} \quad (\text{II.68})$$

per le funzioni $j_l, y_l = (-1)^{l+1} n_l, h_l^{(1)}$ e $h_l^{(2)}$. Ponendo $Y = Z/x$ si ha inoltre

$$Z'' + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) Z = 0 \quad (\text{II.69})$$

per le funzioni $xj_l(x), xy_l(x) = (-1)^{l+1} xn_l(x), xh_l^{(1)}(x)$ e $xh_l^{(2)}(x)$.

5 Funzioni sferiche

Consideriamo adesso una classe di funzioni speciali molto importante per la fisica matematica.

5.1 Funzioni sferiche

Si dice *funzione sferica* di ordine $l = 0, 1, 2, \dots$ ogni polinomio armonico⁹ omogeneo di grado l considerato sulla sfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Dunque, tra le funzioni sferiche $Y_l(s)$, $s \in S^{n-1}$, di ordine l ed i polinomi armonici omogenei $u_l(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, stabilisce una corrispondenza biunivoca l'identità

$$Y_l(s) = u_l\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{u_l(x)}{|x|^l}, \quad s = \frac{x}{|x|}, \quad (\text{II.70})$$

dove $\Delta u_l = 0$.

Le funzioni sferiche Y_l e $Y_{l'}$, di ordini diversi sono ortogonali in $L^2(S^{n-1})$, cioè

$$(Y_l, Y_{l'}) = \int_{S^{n-1}} Y_l(\omega) Y_{l'}(\omega) d\omega = 0, \quad l \neq l'.$$

Infatti, applicando per la sfera la formula di Green (V.16) ai polinomi armonici

$$u_l(x) = |x|^l Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad u_{l'}(x) = |x|^{l'} Y_{l'}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

si ottiene per $x = r\omega$ e $r = |x|$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \Delta (|x|^l Y_l) - |x|^l Y_l \Delta (|x|^{l'} Y_{l'}) \right] dx \\ &= \int_{S^{n-1}} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \frac{\partial (|x|^l Y_l)}{\partial n} - |x|^l Y_l \frac{\partial (|x|^{l'} Y_{l'})}{\partial n} \right] d\omega \\ &= \int_{S^{n-1}} \left[Y_{l'} \frac{\partial (r^l Y_l)}{\partial r} - Y_l \frac{\partial (r^{l'} Y_{l'})}{\partial r} \right] d\omega = (l - l') \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s) d\omega, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla circonferenza S^1 ($n = 2$). In coordinate polari abbiamo

$$u_l(x) = r^l Y_l(\theta), \quad x = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

dove $\Delta u_l = 0$. Risulta l'equazione differenziale

$$Y_l''(\theta) + l^2 Y_l(\theta) = 0,$$

da cui seguono le funzioni trigonometriche

$$Y_l(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & l = 0 \\ c_1 \cos(l\theta) + c_2 \sin(l\theta), & l = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

⁹Una funzione $v = v(x_1, \dots, x_n)$ di classe C^2 si dice *armonica* se $\Delta v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = 0$.

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla sfera S^2 ($n = 3$). In coordinate sferiche abbiamo per $y_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi)$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial Y_l}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \theta^2} + l(l+1) Y_l(\theta, \varphi) = 0, \quad (\text{II.71})$$

dove $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $l = 0, 1, 2, \dots$. Cerchiamo le soluzioni della (II.71) in $C^\infty(S^2)$. Introduciamo prima $\xi = \cos \varphi$ e scriviamo (II.71) nella forma

$$\frac{1}{1-\xi^2} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1-\xi^2) \frac{\partial Y_l}{\partial \xi} \right) + l(l+1) Y_l(\theta, \xi) = 0. \quad (\text{II.72})$$

Applicando la separazione delle variabili

$$Y_l(\theta, \varphi) = \mathcal{P}(\xi) \Theta(\theta),$$

otteniamo

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1 \cos m\theta + c_2 \sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

dove abbiamo sfruttato la periodicit  della $\Theta(\theta)$: $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$. Dunque $\Theta''(\theta) = -m^2 \Theta(\theta)$. Risulta l'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi} \left((1-\xi^2) \frac{d\mathcal{P}}{d\xi} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right] \mathcal{P}(\xi) = 0. \quad (\text{II.73})$$

Quest'equazione si pu  scrivere nella forma

$$- [(1-\xi^2)\mathcal{P}]' + \frac{m^2}{1-\xi^2} \mathcal{P} = l(l+1)\mathcal{P}.$$

Le soluzioni di quest'equazione nei punti ± 1 debbono assumere valori finiti.

5.2 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre¹⁰ $P_l(\xi)$ si possono definire nei seguenti modi:

- tramite la formula generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\xi h + h^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\xi) h^l, \quad |h| < 1,$$

¹⁰Adrien-Marie Legendre [1752-1833] introdusse i polinomi di Legendre nel 1784.

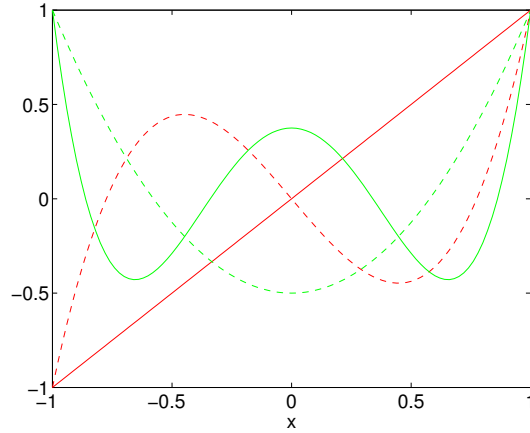


Figura II.3: I polinomi di Legendre di grado 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

2. tramite l'equazione differenziale,

$$\boxed{-[(1-x^2)P_l'(x)]' = l(l+1)P_l(x), \quad -1 < x < +1; \quad \boxed{P_l(1) = 1,}$$

3. tramite l'ortogonalità: $P_l(\xi)$ sono i polinomi in ξ di grado l con coefficiente principale positivo tali che

$$\boxed{\int_{-1}^1 P_l(\xi)P_{l'}(\xi) d\xi = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1},}$$

4. tramite la formula di Rodrigues¹¹

$$\boxed{P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^l (\xi^2 - 1)^l,}$$

5. tramite la formula di ricorrenza

$$\boxed{(2l+1)\xi P_l(\xi) = (l+1)P_{l+1}(\xi) + lP_{l-1}(\xi), \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi.}$$

Noi dimostriamo l'equivalenza tra queste definizioni.

4 \Rightarrow **2**. Consideriamo l'equazione differenziale

$$-[(1-x^2)u'(x)]' = \lambda u(x), \quad -1 < x < +1, \quad (\text{II.74})$$

¹¹Benjamin Olinde Rodrigues [1795-1851] derivò la formula di Rodrigues nel 1815.

sotto le condizioni iniziali che i limiti di $u(x)$ per $x \rightarrow \pm 1$ esistano finiti. Questo problema al contorno ha soluzioni polinomiali per $\lambda = l(l+1)$ dove $l = 0, 1, 2, \dots$. Verifichiamo se i polinomi

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.75})$$

soddisfano la (II.74) per $\lambda = l(l+1)$. Questi polinomi (di grado l) sono detti *polinomi di Legendre* e la (II.75) si dice *formula di Rodrigues*. Infatti,¹² ponendo $W_l(x) = (x^2 - 1)^l$ e derivando l'identità

$$(x^2 - 1)W_l'(x) - 2lxW_l(x) = 0$$

$l+1$ volte, si ottiene

$$(x^2 - 1)W_l^{(l+2)}(x) + 2xW_l^{(l+1)}(x) - l(l+1)W_l^{(l)}(x) = 0.$$

Dunque la funzione $W_l^{(l)}(x) = 2^l(l!)P_l(x)$ soddisfa l'equazione (II.74). Inoltre,

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \sum_{s=0}^l \binom{l}{s} \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^s (x-1)^l \right) \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{l-s} (x+1)^l \right) \\ &= \frac{1}{2^l l!} \sum_{s=0}^l \left(\frac{l!}{(l-s)!} (x-1)^{l-s} \right) \left(\frac{l!}{s!} (x+1)^s \right), \end{aligned}$$

il quale implica che $P_l(1) = 1$ e $P_l(-1) = (-1)^l$.

2 \Rightarrow **4**. Sostituendo $u(x) = P_l(x)z(x)$ e $w(x) = z'(x)$ nella (II.74) con $\lambda = l(l+1)$, otteniamo l'equazione separabile

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -2 \frac{P_l'(x)}{P_l(x)} + \frac{2x}{1-x^2},$$

implicando che

$$y(x) = c_1 P_l(x) + c_2 P_l(x) \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)P_l(t)^2}.$$

L'integrale nell'ultima espressione è divergente in $x = \pm 1$ (poichè $P_l(\pm 1)^2 = 1$). Quindi $P_l(x)$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale (II.74) con $\lambda = l(l+1)$ che soddisfa $P_l(1) = 1$. Siccome la formula di Rodrigues rappresenta una tale soluzione, si ottiene questa formula dalla proprietà 2.

¹²Vale la *formula di Leibnitz* $(fg)^{(m)} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} f^{(j)} g^{(m-j)}$. Quindi $(xf)^{(m)} = x f^{(m)} + m f^{(m-1)}$ e $((x^2-1)f)^{(m)} = (x^2-1)f^{(m)} + 2mx f^{(m-1)} + m(m-1)f^{(m-2)}$.

(2 + 4) ⇒ 3. Si dimostra facilmente che i polinomi di Legendre sono ortogonali nello spazio $L^2(-1, 1)$. Infatti, utilizzando la (II.74) si ha

$$\begin{aligned} & [l(l+1) - k(k+1)] \int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[P_l(k) [(1-x^2)P_k']' - P_k(x) [(1-x^2)P_l']' \right] dx \\ &= - \int_{-1}^1 \left[P_l'(k)(1-x^2)P_k'(x) - P_k'(x)(1-x^2)P_l'(x) \right] dx = 0, \end{aligned}$$

dopo un'integrazione per parti. Quindi $(P_l, P_k) = \int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x) dx = 0$ se $l \neq k$. Per trovare il fattore di normalizzazione, calcoliamo (P_l, P_l) tramite l integrazioni per parti consecutive. Otteniamo

$$\begin{aligned} (P_l, P_l) &= \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^1 P_l(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l \\ &= \frac{1}{2^l l!} \left\{ \left[P_l(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{l-1} (x^2 - 1)^l \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_l'(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{l-1} (x^2 - 1)^l dx \right\} \\ &= \frac{1}{2^l l!} \left\{ \sum_{k=1}^l \left[(-1)^{k-1} P_l^{(k-1)}(x) \underbrace{\left(\frac{d}{dx} \right)^{l-k} (x^2 - 1)^l}_{\text{contiene il fattore } (x^2-1)^k} \right]_{-1}^1 \right. \\ &\quad \left. + (-1)^l \int_{-1}^1 \underbrace{P_l^{(l)}(x)}_{\text{costante}} (x^2 - 1)^l dx \right\} = \frac{1}{2^l l!} P_l^{(l)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$P_l^{(l)}(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} x^{2l} = \frac{(2l)!}{2^l l!}.$$

Applicando la formula di ricorrenza $(I_{l-1}/I_l) = 1 + (1/2l)$ and $I_0 = 2$ per l'integrale $I_l = \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx$ per arrivare all'espressione $I_l = 2^{l+1} l! / (2l+1)!!$ [essendo $(2l+1)!! \stackrel{\text{def}}{=} 1.3.5 \dots (2l-1)(2l+1)$], si ottiene infine

$$(P_l, P_l) = \frac{1}{2^l l!} \frac{(2l)!}{2^l l!} \frac{2^{l+1} l}{(2l+1)!!} = \frac{2}{2l+1}. \quad (\text{II.76})$$

Quindi $\sqrt{l + \frac{1}{2}} P_l(x)$ ha norma 1 in $L^2(-1, 1)$.

(3 + 4) \Rightarrow 5. Per trovare una formula di ricorrenza per i polinomi di Legendre calcoliamo prima il prodotto scalare (P_{l+1}, xP_l) . Infatti, dopo $l + 1$ integrazioni per parti consecutive e utilizzando $(x f)^{(l+1)} = x f^{(l+1)} + (l+1) f^{(l)}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
(P_{l+1}, xP_l) &= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1} \cdot ((l+1)!(l!))} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{l+1} \times \\
&\times \left[x \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l+1} (x^2 - 1)^l + (l+1) \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l \right] dx \\
&= \frac{(-1)^{l+1}}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^{l+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l dx \\
&= \frac{1}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{l+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{2l} (x^2 - 1)^l dx \\
&= \frac{(2l)!}{2^{2l+1} \cdot (l!)^2} \frac{2^{l+2} \cdot (l+1)!}{(2l+3)(2l+1) \cdots 3 \cdot 1} = \frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}.
\end{aligned}$$

Siccome i polinomi di Legendre sono ortogonali, essi sono linearmente indipendenti. Dunque

$$(2l+1)xP_l(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(x),$$

dove $a_j = 0$ per $j > l + 1$ [poichè $xP_l(x)$ ha grado $l + 1$]. Risultano $(2l + 1)(xP_l, P_j) = (2l + 1)(P_l, xP_j) = 0$ per $l < j - 1$ [poichè $xP_j(x)$ ha grado $< l$] e $(2l + 1)(xP_l, P_l) = 0$ [poichè $xP_l(x)^2$ è una funzione dispari]. Quindi

$$(2l+1)xP_l(x) = a_{l+1}P_{l+1}(x) + a_{l-1}P_{l-1}(x).$$

Infine troviamo

$$\begin{aligned}
(2l+1)(xP_l, P_{l+1}) &= a_{l+1}(P_{l+1}, P_{l+1}) = a_{l+1}(2/(2l+3)); \\
(2l+1)(xP_l, P_{l-1}) &= a_{l-1}(P_{l-1}, P_{l-1}) = a_{l-1}(2/(2l-1)).
\end{aligned}$$

Quindi $a_{l+1} = l + 1$ e $a_{l-1} = l$. Risulta la *formula di ricorrenza*

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x), \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x. \quad (\text{II.77})$$

Per induzione matematica si dimostrano facilmente

$$\begin{aligned}
P_l(1) &= 1, & P_l(-1) &= (-1)^l, & P_l(-x) &= (-1)^l P_l(x); \\
-1 &\leq P_l(x) \leq +1, & & & -1 &\leq x \leq +1.
\end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

5 \Rightarrow **1**. Dimostriamo ora la *formula generatrice*

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l = \frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}}, \quad |h| < 1. \quad (\text{II.79})$$

Infatti, scriviamo $F(x, h)$ per la parte a sinistra della (II.79). Per $|h| < 1$ è permessa la derivazione termine a termine rispetto ad h , grazie alla (II.78). Si trovano facilmente le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)xP_l(x)h^l &= xF(x, h) + 2xh \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = xF(x, h) + 2xh \frac{\partial F}{\partial h}; \\ \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)P_{l+1}(x)h^l &= \sum_{l=1}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = \sum_{l=0}^{\infty} lP_l(x)h^{l-1} = \frac{\partial F}{\partial h}; \\ \sum_{l=1}^{\infty} lP_{l-1}(x)h^l &= h^2 \sum_{l=1}^{\infty} (l-1)P_{l-1}(x)h^{l-2} + h \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}(x)h^{l-1} \\ &= h^2 \frac{\partial F}{\partial h} + hF(x, h). \end{aligned}$$

Applicando la (II.77) si ha

$$xF(x, h) = (1-2xh+h^2) \frac{\partial F}{\partial h} + hF(x, h),$$

dove $F(x, 0) = P_0(x) = 1$. Oppure:

$$\frac{\partial F / \partial h}{F(x, h)} = \frac{x-h}{1-2xh+h^2}, \quad F(x, 0) = 1.$$

La soluzione unica di questo problema di Cauchy è la funzione $F(x, h)$ data dalla parte a destra della (II.79).

1 \Rightarrow **2**. Scrivendo $F(x, h)$ per la parte a destra nella (II.79) risulta (dopo alcuni calcoli)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -h \left(\frac{\partial}{\partial h} \right)^2 (hF(x, h)).$$

In altre parole,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)h^l \right) = - \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)P_l(x)h^l.$$

Ciò implica l'equazione differenziale. Infine, sostituendo $x = 1$ nella (II.79) si ha

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(1)h^l = \frac{1}{\sqrt{(1-h)^2}} = \frac{1}{1-h},$$

implicando $P_l(1) = 1$.

4 \Rightarrow 5. Prima di concludere la discussione dei polinomi di Legendre presentiamo un'altra derivazione della relazione di ricorrenza (II.77) e delle costanti di normalizzazione nella (II.76). Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} 2^{n+1}(n+1)! P_{n+1}(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^{n+1} \\ &= 2(n+1) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \frac{d}{dx} \{x(x^2 - 1)^n\} \\ &= 2(n+1) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \{(x^2 - 1)^n + 2nx^2(x^2 - 1)^{n-1}\} \\ &= 2(n+1) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \{(2n+1)(x^2 - 1)^n + 2n(x^2 - 1)^{n-1}\}, \end{aligned}$$

implicando che

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2 - 1)^n + \frac{2n}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2 - 1)^{n-1} \\ &= \frac{2n+1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2 - 1)^n + P_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (\text{II.80})$$

D'altra parte, utilizzando la formula di Leibnitz al terzo passaggio, si ha

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^{n+1} \\ &= \frac{2(n+1)}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x(x^2 - 1)^n\} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left(x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n + n \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2 - 1)^n \right) \\ &= xP_n(x) + \frac{1}{2^n(n-1)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2 - 1)^n. \end{aligned} \quad (\text{II.81})$$

Eliminando $\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2 - 1)^n$ dalle (II.80) e (II.81) otteniamo la **5**.

5 più ortogonalità \Rightarrow 3. Eliminando la derivata $(n-1)$ -esima dalle identità (II.80) e (II.81) arriviamo alla relazione di ricorrenza (II.77). Sostituendo

$n - 1$ al posto di n nella (II.77) abbiamo invece

$$(2n + 1)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \quad (\text{II.82})$$

dove $n = 2, 3, 4, \dots$. Per il coefficiente principale c_n di $P_n(x)$ [cioè, se $P_n(x) - c_n x^n$ ha grado $\leq n - 1$] risulta $(2n + 1)c_n = (n + 1)c_{n+1}$. Prendendo il prodotto scalare nella prima uguaglianza (II.77) e utilizzando l'ortogonalità e la seconda uguaglianza (II.82) otteniamo

$$\begin{aligned} n(P_{n-1}, P_{n-1}) &= (2n + 1)(xP_n, P_{n-1}) = (2n + 1)(xP_{n-1}, P_n) \\ &= (2n + 1)\frac{c_{n-1}}{c_n}(P_n, P_n) = (2n + 1)\frac{n}{2n - 1}(P_n, P_n). \end{aligned}$$

Siccome $(P_0, P_0) = 2$, otteniamo infine la (II.76).

5.3 Funzioni di Legendre associate

Sostituiamo $\mathcal{P}(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2}z(\xi)$ nella (II.73). Risulta

$$\boxed{(1 - \xi^2)z''(\xi) - 2(m + 1)\xi z'(\xi) + (l - m)(l + m + 1)z(\xi) = 0.} \quad (\text{II.83})$$

Moltiplicando la (II.83) per $(1 - \xi^2)^m$, otteniamo per $\mathcal{P} = \mathcal{P}_l$

$$[(1 - \xi^2)^{m+1}\mathcal{P}'_l]' = -(l - m)(l + m + 1)(1 - \xi^2)^m\mathcal{P}_l. \quad (\text{II.84})$$

Per $m = 0$ risulta l'equazione differenziale per il polinomio di Legendre di grado l :

$$(1 - \xi^2)P_l''(\xi) - 2\xi P_l'(\xi) + l(l + 1)P_l(\xi) = 0.$$

Calcolando la derivata m -esima $z = P_l^{(m)}$ di quest'equazione otteniamo

$$(1 - \xi^2)z''(\xi) - 2(m + 1)z'(\xi) + (l - m)(l + m + 1)z(\xi) = 0.$$

Quindi le funzioni $(d/d\xi)^m P_l(\xi)$ sono soluzioni della (II.83). Moltiplicando la (II.84) per $P_{l'}(\xi)$ e la (II.84) con l' invece di l per $P_l(\xi)$ e sottraendo, otteniamo

$$\begin{aligned} [(l - l')(l + l' + 1)](1 - \xi^2)^m\mathcal{P}_l(\xi)\mathcal{P}_{l'}(\xi) &= \mathcal{P}_l(\xi) [(1 - \xi^2)^{m+1}\mathcal{P}'_{l'}]' \\ &\quad - \mathcal{P}_{l'}(\xi) [(1 - \xi^2)^{m+1}\mathcal{P}'_l]'. \end{aligned}$$

Integrando quest'equazione tra -1 e $+1$ e applicando l'integrazione per parti risulta

$$[(l - l')(l + l' + 1)] \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^m \mathcal{P}_l(\xi)\mathcal{P}_{l'}(\xi) d\xi = 0.$$

Quindi, se $P_l(\xi)$ sono i polinomi di Legendre, i polinomi $(d/d\xi)^m P_{l+m}(\xi)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) costituiscono un sistema di polinomi ortogonali (di grado l) rispetto al peso $w(\xi) = (1 - \xi^2)^m$.

Troviamo ora la costante di normalizzazione. Si ha

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) P_{l'}^{(m)}(\xi) d\xi \\
 &= \left[(1 - \xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) P_{l'}^{(m-1)}(\xi) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_{l'}^{(m-1)}(\xi) \left[(1 - \xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) \right]' d\xi \\
 &= (l - m - 1)(l + m) \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{m-1} P_l^{(m-1)}(\xi) P_{l'}^{(m-1)}(\xi) d\xi \\
 &= (l + m)(l - m + 1)(l + m - 1)(l - m + 2) \times \\
 &\times \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{m-2} P_l^{(m-2)}(\xi) P_{l'}^{(m-2)}(\xi) d\xi \\
 &= \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \int_{-1}^1 P_l(\xi) P_{l'}(\xi) d\xi = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \delta_{l,l'}.
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\left(\frac{2(l + m) + 1}{2} \frac{l!}{(l + 2m)!} \right)^{1/2} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^m P_{l+m}(\xi), \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

è il sistema ortonormale dei polinomi rispetto al peso $(1 - \xi^2)^m$ [con coefficiente di ξ^l positivo].

5.4 Le funzioni sferiche per $n = 3$: Completezza

Nella letteratura ci sono diverse normalizzazioni delle funzioni sferiche in \mathbb{R}^3 . Qui ne scegliamo una. Poniamo

$$Y_l^m(\varphi, \theta) = \begin{cases} P_l^m(\cos \varphi) (\sin \varphi)^m \cos(m\theta), & m = 0, 1, \dots, l; \\ P_l^{|m|}(\cos \varphi) (\sin \varphi)^{|m|} \sin(|m|\theta), & m = -1, -2, \dots, -l, \end{cases}$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$. Le funzioni sferiche Y_l^m ($m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$) di ordine l sono linearmente indipendenti e le loro combinazioni lineari

$$Y_l(\omega) = \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(\omega)$$

a coefficienti arbitrari $a_l^{(m)}$ sono anch'esse funzioni sferiche di ordine l .

Le funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ formano un sistema ortogonale e completo in $L^2(S^2)$, ed inoltre

$$\|Y_l^m\|_{L^2(S^2)}^2 = 2\pi \frac{1 + \delta_{0,m}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \|Y_l^m\|^2 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 d\theta d\varphi \\ &= \int_{-1}^1 P_l^{|m|}(\xi)^2 (1-\xi^2)^m d\xi \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 m\theta \\ \sin^2 m\theta \end{array} \right\} d\theta = 2\pi \frac{1 + \delta_{0,m}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}. \end{aligned}$$

La completezza di un sistema ortogonale di funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ significa che ogni funzione f appartenente a $L^2(S^2)$ può essere sviluppata in serie di Fourier di queste funzioni:

$$f(\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_l^{(m)} Y_l^m(\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l(\omega),$$

convergente in $L^2(S^2)$. I coefficienti $a_l^{(m)}$ sono calcolati mediante la formula

$$a_l^{(m)} = \frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0,m})} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

Le funzioni sferiche Y_l^m , $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$, sono le autofunzioni del cosiddetto *operatore di Beltrami*,

$$L_B \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

che corrisponde all'autovalore $\lambda = l(l+1)$ di molteplicità $2l+1$.

6 Polinomi di Hermite

Studiamo ora l'equazione

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2)u = 0, \quad (\text{II.85})$$

dove u , z e ν non hanno più lo stesso significato come prima. Sostituendo

$$u = e^{-z^2/2} v, \quad (\text{II.86})$$

risulta l'equazione

$$v'' - 2zv' + 2\nu v = 0. \quad (\text{II.87})$$

Per $\nu = 0, 1, 2, \dots$ la (II.87) si dice *equazione differenziale di Hermite*.¹³ Le soluzioni della (II.85) si dicono funzioni parabolico-cilindriche.

Sostituendo $v(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$ nella (II.87) si trova la seguente espressione per il coefficiente di z^l :

$$(l+2)(l+1)c_{l+2} + 2(\nu-l)c_l = 0. \quad (\text{II.88})$$

La (II.88) è una relazione di ricorrenza che ci consente a calcolare tutti i coefficienti c_l dai coefficienti $c_0 = v(0)$ e $c_1 = v'(0)$. Si vede facilmente che esistono soluzioni polinomiali se e solo se $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$. Tali soluzioni hanno la proprietà $v(-z) = (-1)^n v(z)$ e hanno il grado n (cioè, $c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \dots = 0$).

Definiamo ora

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \left(\frac{d}{dz} \right)^n \{e^{-z^2}\}. \quad (\text{II.89})$$

Allora $H_n(z)$ è un polinomio di grado n , ha il coefficiente principale positivo e soddisfa $H_n(-z) = (-1)^n H_n(z)$. Derivando l'equazione $w' + 2zw = 0$ (che ha la soluzione $w(z) \sim e^{-z^2}$) $n+1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ risulta

$$u'' + 2zu' + 2(n+1)u = 0.$$

Poi si sostituisca $u = e^{-z^2} v$. Infine risulta l'equazione (II.87) per $\nu = n$:

$$v'' - 2zv' + 2nv = 0. \quad (\text{II.90})$$

In altre parole, il polinomio di Hermite $H_n(z)$ soddisfa l'equazione differenziale di Hermite (II.90). La (II.89) si dice formula di Rodrigues.

Scriviamo ora la (II.87) nella forma

$$(e^{-z^2} v')' = -2n e^{-z^2} v.$$

Allora

$$2(n-m)H_n(z)H_m(z)e^{-z^2} = (e^{-z^2} H'_m)' H_n(z) - (e^{-z^2} H'_n)' H_m(z).$$

¹³Charles Hermite [1822-1901] studiò i polinomi di Hermite, già introdotti da Laplace (1810) e da Chebyshev (1859), nel 1864. Nel 1873 lui dimostrò la trascendenza di e .

Calcolando l'integrale rispetto a z si ottiene

$$2(n-m) \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z) e^{-z^2} dz = \left[e^{-z^2} (H'_m(z) H_n(z) - H'_n(z) H_m(z)) \right]_{z=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-z^2} H'_m(z) H'_n(z) - e^{-z^2} H'_n(z) H'_m(z) \right) dz = 0.$$

Quindi i polinomi di Hermite formano un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}; e^{-z^2} dz)$. Per calcolare la costante di normalizzazione si applichi la formula di Rodrigues (II.89) e n integrazioni per parti, risultando nella seguente successione di passaggi:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(z)^2 e^{-z^2} dz &= \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j+1} \left[H_n^{(j-1)}(z) \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-j} \{e^{-z^2}\} \right]_{z=-\infty}^{\infty} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{d}{dz} \right)^n H_n(z) \right) e^{-z^2} dz \\ &= \underbrace{\left[p(z) e^{-z^2} \right]_{z=-\infty}^{\infty}}_{=0} + c_n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = c_n n! \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

dove $p(z)$ è un polinomio e c_n è il coefficiente principale di $H_n(z)$ (cioè, $H_n(z) = c_n z^n + \dots$). Calcoliamo ora i coefficienti c_n . Derivando la formula di Rodrigues (II.89) si arriva all'identità

$$\boxed{H'_n(z) = 2z H_n(z) - H_{n+1}(z)}. \quad (\text{II.91})$$

Confrontando i coefficienti di z^{n+1} nella (II.91) otteniamo $0 = 2c_n - c_{n+1}$, mentre $c_0 = 1$. Quindi $c_n = 2^n$. Infine si arriva alla seguente formula di ortogonalità:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z) e^{-z^2} dz = 2^n (n!) \sqrt{\pi} \delta_{n,m}}, \quad (\text{II.92})$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

Derivando la (II.90) rispetto a z e scrivendo il risultato come un'equazione differenziale per v' si ottiene

$$(v')'' - 2z(v')' + 2(n-1)(v') = 0.$$

Dunque $H'_n(z)$ e $H_{n-1}(z)$ sono soluzioni della stessa equazione differenziale che ha soltanto una singola soluzione polinomiale linearmente indipendente. Di conseguenza, $H'_n(z) = \text{cost.} H_{n-1}(z)$. Siccome $H_n(z) = 2^n z^n + \dots$ e $H_{n-1}(z) = 2^{n-1} z^{n-1} + \dots$, risulta $n 2^n = \text{cost.} 2^{n-1}$ e quindi $\text{cost.} = 2n$. In altre parole,

$$\boxed{H'_n(z) = 2n H_{n-1}(z)}. \quad (\text{II.93})$$

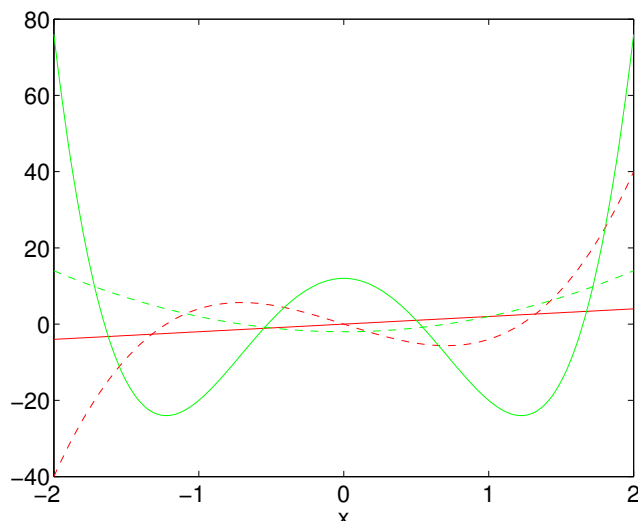


Figura II.4: I polinomi di Hermite di grado 1, 2, 3 e 4. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

Dalle equazioni (II.91) e (II.93) arriviamo alla formula di ricorrenza

$$\boxed{2zH_n(z) = H_{n+1}(z) + 2nH_{n-1}(z)}, \quad (\text{II.94})$$

dove $H_0(z) = 1$ e $H_1(z) = 2z$.

Dimostriamo ora la formula generatrice

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (\text{II.95})$$

Infatti, ponendo $F(z, t) = e^{2zt-t^2}$ e scrivendo

$$F(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(z)}{n!} t^n \quad (\text{II.96})$$

per opportuni coefficienti $h_n(z)$, risultano

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= 2tF(z, t), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h'_n(z)}{n!} t^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h_{n-1}(z)}{(n-1)!} t^n. \end{aligned}$$

Quindi $h_n(z)$ è un polinomio in z di grado n e

$$h'_n(z) = 2nh_{n-1}(z). \quad (\text{II.97})$$

Dalla (II.96) risulta che $h_n(0)$ coincide con la derivata n -esima di e^{-t^2} per $t = 0$, cioè con 0 se n è dispari, e con $(-1)^{n/2}(n!)/(n/2)!$ se n è pari. Dalla formula di Rodrigues (II.89) si vede facilmente che $H_n(0) = h_n(0)$ per $n = 0, 1, 2, \dots$. Utilizzando le espressioni (II.93) e (II.97) arriviamo alla identità $H_n(z) = h_n(z)$ e quindi alla formula generatrice (II.95).

7 Polinomi di Laguerre

I *polinomi di Laguerre*¹⁴ si definiscono tramite la seguente formula di Rodrigues:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \{x^{n+\alpha}e^{-x}\}. \quad (\text{II.98})$$

Si dimostra facilmente che la (II.98) rappresenta un polinomio di grado n per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La regola di Leibnitz ci dà subito la rappresentazione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n(x^n/n!) + \dots$. Ci limitiamo al caso $\alpha > -1$.

La funzione $w(x) = x^{n+\alpha}e^{-x}$ soddisfa l'equazione differenziale

$$xw' + (x - n - \alpha)w = 0. \quad (\text{II.99})$$

Derivando la (II.99) $n + 1$ volte e ponendo $u = w^{(n)}$ si arriva all'equazione differenziale

$$xu'' + (x + 1 - \alpha)u' + (n + 1)u = 0.$$

Sostituendo $u = x^\alpha e^{-x}v$ in quest'ultima equazione si ottiene la seguente *equazione differenziale di Laguerre*:

$$xv'' + (\alpha + 1 - x)v' + \nu v = 0. \quad (\text{II.100})$$

Di conseguenza, $L_n^{(\alpha)}(x)$ è una soluzione dell'equazione (II.100).

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$xv'' + (\alpha + 1 - x)v' + \nu v = 0. \quad (\text{II.101})$$

Sostituendo $v(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l$ si trova la seguente espressione per il coefficiente di x^l :

$$(l + 1)(l + \alpha + 1)c_{l+1} + (\nu - l)c_l = 0.$$

Quindi abbiamo trovato la formula di ricorrenza

$$\frac{c_{l+1}}{c_l} = \frac{l - \nu}{(l + 1)(l + \alpha + 1)}, \quad (\text{II.102})$$

¹⁴Edmond Laguerre [1834-1886]

che ci consente a calcolare tutti i coefficienti c_l dal coefficiente iniziale $c_0 = v(0)$; bisogna richiedere $\alpha > -1$ per garantire la positività del denominatore nella parte a destra della (II.102). Risulta una soluzione polinomiale di grado $n = 0, 1, 2, \dots$ se e solo se $\nu = n$.

Scrivendo la (II.100) nella forma

$$(x^{\alpha+1}e^{-x}v')' + nx^\alpha e^{-x}v = 0, \quad (\text{II.103})$$

otteniamo

$$(n-m)x^\alpha e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) \left(x^{\alpha+1}e^{-x}L_m^{(\alpha)'} \right)' - L_m^{(\alpha)}(x) \left(x^{\alpha+1}e^{-x}L_n^{(\alpha)'} \right)'$$

Calcolando l'integrale sull'intervallo $(0, \infty)$ [dove l'ipotesi $\alpha > -1$ serve per la convergenza dell'integrale] si ottiene

$$\begin{aligned} & (n-m) \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \left[L_n^{(\alpha)}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}L_m^{(\alpha)'}(x) - L_m^{(\alpha)}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}L_n^{(\alpha)'}(x) \right]_{x=0}^\infty \\ & - \int_0^\infty \left\{ L_n^{(\alpha)'}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}L_m^{(\alpha)'}(x) - L_m^{(\alpha)'}(x)x^{\alpha+1}e^{-x}L_n^{(\alpha)'}(x) \right\} dx = 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $x^{\alpha+1} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$. Quindi per $\alpha > -1$ i polinomi di Laguerre $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^\infty$ costituiscono un sistema ortogonale nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x} dx)$.

Per calcolare la costante di normalizzazione facciamo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)^2 x^\alpha e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^n \{x^{n+\alpha}e^{-x}\} dx \\ &= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-j} \{x^{n+\alpha}e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\ &+ \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^n L_n^{(\alpha)}(x) \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\ &= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\ &+ \frac{(-1)^n}{n!} \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^n L_n^{(\alpha)}(x) \right) \int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, \end{aligned}$$

dove abbiamo fatto n integrazioni per parti, utilizzato la (II.98) con $\alpha + j$ al posto di α , applicato l'espressione $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n(x^n/n!) + \dots$ e l'identità

(A.1). In altre parole,

$$\boxed{\int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \delta_{n,m}}, \quad (\text{II.104})$$

dove $\delta_{n,m}$ è la delta di Kronecker.

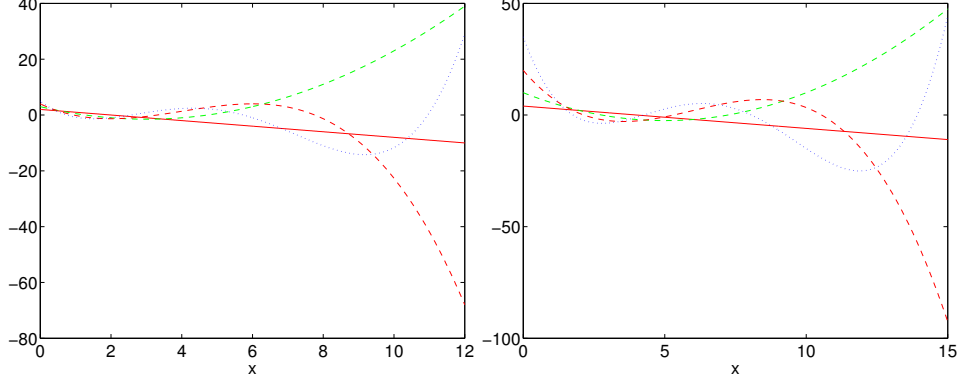


Figura II.5: I polinomi di Laguerre di grado 1, 2, 3 e 4 per $\alpha = 1$ (panello sinistro) e $\alpha = 3$ (panello destro). Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

Derivando la (II.100) si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$x(v'') + (\alpha + 2 - x)(v') + (n - 1)(v) = 0.$$

Quindi $L_n^{(\alpha)'}(x)$ è proporzionale a $L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$. Siccome

$$L_n^{(\alpha)'}(x) = \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots, \quad L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots,$$

risulta per $\alpha > -1$

$$L_n^{(\alpha)'}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \quad (\text{II.105})$$

L'ortogonalità di $L_n^{(\alpha)}(x)$ a tutti i polinomi di grado minore di n nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+; x^\alpha e^{-x} dx)$ conduce all'identità

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = A_n^{(\alpha)} L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + B_n^{(\alpha)} L_n^{(\alpha)}(x) + C_n^{(\alpha)} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (\text{II.106})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$ e A_n, B_n e C_n sono opportune costanti da determinare. Calcoliamo ora il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\} dx \\
&= \left[\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1-j} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+1+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (n+1-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n+1-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) \int_0^\infty x^{n+1+\alpha} e^{-x} dx \\
&= -\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $x L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^{n+1}/n!) + \dots$. Poi calcoliamo l'integrale:

$$\begin{aligned}
D_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x)^2 x^\alpha e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (-1)^{n-j} (n-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^n \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty ((n+1)!x - n(n+\alpha)n!) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \frac{(n+1)\Gamma(n+\alpha+2) - n(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \\
&= \frac{(2n+1+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $xL_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n((x^{n+1} - n(n+\alpha)x^n)/n!) + \dots$. Dalla (II.106) e le espressioni per $C_n^{(\alpha)}$ e $D_n^{(\alpha)}$ seguono $A_n^{(\alpha)} = -(n+1)$, $B_n^{(\alpha)} = 2n+1+\alpha$ e $C_n^{(\alpha)} = -(n+\alpha)$. Dunque risulta la formula di ricorrenza

$$\boxed{(2n+1+\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}, \quad (\text{II.107})$$

dove $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x$.

Per dimostrare la validità della formula generatrice

$$(1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n, \quad |t| < 1, \quad (\text{II.108})$$

partiamo dalla serie di funzioni

$$F(x, t) = (1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)t^n, \quad |t| < 1, \quad (\text{II.109})$$

dove $c_n(x)n!$ è la derivata parziale n -esima di $F(x, t)$ rispetto a t per $t = 0$. Sostituendo la serie (II.109) nella equazione

$$(1-t)^2 \frac{\partial F}{\partial t} + [x - (1+\alpha)(1-t)] F = 0,$$

otteniamo le seguenti espressioni per i coefficienti t^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) e per il coefficiente di t^0 :

$$\begin{cases} (n+1)c_{n+1}(x) + (x-2n-\alpha-1)c_n(x) + (n+\alpha)c_{n-1}(x), \\ c_1(x) + (x-\alpha-1)c_0(x) = 0, \end{cases}$$

dove $c_0(x) = 1$. Quindi $c_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ (vedi la (II.107)).

Infine, per esprimere i polinomi di Hermite in quelli di Laguerre riscriviamo i prodotti scalari tra quest'ultimi utilizzando la trasformazione $x = t^2$:

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x} dx = \int_{-\infty}^\infty L_n^{(\alpha)}(t^2)L_m^{(\alpha)}(t^2)|t|^{2\alpha+1}e^{-t^2} dt, \quad (\text{II.110})$$

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x} dx = \int_{-\infty}^\infty tL_n^{(\alpha)}(t^2)tL_m^{(\alpha)}(t^2)|t|^{2\alpha-1}e^{-t^2} dt. \quad (\text{II.111})$$

Per fare scomparire i fattori $|t|^{2\alpha\pm 1}$ in (II.110) e (II.111) scegliamo $\alpha = -\frac{1}{2}$ in (II.110) e $\alpha = \frac{1}{2}$ in (II.111). Quindi $H_{2n}(t)$ è proporzionale a $L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2)$ e $H_{2n+1}(t)$ è proporzionale a $tL_n^{(\frac{1}{2})}(t^2)$. Confrontando i coefficienti principali otteniamo

$$H_{2n}(t) = 2^{2n} n! (-1)^n L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2), \quad (\text{II.112})$$

$$H_{2n+1}(t) = 2^{2n+1} n! (-1)^n t L_n^{(\frac{1}{2})}(t^2). \quad (\text{II.113})$$

8 Polinomi di Chebyshev

I polinomi di Chebyshev¹⁵ di prima specie $T_n(x)$ e quelli di seconda specie $U_n(x)$ si definiscono nel seguente modo:¹⁶

$$\boxed{T_n(x) = \cos(nt)}, \quad \boxed{U_n(x) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t}}, \quad (\text{II.114})$$

where $x = \cos(t)$. In tal caso $T_n(x)$ e $U_n(x)$ sono polinomi di x di grado n che hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x), \\ U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, & U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= 2xU_n(x). \end{aligned}$$

La formula di ricorrenza è facile da verificare:¹⁷

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) \\ &= 2 \cos(t) \cos(nt) = 2xT_n(x), \\ U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+2)t)}{\sin(t)} + \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \\ &= \frac{2 \cos(t) \sin((n+1)t)}{\sin(t)} = 2xU_n(x). \end{aligned}$$

Si vede subito che $-1 \leq T_n(x) \leq +1$ per $x \in [-1, 1]$, mentre $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$ e $U_n(x) = 2^n x^n + \dots$ per $n \in \mathbb{N}$.

¹⁵Pafnuty Lvovich Chebyshev [1821-1894] introdusse i polinomi di Chebyshev nel 1854.

¹⁶Per $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ si hanno le definizioni alternative $T_n(x) = \cosh(nt)$ e $U_n(x) = \sinh((n+1)t)/\sinh t$ per $x = \cosh t$.

¹⁷Le formule di ricorrenza seguono anche dalle definizioni alternative $T_n(x) = \cosh(nt)$ e $U_n(x) = \frac{\sinh((n+1)t)}{\sinh(t)}$ per $x = \pm \cosh(t)$. Tale definizioni valgono per $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ ma conducono agli stessi polinomi.

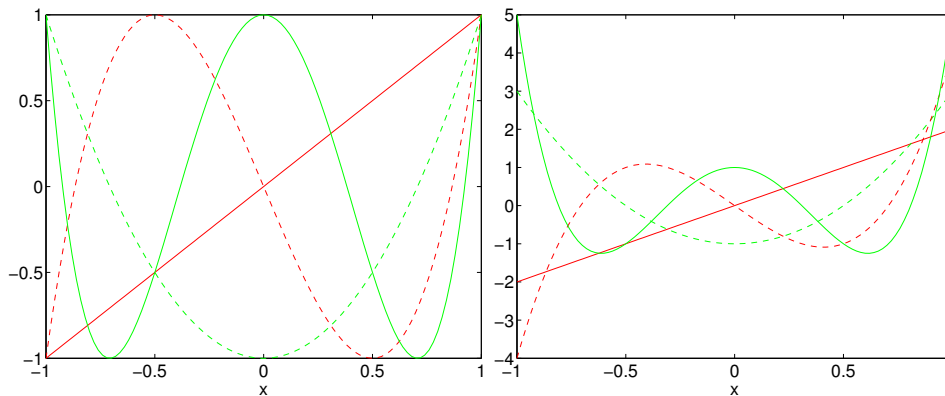


Figura II.6: I polinomi di Chebyshev di prima e seconda specie di grado 1, 2, 3 e 4. Nel pannello sinistro si trovano i grafici dei polinomi di Chebyshev di prima specie e nel pannello destro quelli di seconda specie. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio. Inoltre, i polinomi di Chebyshev di prima specie hanno ± 1 come i loro valori estremi.

Sono verificate le relazioni di ortogonalità

$$\int_0^\pi \cos(nt) \cos(mt) dt = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,m},$$

$$\int_0^\pi \sin((n+1)t) \sin(m+1)t dt = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}.$$

Sostituendo $x = \cos(t)$ otteniamo

$$\boxed{\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,m},} \quad (\text{II.115})$$

$$\boxed{\int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}.} \quad (\text{II.116})$$

Quindi $\{T_n(x)\}_{n=0}^\infty$ sono i polinomi ortogonali su $[-1, 1]$ con peso $(1-x^2)^{-1/2}$ e $\{U_n(x)\}_{n=0}^\infty$ sono i polinomi ortogonali su $[-1, 1]$ con peso $(1-x^2)^{1/2}$, tranne per fattori costanti.

Le funzioni $\cos(nt)$ e $\sin(nt)$ soddisfano all'equazione differenziale $u''(t) + n^2 u(t) = 0$. Sostituendo $x = \cos(t)$ e utilizzando le definizioni per $T_n(x)$ e $U_n(x)$ otteniamo

$$\boxed{\begin{cases} (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0, \\ (1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n^2U_n(x) = 0. \end{cases}}$$

In forma Sturm-Liouville abbiamo

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d}{dx} ((1-x^2)^{1/2} T'_n(x)) = -n^2 \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{d}{dx} ((1-x^2)^{3/2} U'_n(x)) = -n^2 \sqrt{1-x^2} U_n(x). \end{cases}}$$

9 Polinomi Ortogonali Generali

Sia I un intervallo della retta reale e w una funzione positiva quasi ovunque su I tale che $\int_I |x|^{2n} w(x) dx < \infty$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Allora i polinomi sono tutti elementi dello spazio di Hilbert $L^2(I; w dx)$. Infatti, i polinomi costituiscono un sottospazio lineare denso in $L^2(I; w dx)$, un fatto che non dimostriamo.¹⁸ Applicando il processo di Gram-Schmidt al sistema $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ dove $\psi_n(x) = x^n$, si ottengono i polinomi ortogonali $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ rispetto al peso w , dove il grado di p_n è uguale ad n e i coefficienti principali sono tutti positivi. Data una funzione $f \in L^2(I; w dx)$ e definendo i coefficienti

$$c_n = \int_I f(x) p_n(x) w(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

otteniamo l'identità di Parseval

$$\int_I |f(x)|^2 w(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$$

e lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x)$$

convergente nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_I \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n p_n(x) \right|^2 w(x) dx = 0.$$

I polinomi ortogonali sono stati studiati nel libro di Szegő [19]. Alcune classi di polinomi ortogonali hanno la proprietà aggiuntiva che appaiono come le autofunzioni di un problema di Sturm-Liouville su un opportuno intervallo

¹⁸Al posto della misura "assolutamente continua" $w(x)dx$ si può anche prendere una misura discreta oppure una misura in parte assolutamente continua e in parte discreta. Non si può prendere una misura discreta μ che consiste nel mettere pesi positivi in un numero finito n di punti, poichè in tal caso lo spazio $L^2(I; d\mu)$ sarebbe n -dimensionale.

I della retta reale. Ce l'abbiamo già visto per quanto riguardano i polinomi di Legendre, i polinomi associati di Legendre, e quelli di Hermite, Laguerre e Chebyshev. A quelli si aggiungono i polinomi di Gegenbauer (anche detti polinomi ultrasferici¹⁹) e i polinomi di Jacobi.

Nome dei polinomi	I	$w(x)$
Legendre	$(-1, 1)$	1
Chebyshev di 1 ^a specie	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Chebyshev di 2 ^a specie	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^{1/2}$
Legendre associati	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^m$ per $m = 1, 2, 3, \dots$
Jacobi	$(-1, 1)$	$(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ per $\alpha, \beta > -1$
Gegenbauer o ultrasferici	$(-1, 1)$	$(1 - x^2)^\lambda$ per $\lambda > -1$
Laguerre	$(0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x}$ per $\alpha > -1$
Hermite	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}

Dimostriamo ora alcune proprietà degli zeri dei polinomi ortogonali.

Lemma II.1 *Si ha $(f, p_n)_{L^2(I; w dx)} = 0$ per ciascun polinomio f di grado $< n$.*

Dimostrazione. Sia f un polinomio di grado $< n$. Allora f è una combinazione lineare dei polinomi p_0, p_1, \dots, p_{n-1} . Siccome $(p_j, p_n) = 0$ in $L^2(I; w dx)$ per $j = 0, 1, \dots, n-1$, risulta $(f, p_n) = 0$. \square

Teorema II.2 *Gli zeri del polinomio p_n sono tutti semplici e contenuti all'interno dell'intervallo I .*

Dimostrazione. Sia $I = (a, b)$ dove $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supponiamo che p_n ha m (con $m < n$) zeri $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ in (a, b) e $n - m$ zeri in $\mathbb{C} \setminus (a, b)$. Allora p_n ammette la rappresentazione

$$p_n(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)q(x),$$

dove q è un polinomio di grado $n - m$ che non cambia segno in (a, b) ; dunque $q(x) \geq 0$ per $x \in (a, b)$. Consideriamo il polinomio f definito da

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m).$$

Secondo il Lemma II.1 risulta $(f, p_n) = 0$. In particolare,

$$0 = (f, p_n) = c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) w(x) dx,$$

¹⁹I polinomi ortogonali su $I = (-1, 1)$ con $w(x) = (1 - x^2)^\lambda$ per cui $2\lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, appaiono come funzioni sferiche di dimensione $\geq 2\lambda + 3$.

dove la funzione sotto il segno dell'integrale è non negativa. Ciò implica che $c \int_I [(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_m)]^2 q(x) w(x) = 0$ quasi ovunque. Contraddizione. Si conclude pertanto che tutti gli zeri di p_n appartengono ad (a, b) .

Per escludere l'esistenza di zeri multipli di p_n , rappresentiamo p_n come

$$p_n(x) = c(x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_r)^{m_r},$$

dove β_1, \dots, β_r sono gli zeri distinti di p_n e $m_1 + \cdots + m_r = n$. Bisogna dimostrare che $r = n$, $m_1 = \cdots = m_n = 1$ e $c > 0$. Se esiste un indice j con $m_j > 1$, definiamo $n_j = 0$ se m_j è pari e $n_j = 1$ se m_j è dispari (cioè, se $m_j = 3, 5, 7, \dots$). Poi consideriamo il polinomio g definito da

$$g(x) = (x - \beta_1)^{m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{m_{j-1}} (x - \beta_j)^{n_j} (x - \beta_{j+1})^{m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{m_r}.$$

Siccome il grado di g è strettamente minore di n , si ha $(g, p_n) = 0$. In altre parole l'integrale

$$c \int_I \underbrace{(x - \beta_1)^{2m_1} \cdots (x - \beta_{j-1})^{2m_{j-1}} (x - \beta_j)^{m_j + n_j} (x - \beta_{j+1})^{2m_{j+1}} \cdots (x - \beta_r)^{2m_r}}_{\text{espressione non negativa, poichè } m_j + n_j \text{ è pari}} dx$$

vale zero. Quindi la funzione sotto il segno dell'integrale si annulla quasi ovunque. Contraddizione. Quindi tutti gli n zeri di p_n sono semplici. \square

I polinomi ortogonali soddisfano una relazione di ricorrenza a tre termini.

Teorema II.3 Sia $\alpha_n = (xp_{n+1}, p_n)$, $c_n = (xp_n, p_n)$ e $\alpha_{-1} = 0$. Allora

$$(x - c_n)p_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Inoltre, se $I = (-h, h)$ e w è pari, allora $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$ e $c_n = 0$.

Dimostrazione. Siccome $xp_n(x)$ è un polinomio di grado $n + 1$, è una combinazione lineare di $p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$. Purtroppo

$$(xp_n, p_j) = \int_I p_n(x) \cdot xp_j(x) w(x) dx = 0, \quad j < n - 1,$$

poichè $xp_j(x)$ con $j < n - 1$ è un polinomio di grado $< n$. Quindi $xp_n(x)$ è una combinazione lineare di soltanto tre polinomi ortogonali: p_{n-1}, p_n, p_{n+1} . Scriviamo

$$xp_n(x) = c_n p_n(x) + \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_{n-1}(x),$$

dove non c'è il terzo termine nella parte a destra per $n = 0$. Si vede facilmente che

$$\begin{cases} \alpha_n = (xp_n, p_{n+1}) \\ \beta_n = (xp_n, p_{n-1}) = (xp_{n-1}, p_n) = \alpha_{n-1} \\ c_n = (xp_n, p_n). \end{cases}$$

In generale, se $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ sono i polinomi ortogonali rispetto al peso w su I , allora $\{(-1)^j p_j(-x)\}_{j=0}^{\infty}$ sono i polinomi ortogonali rispetto al peso $w(-x)$ su $-I$. Assumiamo ora che $I = (-h, h)$ (potenzialmente con $h = +\infty$) e w sia pari. Allora $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$ e dunque

$$c_n = \int_I \underbrace{x p_n(x)^2}_{\text{dispari}} \underbrace{w(x)}_{\text{pari}} dx = 0,$$

il che conclude la dimostrazione. \square

Il Teorema II.3 si può scrivere nella forma matriciale

$$T_m \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{m-2}(x) \\ p_{m-1}(x) \end{pmatrix} - \alpha_{m-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ p_m(x) \end{pmatrix},$$

dove T_m è la matrice tridiagonale simmetrica

$$T_m = \begin{pmatrix} c_0 & \alpha_0 & & & & & \\ \alpha_0 & c_1 & \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_1 & c_1 & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \alpha_{m-3} & c_{m-2} & \alpha_{m-2} \\ & & & & & & \alpha_{m-2} & c_{m-1} \end{pmatrix}.$$

In altre parole, se x è uno degli m zeri (reali e semplici) del polinomio $p_m(x)$, allora x è autovalore della matrice tridiagonale T_m e vice versa. Quindi gli autovalori di tale matrice coincidono con gli zeri del polinomio $p_m(x)$. Il corrispondente autovettore è il vettore colonna con elementi $p_0(x), \dots, p_{m-1}(x)$, dove il primo elemento $p_0(x)$ è una costante positiva. Si osservi che gli zeri di un polinomio ortogonale si calcolano numericamente più facilmente come gli autovalori della matrice tridiagonale composta dai coefficienti della corrispondente relazione di ricorrenza invece di utilizzare il metodo di Newton-Raphson.

Introduciamo ora la funzione bivariata

$$K_n(x, y) = \sum_{j=0}^n p_j(x)p_j(y). \quad (\text{II.117})$$

Lemma II.4 *Vale la formula di Christoffel-Darboux*

$$K_n(x, y) = \alpha_n \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}, \quad (\text{II.118})$$

dove $\alpha_n = (xp_n, p_{n+1})$. Inoltre,

$$K_n(x, x) = \alpha_n (p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)). \quad (\text{II.119})$$

Dimostrazione. Il Teorema II.3 e la (II.117) implicano che

$$\begin{aligned} (x - y)K_n(x, y) &= \sum_{j=0}^n (\alpha_j p_{j+1}(x) + \alpha_{j-1} p_{j-1}(x) + c_j p_j(x)) p_j(y) \\ &\quad - \sum_{j=0}^n p_j(x) (\alpha_j p_{j+1}(y) + \alpha_{j-1} p_{j-1}(y) + c_j p_j(y)) \\ &= \sum_{j=0}^n (\alpha_j p_{j+1}(x) p_j(y) - \alpha_{j-1} p_{j-1}(y) p_j(x)) \\ &\quad + \sum_{j=0}^n (\alpha_{j-1} p_{j-1}(x) p_j(y) - \alpha_j p_{j+1}(y) p_j(x)) \\ &\quad + \underbrace{\sum_{j=0}^n (c_j p_j(x) p_j(y) - c_j p_j(y) p_j(x))}_{=0} \\ &= \alpha_n (p_{n+1}(x) p_n(y) - p_n(x) p_{n+1}(y)). \end{aligned}$$

La (II.119) ne segue utilizzando il Teorema di De L'Hôpital. \square

Il Lemma II.4 conduce alla seguente proprietà degli zeri dei polinomi ortogonali.

Teorema II.5 *Tra ogni coppia di zeri consecutivi del polinomio $p_{n+1}(x)$ cade esattamente uno zero del polinomio $p_n(x)$. In particolare, i polinomi $p_n(x)$ e $p_{n+1}(x)$ non hanno zeri in comune.*

Dimostrazione. Ci ricordiamo che gli zeri dei polinomi $p_n(x)$ e $p_{n+1}(x)$ sono tutti reali e semplici. Siano ora $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1}$ gli zeri del polinomio $p_{n+1}(x)$. Allora la (II.117) e (II.119) implicano che per $k = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{j=0}^n p_j(\xi_k)^2 = \alpha_n p'_{n+1}(\xi_k) p_n(\xi_k), \\ 0 &< \sum_{j=0}^n p_j(\xi_{k+1})^2 = \alpha_n p'_{n+1}(\xi_{k+1}) p_n(\xi_{k+1}). \end{aligned}$$

Siccome ξ_k e ξ_{k+1} sono due zeri consecutivi (**e semplici**) del polinomio $p_{n+1}(x)$, risulta che $p'_{n+1}(\xi_k)$ e $p'_{n+1}(\xi_{k+1})$ non si annullano e hanno segni opposti. Poichè $\alpha_n \neq 0$, risulta che $p_n(\xi_k)$ e $p_n(\xi_{k+1})$ non si annullano e hanno segni opposti. Dunque i polinomi $p_n(x)$ e $p_{n+1}(x)$ non hanno zeri in comune e gli intervalli (ξ_k, ξ_{k+1}) ($k = 1, \dots, n$) contengono uno zero del polinomio $p_n(x)$. \square

Capitolo III

EQUAZIONI INTEGRALI

1 Proprietà Elementari e Iterazione

Le equazioni contenenti la funzione incognita sotto il segno dell'integrale sono dette *equazioni integrali*. Molti problemi della fisica matematica possono essere ridotti ad equazioni integrali lineari della forma

$$\int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (\text{III.1})$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad (\text{III.2})$$

rispetto alla funzione incognita $\varphi(x)$ in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. L'equazione (III.1) si dice *equazione integrale di prima specie*, mentre l'equazione (III.2) si dice *equazione di Fredholm¹ di seconda specie*. Le funzioni note $\mathcal{K}(x, y)$ e $f(x)$ sono dette *nucleo* e *termine noto* dell'equazione integrale; λ è un parametro complesso.

L'equazione integrale (III.2) per $f = 0$

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy \quad (\text{III.3})$$

si dice equazione integrale di Fredholm *omogenea* di seconda specie corrispondente all'equazione (III.2). Le equazioni integrali di Fredholm di seconda specie

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_{\Omega} \mathcal{K}^*(x, y) \psi(y) dy + g(x), \quad (\text{III.4})$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_{\Omega} \mathcal{K}^*(x, y) \psi(y) dy, \quad (\text{III.5})$$

¹Erik Ivar Fredholm [1866-1927] sviluppò la teoria delle equazioni integrali nel 1903.

dove $\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$, sono dette *aggiunte* alle equazioni (III.2) e (III.3), rispettivamente. Il nucleo $\mathcal{K}^*(x, y)$ si dice *nucleo coniugato aggiunto* al nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. Il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ si dice *hermitiano* se $\mathcal{K}^*(x, y) = \mathcal{K}(x, y)$, cioè se $\overline{\mathcal{K}(y, x)} = \mathcal{K}(x, y)$ quasi ovunque. Il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ si dice *reale e simmetrico* se $\mathcal{K}(x, y)$ è reale e $\mathcal{K}(y, x) = \mathcal{K}(x, y)$ quasi ovunque. Ovviamente un nucleo reale e simmetrico è hermitiano.

Scriveremo le equazioni (III.2), (III.3), (III.4) e (III.5) in forma contratta, utilizzando la notazione d'operatore:

$$\begin{cases} \varphi = \lambda K\varphi + f, & \varphi = \lambda K\varphi, \\ \psi = \bar{\lambda} K^*\psi + g, & \psi = \bar{\lambda} K^*\psi, \end{cases}$$

dove gli operatori integrali K e K^* sono determinati dai nuclei $\mathcal{K}(x, y)$ e $\mathcal{K}^*(x, y)$, rispettivamente:

$$(Kf)(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y)f(y) dy, \quad (K^*f)(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}^*(x, y)f(y) dy.$$

Tra poco metteremo opportune condizioni sul dominio Ω e sul nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ affinché gli operatori lineari K e K^* siano limitati in un opportuno spazio di Banach (o di Hilbert) di funzioni $f(x)$ definite in Ω . In particolare, verranno considerati gli spazi $L^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ e $C(\overline{\Omega})$.

Supponiamo che nell'equazione integrale (III.2) la regione Ω sia limitata in \mathbb{R}^n , la funzione f appartenga allo spazio $L^2(\Omega)$ ed il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ sia continuo su $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ (diremo *continui* questi nuclei).

Lemma III.1 *L'operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ trasferisce $L^2(\Omega)$ in $C(\overline{\Omega})$ (e, di conseguenza, $C(\overline{\Omega})$ in $C(\overline{\Omega})$ e $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$). Dunque, K è limitato come operatore lineare tra questi spazi, ed inoltre*

$$\|Kf\|_C \leq M\sqrt{m(\Omega)}\|f\|_2, \quad f \in L^2(\Omega), \quad (\text{III.6})$$

$$\|Kf\|_C \leq Mm(\Omega)\|f\|_C, \quad f \in C(\overline{\Omega}), \quad (\text{III.7})$$

$$\|Kf\|_2 \leq Mm(\Omega)\|f\|_2, \quad f \in L^2(\Omega), \quad (\text{III.8})$$

dove $M = \max_{x, y \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} |\mathcal{K}(x, y)|$ e $m(\Omega)$ è la misura di Ω .

Il lemma si descrive **mediante** il seguente schema:

$$\begin{array}{ccccccc} C(\overline{\Omega}) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^2(\Omega) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^1(\Omega) & \xrightarrow{K} & C(\overline{\Omega}) \\ L^2(\Omega) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^1(\Omega) & \xrightarrow{K} & C(\overline{\Omega}) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^2(\Omega) \\ L^1(\Omega) & \xrightarrow{K} & C(\overline{\Omega}) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^2(\Omega) & \xrightarrow{\text{imm.}} & L^1(\Omega) \end{array}$$

Dimostrazione. Siccome $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ è compatto,² il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è uniformemente continuo in $(x, y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Ci ricordiamo che una funzione continua definita su uno spazio compatto è uniformemente continua. Quindi, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|\mathcal{K}(x_1, y_1) - \mathcal{K}(x_2, y_2)| < \varepsilon$ se $\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| < \delta$. Di conseguenza, se $f \in L^2(\Omega)$, per $|x_1 - x_2| < \delta$ si ha la stima

$$\begin{aligned} |(Kf)(x_1) - (Kf)(x_2)| &\leq \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x_1, y) - \mathcal{K}(x_2, y)| |f(y)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} |f(y)| dy \leq \varepsilon \sqrt{M(\Omega)} \|f\|_2, \end{aligned}$$

e quindi K trasferisce $L^2(\Omega)$ in $C(\overline{\Omega})$.

Per $f \in C(\overline{\Omega})$ si trova la stima

$$\|f\|_2^2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq m(\Omega) \|f\|_C^2, \quad f \in C(\overline{\Omega}),$$

implicando $\|f\|_2 \leq \sqrt{m(\Omega)} \|f\|_C$. Dunque $C(\overline{\Omega})$ è contenuto in $L^2(\Omega)$, dove l'operatore di immersione è limitato di norma limitata superiormente da $\sqrt{m(\Omega)}$. \square

Cerchiamo la soluzione dell'equazione (III.2) mediante il metodo delle approssimazioni successive, ponendo $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \varphi^{(p-1)}(y) dy + f(x) \equiv \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \quad p = 1, 2, \dots \quad (\text{III.9})$$

Quindi

$$\varphi^{(p)} = \sum_{j=0}^p \lambda^j K^j f, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{III.10})$$

dove K^j denotano le potenze j -esime dell'operatore K . Secondo il Lemma III.1, le iterazioni di $f \in L^2(\Omega)$ soddisfano la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \|K^p f\|_2 &= \|K(K^{p-1} f)\|_2 \leq Mm(\Omega) \|K^{p-1} f\|_2 \\ &\leq (Mm(\Omega))^2 \|K^{p-2} f\|_2 \leq \dots \leq (Mm(\Omega))^p \|f\|_2, \end{aligned}$$

cioè

$$\|K^p f\|_2 \leq (Mm(\Omega))^p \|f\|_2, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.11})$$

²Per i sottoinsiemi di uno spazio euclideo, *compatto* vuol dire *chiuso e limitato*.

Da questa disuguaglianza segue che la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K^j f)(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (\text{III.12})$$

detta *serie di Neumann*, è maggiorata nella norma L^2 dalla serie numerica

$$\|f\|_2 \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j (Mm(\Omega))^j = \frac{\|f\|_2}{1 - |\lambda|Mm(\Omega)}, \quad (\text{III.13})$$

che converge nel disco $|\lambda| < 1/Mm(\Omega)$.

Stabiliamo preliminarmente che è valida la seguente uguaglianza:

$$(Kf, g) = (f, K^*g), \quad f, g \in L^2(\Omega). \quad (\text{III.14})$$

Infatti, se f e g appartengono a $L^2(\Omega)$, conformemente al Lemma III.1, anche Kf e K^*g appartengono a $L^2(\Omega)$ e quindi si ha

$$\begin{aligned} (Kf, g) &= \int_{\Omega} (Kf)(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) f(y) dy \right] \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{\Omega} f(y) \left[\int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \overline{g(x)} dx \right] dy = \int_{\Omega} f(y) \left[\int_{\Omega} \overline{\mathcal{K}^*(y, x) g(x)} dx \right] dy \\ &= \int_{\Omega} f(x) \overline{(K^*g)(x)} dx = (f, K^*g). \end{aligned}$$

Lemma III.2 *Se K_1 e K_2 sono operatori integrali con nuclei continui $\mathcal{K}_1(x, y)$ e $\mathcal{K}_2(x, y)$, rispettivamente, l'operatore $K_3 = K_2K_1$ è un operatore integrale con nucleo continuo*

$$\mathcal{K}_3(x, y) = \int_{\Omega} \mathcal{K}_2(x, y') \mathcal{K}_1(y', y) dy'. \quad (\text{III.15})$$

In questo caso è valida la seguente formula:

$$(K_2K_1)^* = K_1^*K_2^*. \quad (\text{III.16})$$

Dimostrazione. Per tutte le $f \in L^2(\Omega)$ abbiamo

$$\begin{aligned} (K_3f)(x) &= (K_2K_1f)(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}_2(x, y') \int_{\Omega} \mathcal{K}_1(y', y) f(y) dy dy' \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} [\mathcal{K}_2(x, y') \mathcal{K}_1(y', y) dy'] f(y) dy, \end{aligned}$$

da cui segue la formula (III.15). È evidente che il nucleo $\mathcal{K}_3(x, y)$ è continuo per $(x, y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, per $i = 1, 2$ esiste $\delta_i > 0$ tale che

$|\mathcal{K}_i(x_1, y_1) - \mathcal{K}_i(x_2, y_2)| < \varepsilon / ([M_1 + M_2]m(\Omega))$ se $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta_i$.
Quindi, se $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, risulta

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}_3(x_1, y_1) - \mathcal{K}_3(x_2, y_2)| &\leq \int_{\Omega} |\mathcal{K}_2(x_1, y') - \mathcal{K}_2(x_2, y')| |\mathcal{K}_1(y', y_1)| dy' \\ &+ \int_{\Omega} |\mathcal{K}_2(x_2, y')| |\mathcal{K}_1(y', y_1) - \mathcal{K}_1(y', y_2)| dy' < \frac{[M_2m(\Omega) + M_1m(\Omega)]\varepsilon}{[M_1 + M_2]m(\Omega)} = \varepsilon, \end{aligned}$$

implicando la continuità uniforme di $\mathcal{K}_3(x, y)$.

Prendendo in considerazione l'uguaglianza (III.14), per tutte le f e g appartenenti a $L^2(\Omega)$ si ottiene

$$(f, K_3^*g) = (K_3f, g) = (K_2K_1f, g) = (K_1f, K_2^*g) = (f, K_1^*K_2^*g), \quad f, g \in L^2(\Omega),$$

cioè $(f, K_3^*g - K_1^*K_2^*g) = 0$ per tutte le $f, g \in L^2(\Omega)$, e, quindi, $K_3^* = K_1^*K_2^*$, il che equivale all'uguaglianza (III.16). Il lemma è dimostrato. \square

Dal Lemma III.2 appena dimostrato segue che gli operatori $K^p = K(K^{p-1}) = (K^{p-1})K$, $p = 2, 3, \dots$, sono operatori integrali ed i loro nuclei $\mathcal{K}_p(x, y)$ sono continui e soddisfano le relazioni di ricorrenza $\mathcal{K}_1(x, y) = \mathcal{K}(x, y)$,

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y') \mathcal{K}_{p-1}(y', y) dy' = \int_{\Omega} \mathcal{K}_{p-1}(x, y') \mathcal{K}(y', y) dy'. \quad (\text{III.17})$$

I nuclei $\mathcal{K}_p(x, y)$ sono detti *nuclei iterati* del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.

Dalle relazioni di ricorrenza (III.17) segue che i nuclei iterati soddisfano la disuguaglianza

$$|\mathcal{K}_p(x, y)| \leq M^p m(\Omega)^{p-1}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (\text{III.18})$$

Dalla (III.18) segue che la serie

$$\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \mathcal{K}_{p+1}(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}, \quad (\text{III.19})$$

è maggiorata **nella norma** dalla serie numerica

$$\sum_{p=0}^{\infty} |\lambda|^p M^{p+1} m(\Omega)^k,$$

convergente nel disco $|\lambda| < 1/Mm(\Omega)$. Perciò la serie (III.19) è uniformemente (anche totalmente) convergente in $(x, y, \lambda) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| <$

$(1/Mm(\Omega) - \varepsilon)$, per $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Di conseguenza, la sua somma è continua in $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| < (1/Mm(\Omega))\}$ ed analitica in λ nel disco $|\lambda| < 1/Mm(\Omega)$. Indichiamo la somma della serie (III.19) con $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$:

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \mathcal{K}_{p+1}(x, y).$$

La funzione $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ è detta *risolvente* del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.

Teorema III.3 *La soluzione φ dell'equazione integrale (III.2) è unica nella classe $L^2(\Omega)$ per $|\lambda| < 1/Mm(\Omega)$ e per qualunque $f \in L^2(\Omega)$ è rappresentata con il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ mediante l'equazione*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} \mathcal{R}(x, y; \lambda) f(y) dy, \quad (\text{III.20})$$

in altre parole, è valida la seguente equazione operatoriale:

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R(\lambda), \quad |\lambda| < (1/Mm(\Omega)), \quad (\text{III.21})$$

dove $R(\lambda)$ è l'operatore integrale con nucleo $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$.

Si può dimostrare che il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ di un nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ ammette un prolungamento meromorfo in tutto il piano della variabile complessa λ ed inoltre i suoi poli sono i numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.³

Concludiamo ora questa sezione con la risoluzione (in $L^2(\Omega)$) dell'equazione integrale (III.2) con *nucleo degenere*

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^N f_j(x) \overline{g_j(y)},$$

dove $f_j, g_j \in L^2(\Omega)$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Utilizzando i prodotti scalari in $L^2(\Omega)$, la (III.2) si può scrivere nella forma

$$\varphi - \lambda \sum_{j=1}^N (\varphi, g_j) f_j = f,$$

dove $f \in L^2(\Omega)$ è nota e si cerca le soluzioni $\varphi \in L^2(\Omega)$. Si ha:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^N (\varphi, g_j) f_j(x),$$

³ λ si dice numero caratteristico di K se esiste $0 \neq \varphi \in L^1(\Omega)$ tale che $\varphi = \lambda K\varphi$. In tal caso $\lambda \neq 0$, $1/\lambda$ è autovalore di K e $\varphi \in C(\bar{\Omega})$.

dove i coefficienti (f, g_j) soddisfano l'equazione lineare

$$(\varphi, g_i) - \lambda \sum_{j=1}^N (\varphi, g_j)(f_j, g_i) = (f, g_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

In altre parole, si risolve l'equazione lineare

$$(I_N - \lambda M) \begin{pmatrix} (\varphi, g_1) \\ \vdots \\ (\varphi, g_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, g_1) \\ \vdots \\ (f, g_N) \end{pmatrix},$$

essendo M la matrice $N \times N$ con elementi $M_{ij} = (f_j, g_i)$. Di conseguenza, la (III.2) con nucleo degenere ha la soluzione unica in $L^2(\Omega)$ se e solo se $1/\lambda$ non è autovalore della matrice M .

Per risolvere la suddetta equazione integrale in $L^1(\Omega)$ si prendano, per $j = 1, 2, \dots, N$, $f_j \in L^1(\Omega)$ e $g_j \in L^\infty(\Omega)$.

Esempio III.4 Consideriamo ora l'equazione integrale

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{j=1}^N c_j \int_0^\infty e^{-\beta_j(x+y)} \varphi(y) dy = f(x),$$

dove β_1, \dots, β_N sono costanti distinte con parte reale positiva e c_1, \dots, c_N sono costanti distinte non zero. Risolvendo l'equazione integrale in $L^2(\mathbb{R}^+)$, si ha:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^N c_j \xi_j e^{-\beta_j x},$$

dove $\xi_j = \int_0^\infty e^{-\beta_j y} \varphi(y) dy$. Quindi le costanti ξ_1, \dots, ξ_N sono le soluzioni del sistema lineare di ordine N

$$\begin{aligned} \xi_i &= \int_0^\infty dz e^{-\beta_i z} f(z) dz + \lambda \sum_{j=1}^N c_j \xi_j \int_0^\infty e^{-(\beta_i + \beta_j)z} dz \\ &= \int_0^\infty dz e^{-\beta_i z} f(z) dz + \lambda \sum_{j=1}^N \frac{c_j \xi_j}{\beta_i + \beta_j}. \end{aligned}$$

Tale sistema ha la soluzione unica per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ se e solo se $1/\lambda$ non è autovalore della matrice $M = \left(\frac{c_j}{\beta_i + \beta_j} \right)_{i,j=1}^N$.

2 Equazioni integrali di Volterra

Supponiamo che $n = 1$, la regione Ω sia l'intervallo limitato $(0, a)$ ed il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ si annulli nel triangolo $0 < x < y < a$. Tale nucleo si dice *nucleo di Volterra*.⁴ L'equazione (III.2) con nucleo di Volterra ha la forma

$$\boxed{\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x, y)\varphi(y) dy + f(x)} \quad (\text{III.22})$$

e è detta *equazione integrale di Volterra* di seconda specie.

Supponiamo che nell'equazione (III.22) sia $f \in C([0, a])$ e che il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ sia continuo nel triangolo chiuso $0 \leq y \leq x \leq a$. Allora $|\mathcal{K}(x, y)| \leq M$ per un'opportuna costante M e l'operatore integrale

$$(Kf)(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x, y)f(y) dy$$

trasferisce $C([0, a])$ in $C([0, a])$.

Definiamo ora le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}$:

$$\varphi^{(0)} = f, \quad \varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^p \lambda^k K^k f = \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \quad p = 1, 2, \dots \quad (\text{III.23})$$

Le iterazioni $K^p f$ appartengono a $C([0, a])$ e soddisfano la stima

$$|(K^p f)(x)| \leq \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \quad x \in [0, a], \quad p = 0, 1, \dots \quad (\text{III.24})$$

Dimostriamo la stima (III.24) per induzione rispetto a p . Per $p = 0$, la stima (III.24) è valida. Supponendola valida per $p - 1$, dimostriamo la sua validità per p :

$$\begin{aligned} |(K^p f)(x)| &= |(K(K^{p-1} f))(x)| \leq \int_0^x |\mathcal{K}(x, y)| |(K^{p-1} f)(y)| dy \\ &\leq M \|f\|_C M^{p-1} \int_0^x \frac{y^{p-1}}{(p-1)!} dy = \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}. \end{aligned}$$

Dalla stima (III.24) segue che la serie di Neumann (III.10) è maggiorata su $[0, a]$ dalla serie numerica convergente

$$\|f\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \frac{(Ma)^k}{k!} = \|f\|_C e^{|\lambda|Ma} \quad (\text{III.25})$$

⁴Vito Volterra [1860-1940] è stato uno dei fondatori dell'analisi funzionale.

e per questa ragione è uniformemente (infatti, totalmente) convergente in $x \in [0, a]$ per λ qualsiasi, definendo una funzione continua $\varphi(x)$. Dunque, in virtù della (III.23), le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}$ per $p \rightarrow \infty$ tendono uniformemente alla funzione φ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, a]} |\varphi^{(p)}(x) - \varphi(x)| = 0, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x). \quad (\text{III.26})$$

Qui, in virtù della (III.25), è valida la disuguaglianza

$$\|\varphi\|_C \leq \|f\|_C e^{|\lambda|Ma}. \quad (\text{III.27})$$

Enunciamo i risultati ottenuti nella forma del seguente

Teorema III.5 *Ogni equazione integrale di Volterra (III.22) con nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ nel triangolo $\{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq a\}$ per λ qualsiasi ha un'unica soluzione φ nella classe $C([0, a])$ per qualunque termine noto $f \in C([0, a])$. Questa soluzione è data dalla serie di Neumann uniformemente convergente (III.26) e soddisfa la disuguaglianza (III.27). Dunque un nucleo di Volterra continuo non ha numeri caratteristici.*

Risolviamo ora l'equazione di Volterra

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \varphi(y) dy + f(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Se $f \in C^1([0, a])$, allora l'equazione integrale si riduce al problema di Cauchy

$$\varphi'(x) = \lambda \varphi(x) + f'(x), \quad \varphi(0) = f(0).$$

La sua soluzione unica ha la forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{\lambda x} f(0) + \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f'(y) dy \\ &= e^{\lambda x} f(0) + [e^{\lambda(x-y)} f(y)]_{y=0}^x + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y) dy \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y) dy. \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione si generalizza facilmente a $f \in C([0, a])$.

3 Equazioni Integrali con Nucleo Hermitiano

Un nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è detto *hermitiano* se **esso** coincide con il suo coniugato hermitiano, $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$. La corrispondente equazione integrale

$$\boxed{\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y) \varphi(y) dy + f(x)} \quad (\text{III.28})$$

per λ reali coincide con la sua aggiunta, essendo $K^* = K$ un operatore autoaggiunto nello spazio $L^2(\Omega)$. Se il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è continuo, K è anche limitato su $L^2(\Omega)$. I numeri caratteristici e le autofunzioni trovati sono anche i numeri caratteristici e le autofunzioni se la (III.28) viene considerata nello spazio $L^2(\Omega)$ per un nucleo continuo ed hermitiano qualsiasi.

a. Operatori integrali con nucleo continuo hermitiano: Compattezza. Supponiamo che K sia un operatore integrale con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$. **Tale** operatore trasferisce $L^2(\Omega)$ (Ω è una regione limitata) in $L^2(\Omega)$ (vedi il Lemma III.1) ed è autoaggiunto:

$$(Kf, g) = (f, Kg), \quad f, g \in L^2(\Omega). \quad (\text{III.29})$$

Inversamente, se un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ è autoaggiunto, **il suo** nucleo è hermitiano. Infatti, dalla (III.29) (valida anche per $f, g \in C(\overline{\Omega})$) segue che $\mathcal{K}(x, y)$ e $\mathcal{K}^*(x, y)$ sono ambedue il nucleo dell'operatore integrale K e quindi $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

Ne segue facilmente che tutti i nuclei iterati $\mathcal{K}_p(x, y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ sono anch'essi hermitiani:

$$\mathcal{K}_p^*(x, y) = (\mathcal{K}^*)_p(x, y) = \mathcal{K}_p(x, y).$$

Sia M un compatto.¹ Un sottoinsieme \mathcal{M} (cioè, un insieme di funzioni continue su M) si dice *equicontinuo* su M se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{M}$, non appena $|x_1 - x_2| < \delta$ per $x_1, x_2 \in M$. In particolare, $f \in C(M)$ è (uniformemente) continua se e solo se l'insieme $\mathcal{M} = \{f\}$ è equicontinuo.

Lemma III.6 *Un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ trasferisce ogni insieme limitato appartenente a $L^2(\Omega)$ in un insieme limitato in $C(\overline{\Omega})$ e equicontinuo su $\overline{\Omega}$.*

Dimostrazione. Sia B un insieme limitato in $L^2(\Omega)$: $\exists A : \|f\|_2 \leq A$ per ogni $f \in B$. Dal Lemma III.1 segue che $\|Kf\|_C \leq Mm(\Omega)^{1/2} A$, $f \in B$, e quindi K trasferisce B in un insieme limitato in $C(\overline{\Omega})$. Inoltre, visto che il

nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è uniformemente continuo su $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, per un $\varepsilon > 0$ qualsiasi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)| < \frac{\varepsilon}{A(m(\Omega))^{1/2}},$$

quando $|x' - x''| < \delta$ e $\{x', x'', y\} \subset \overline{\Omega}$. Da ciò, utilizzando la disuguaglianza (III.6), in cui $\mathcal{K}(x, y)$ è sostituito con $|\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)|$, per ogni $f \in B$ si ottiene

$$\begin{aligned} |(Kf)(x') - (Kf)(x'')| &= \left| \int_{\Omega} [\mathcal{K}(x', y) - \mathcal{K}(x'', y)] f(y) dy \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon \sqrt{m(\Omega)} \|f\|_2}{A \sqrt{m(\Omega)}} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

quando $|x' - x''| < \delta$ e $\{x', x'', y\} \subset \overline{\Omega}$. Ciò vuol dire che l'insieme $\{Kf : f \in B\}$ è equicontinuo su $\overline{\Omega}$. \square

Teorema III.7 (Teorema di Ascoli-Arzelà) *Se un insieme infinito B è limitato in $C(M)$ dove M è un compatto, ed è equicontinuo su M , da quest'insieme si può estrarre una successione convergente in $C(M)$.*⁵

Dimostrazione. Come è noto, ogni sottoinsieme chiuso e limitato in \mathbb{R}^n ha un sottoinsieme denso numerabile $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$. Per ipotesi, l'insieme di numeri $\{f(x_1) : f \in B\}$ è limitato. Quindi esiste una successione $\{f_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ tale che $f_k^{(1)}(x_1)$ è convergente se $k \rightarrow \infty$. Inoltre, visto che l'insieme di numeri $\{f_k^{(1)}(x_2) : k = 1, 2, \dots\}$ è limitato, estraiamo dalla $\{f_k^{(1)}\}$ una sottosuccessione $\{f_k^{(2)}\}$ tale che $\{f_k^{(2)}(x_2)\}$ è convergente. Continuando così, troviamo le successioni $\{f_k^{(m)}\}$ in B , dove $n = 1, 2, \dots$ e $\{f_k^{(n+1)}\}$ è una sottosuccessione della $\{f_k^{(n)}\}$, tale che $\{f_k^{(n)}(x_n)\}$ è convergente se $n \rightarrow \infty$.

Consideriamo ora la successione “diagonale” $\{g_k\}$ in B dove $g_k = f_k^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$. Per un qualunque punto x_i la successione numerica $\{g_k(x_i)\}$ converge se $k \rightarrow \infty$, poichè, per costruzione, per $k \geq i$, questa successione è una sottosuccessione della successione convergente $\{f_k^{(i)}(x_i)\}$.

Dimostriamo ora che la successione di g_k , $k = 1, 2, \dots$, è uniformemente convergente su M . Supponiamo che sia $\varepsilon > 0$. Visto che questa successione è equicontinua su M , esiste $\delta > 0$ tale che per $k = 1, 2, \dots$ si ha

$$|g_k(x) - g_k(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{III.30}$$

⁵In altre parole, se un insieme B è limitato in $C(M)$ dove M è un compatto, ed è equicontinuo su M , la sua chiusura in $C(M)$ è compatta. Un'altra dimostrazione si trova in Wikipedia.

quando $|x - x'| < \delta$ e $x, x' \in M$. Essendo M compatto, dall'insieme di punti x_1, x_2, \dots si può scegliere un numero finito di questi punti, x_1, x_2, \dots, x_l , $l = l(\varepsilon)$, in modo che, per ogni punto $x \in M$ esista un punto x_i , $1 \leq i \leq l$, tale che $|x - x_i| < \delta$. Ricordando che la successione di $g_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, converge ai punti x_1, \dots, x_l , concludiamo che esiste un numero $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$|g_k(x_i) - g_p(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k, p \geq N, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (\text{III.31})$$

Sia ora x un punto arbitrario dell'insieme M . Scegliendo un punto x_i , $1 \leq i \leq l$, tale che $|x - x_i| < \delta$, in virtù delle (III.30) e (III.31) si ottiene

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g_p(x)| &\leq |g_k(x) - g_k(x_i)| + |g_k(x_i) - g_p(x_i)| + |g_p(x_i) - g_p(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad k, p \geq N, \end{aligned}$$

dove N non dipende da $x \in M$. Ciò significa che la successione di g_k , $k = 1, 2, \dots$, è una successione di Cauchy in $C(M)$. Siccome $C(M)$ è uno spazio di Banach, la successione converge uniformemente su M . \square

Il teorema di Ascoli-Arzelà⁶ esprime la proprietà di *compattezza* di un qualunque insieme limitato e equicontinuo in $C(M)$. Inoltre, il Lemma III.6 afferma che un operatore integrale con nucleo continuo trasferisce ogni insieme limitato in $L^2(\Omega)$ in un sottoinsieme di $C(\bar{\Omega})$ con chiusura (in $C(\bar{\Omega})$) compatta.

c. Equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano: Il principio variazionale. In questo paragrafo descriviamo i numeri caratteristici di un operatore integrale con nucleo hermitiano.

Teorema III.8 (Principio di Rayleigh-Ritz) *Per ciascun nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$ l'operatore integrale K ha almeno un numero caratteristico e il numero caratteristico λ_1 più piccolo in modulo soddisfa il principio variazionale*

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{0 \neq f \in L^2(\Omega)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2}. \quad (\text{III.32})$$

Dimostrazione. Sia

$$\nu = \sup_{\|f\|_2=1} \|Kf\|_2. \quad (\text{III.33})$$

Dalla (III.8) segue che $\|Kf\|_2 \leq M m(\Omega)$ sulle funzioni di $L^2(\Omega)$ di norma 1 e quindi $\nu \leq M m(\Omega)$. È inoltre evidente che $\nu \geq 0$. Dimostriamo che

⁶Giulio Ascoli [1843-1896] e Cesare Arzelà [1847-1912]

$\nu > 0$. Infatti, se $\nu = 0$, allora, in virtù della (III.33), avremmo $\|Kf\|_2 = 0$, cioè $Kf = 0$ per tutte le $f \in L^2(\Omega)$, e quindi $\mathcal{K}(x, y) = 0$, $x, y \in \Omega$, il che contraddice l'ipotesi.

Dalla definizione della ν segue l'esistenza di una successione di f_k , $k = 1, 2, \dots$, $\|f_k\|_2 = 1$, tale che

$$\|Kf_k\|_2 \rightarrow \nu, \quad k \rightarrow +\infty; \quad (\text{III.34})$$

inoltre, è valida la disuguaglianza

$$\|K^2f\|_2 = \left\| K \left(\frac{Kf}{\|Kf\|_2} \right) \right\|_2 \|Kf\|_2 \leq \nu \|Kf\|_2, \quad f \in L^2(\Omega). \quad (\text{III.35})$$

Dimostriamo ora che

$$K^2f_k - \nu^2f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty, \text{ in } L^2(\Omega). \quad (\text{III.36})$$

Infatti, utilizzando le (III.29), (III.34) e (III.35), si ottiene

$$\begin{aligned} \|K^2f_k - \nu^2f_k\|_2^2 &= (K^2f_k - \nu^2f_k, K^2f_k - \nu^2f_k) \\ &= (K^2f_k, K^2f_k) + \nu^4(f_k, f_k) - \nu^2(f_k, K^2f_k) - \nu^2(K^2f_k, f_k) \\ &= \|K^2f_k\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2(Kf_k, Kf_k) \\ &\leq \nu^2\|Kf_k\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2\|Kf_k\|_2^2 \\ &= \nu^4 - \nu^2\|Kf_k\|_2^2 \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

il che è equivalente alla relazione limite (III.36).

Conformemente al Lemma III.6, la successione delle funzioni Kf_k , $k = 1, 2, \dots$, è limitata in $C(\overline{\Omega})$ e equicontinua su $\overline{\Omega}$. Ma in questo caso, **in base al teorema di Ascoli-Arzelà**, esiste anche una sottosuccessione $\psi_i = Kf_{k_i}$, $i = 1, 2, \dots$, che converge in $C(\overline{\Omega})$ ad una funzione $\psi \in C(\overline{\Omega})$, $\|\psi - \psi_i\|_C \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Da ciò, utilizzando le (III.6) e (III.7), e la relazione (III.36), si ottiene

$$\begin{aligned} \|K^2\psi - \nu^2\psi\|_C &\leq \|K^2(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2\|\psi - \psi_i\|_C + \|K^2\psi_i - \nu^2\psi_i\|_C \\ &\leq M m(\Omega)\|K(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2\|\psi - \psi_i\|_C + \|K(K^2f_{k_i} - \nu^2f_{k_i})\|_C \\ &\leq (M^2m(\Omega)^2 + \nu^2)\|\psi - \psi_i\|_C + M\sqrt{m(\Omega)}\|K^2f_{k_i} - \nu^2f_{k_i}\|_2 \rightarrow 0, \quad i \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

e, di conseguenza,

$$K^2\psi = \nu^2\psi.$$

Dimostriamo che $\psi \neq 0$. Dalla relazione limite (III.36) segue che

$$K\psi_i - \nu^2f_{k_i} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow +\infty \text{ in } L^2(\Omega),$$

e, di conseguenza, $\|K\psi_i\|_2 \rightarrow \nu^2$, $i \rightarrow +\infty$. D'altra parte, dal Lemma III.1 segue che $\|K\psi_i\|_2 \rightarrow \|K\psi\|_2$, $i \rightarrow +\infty$. Quindi, $\|K\psi\|_2 = \nu^2 > 0$, da cui segue che $\psi \neq 0$.

Dunque, la funzione ψ **così** costruita è un'autofunzione del **operatore integrale K_2 con** nucleo $\mathcal{K}_2(x, y)$ corrispondente all'autovalore ν^2 . Ma, allora, almeno uno dei numeri $\pm\nu$ è autovalore del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. In tal modo, il numero caratteristico λ_1 costruito è uguale a $1/\nu$ in modulo e, quindi, in virtù della (III.33), soddisfa il principio variazionale (III.32).

Non resta altro che stabilire che λ_1 è il numero caratteristico più piccolo in modulo del **operatore integrale K con** nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. Infatti, se λ_0 e φ_0 sono il numero caratteristico e la corrispondente autofunzione, cioè $\lambda_0 K\varphi_0 = \varphi_0$, allora, in virtù della (III.32), si ha

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2} \geq \frac{\|K\varphi_0\|_2}{\|\varphi_0\|_2} = \frac{1}{|\lambda_0|},$$

e quindi $|\lambda_1| \leq |\lambda_0|$. □

Considerando il teorema sopra dimostrato, per le equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$, si ottengono le seguenti **affermazioni**:

*L'insieme dei numeri caratteristici $\{\lambda_k\}$ non è vuoto, è **sottoinsieme dell'asse reale**, e non ha punti di accumulazione finiti; ogni numero caratteristico è di molteplicità finita ed il sistema di autofunzioni $\{\varphi_k\}$ può essere scelto ortonormale:*

$$(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{k,i}. \quad (\text{III.37})$$

Se $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, l'equazione (III.28) è univocamente risolvibile per un termine noto $f \in C(\bar{\Omega})$ qualsiasi. Se $\lambda = \lambda_k$, per la risolvibilità dell'equazione (III.28) è necessario e sufficiente che

$$(f, \varphi_{k+i}) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r_k - 1, \quad (\text{III.38})$$

dove $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r_k-1}$ sono autofunzioni corrispondenti al numero caratteristico λ_k e r_k è la molteplicità di λ_k .

Sia $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ un nucleo integrale hermitiano e sia K il corrispondente operatore integrale in $L^2(\Omega)$. Allora esistono un numero caratteristico $0 \neq \lambda_1 \in \mathbb{R}$ e un'autofunzione $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ di norma 1 tali che

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{\|f\|_2=1} \|Kf\|_2 = \|K\varphi_1\|.$$

Poniamo

$$\mathcal{K}_1(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \frac{\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(y)}}{\lambda_1}.$$

Se $\mathcal{K}_1(x, y) \equiv 0$, allora λ_1 è l'unico numero caratteristico di K e $\mathcal{K}(x, y) = \varphi_1(x)\overline{\varphi_1(y)}/\lambda_1$ è un nucleo degenere **di rango 1**. Se $\mathcal{K}_1(x, y) \not\equiv 0$ e K_1 è il corrispondente operatore integrale, allora esistono un numero caratteristico $0 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ e un'autofunzione $\varphi_2 \in L^2(\Omega)$ di norma 1 e ortogonale a φ_1 tali che

$$\frac{1}{|\lambda_2|} = \sup_{\|f\|_2=1} \|K_1 f\|_2 = \|K\varphi_2\|.$$

Poniamo

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \mathcal{K}_1(x, y) - \frac{\varphi_2(x)\overline{\varphi_2(y)}}{\lambda_2}.$$

Se $\mathcal{K}_2(x, y) \equiv 0$, allora λ_1 e λ_2 sono gli unici numeri caratteristici di K e

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^2 \frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}}{\lambda_j}$$

è un nucleo degenere di rango 2. Se $\mathcal{K}_2(x, y) \not\equiv 0$ e K_2 è il corrispondente operatore integrale, allora esistono un numero caratteristico $0 \neq \lambda_3 \in \mathbb{R}$ con $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ e un'autofunzione $\varphi_3 \in L^2(\Omega)$ di norma 1 e ortogonale a φ_1 e φ_2 tali che

$$\frac{1}{|\lambda_3|} = \sup_{\|f\|_2=1} \|K_2 f\|_2 = \|K\varphi_3\|,$$

ECC. Supponiamo di aver trovato i numeri caratteristici $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (con $0 < |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_p|$) e il sistema ortonormale $\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$ tali che $\lambda_j = \lambda_j K \varphi_j$ ($j = 1, \dots, p$). Poniamo

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \mathcal{K}_{p-1}(x, y) - \frac{\varphi_p(x)\overline{\varphi_p(y)}}{\lambda_p}.$$

Se $\mathcal{K}_p(x, y) \equiv 0$, allora $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sono gli unici numeri caratteristici di K e

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^p \frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}}{\lambda_j}$$

è un nucleo degenere di rango p . Se $\mathcal{K}_p(x, y) \not\equiv 0$ e K_p è il corrispondente operatore integrale, allora esistono un numero caratteristico $0 \neq \lambda_{p+1} \in \mathbb{R}$ con

$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_p| \leq |\lambda_{p+1}|$ e un'autofunzione $\varphi_{p+1} \in L^2(\Omega)$ di norma 1 e ortogonale a $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ tali che

$$\frac{1}{|\lambda_{p+1}|} = \sup_{\|f\|_2=1} \|K_p f\|_2 = \|K\varphi_{p+1}\|.$$

Se l'applicazione ripetuta del principio di Rayleigh-Ritz⁷ viene abortito dopo p passaggi, abbiamo trovato tutti i p numeri caratteristici $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (con $0 < |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_p|$) con il corrispondente sistema ortonormale di autofunzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_p$, mentre il nucleo integrale di partenza

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^p \frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}}{\lambda_j}$$

è degenere. Se non si abortisce la procedura, troviamo un numero infinito di numeri caratteristici $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ in ordine di valor assoluto crescente con il corrispondente sistema ortonormale $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ di autofunzioni. Almeno formalmente si può scrivere

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}}{\lambda_j}.$$

In tutti i casi vale

$$\frac{1}{|\lambda_j|} = \sup_{\substack{\|f\|_2=1 \\ f \perp \varphi_1, \dots, f \perp \varphi_{j-1}}} \|K f\|_2 = \|K\varphi_j\|_2,$$

dove $j = 2, 3, \dots, p \leq +\infty$.

Studiamo ora la condizione sotto cui è una **base** ortonormale il sistema ortonormale delle autofunzioni φ_j . Se $K\psi = 0$, allora

$$(\psi, \varphi_j) = \frac{1}{\lambda_j}(\psi, K\varphi_j) = \frac{1}{\lambda_j}(K\psi, \varphi_j) = 0.$$

D'altra parte, se $(\psi, \varphi_j) = 0$ per ogni j , allora

$$K\psi = \sum_j (\psi, \varphi_j)\varphi_j = 0.$$

In altre parole,

$$\{\psi \in L^2(\Omega) : K\psi = 0\} = \{\psi \in L^2(\Omega) : \psi \perp \varphi_j \text{ per ogni } j\}.$$

⁷John William Strutt, il terzo barone di Rayleigh [1842-1919], e Walter Ritz [1878-1909]. Il loro principio fu introdotto nel famoso libro *Theory of Sound* nel 1877 da Rayleigh e formulato come algoritmo matematico da Ritz nel 1908.

Di conseguenza, $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ è una base ortonormale se e solo se $\psi = 0$ è l'unico vettore ortogonale a tutte le autofunzioni φ_j se e solo se $\psi = 0$ è l'unico vettore tale che $K\psi = 0$. **Di conseguenza,**

$\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ è base ortonormale di $L^2(\Omega)$ se e solo se zero non è autovalore di K .

4 Teorema di Hilbert-Schmidt

Supponiamo che $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ siano i numeri caratteristici del nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ disposti in ordine di crescita del loro modulo, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$, e che $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ siano le corrispondenti autofunzioni ortonormali, $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{kl}$.

Come sappiamo, i numeri caratteristici λ_k sono reali e le autofunzioni $\varphi_k(x)$ sono continue su $\bar{\Omega}$; in questo caso l'insieme $\{\lambda_k\}$ è finito o numerabile; nell'ultimo caso si ha $|\lambda_k| \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. Inoltre, in virtù della (III.32), è valida la disuguaglianza

$$\|Kf\|_2 \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|f\|_2, \quad f \in L^2(\Omega). \quad (\text{III.39})$$

Notiamo un'altra disuguaglianza, e cioè⁸

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy, \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (\text{III.40})$$

Nel seguito verrà infatti dimostrato che vale l'uguaglianza nella (III.40).

Introduciamo ora la successione di nuclei continui hermitiani

$$\mathcal{K}^{(p)}(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (\text{III.41})$$

I corrispondenti operatori integrali $K^{(p)}$ hermitiani soddisfano

$$K^{(p)}f = Kf - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i, \quad f \in L^2(\Omega). \quad (\text{III.42})$$

Dimostriamo che $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$, e $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \dots$ costituiscono tutti i numeri caratteristici e tutte le autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$. Infatti, in virtù della (III.42) abbiamo

$$K^{(p)}\varphi_k = K\varphi_k - \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_k, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i = K\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k, \quad k \geq p+1,$$

⁸Se il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ ha un numero finito di numeri caratteristici $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, poniamo $\lambda_k = +\infty$ per $k > N$.

in modo che λ_k e φ_k , $k \geq p+1$, siano numeri caratteristici ed autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$. Inversamente, siano λ_0 e φ_0 un numero caratteristico e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$, e cioè, in virtù della (III.42), si avrà

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)} \varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i. \quad (\text{III.43})$$

Da qui per $k = 1, 2, \dots, p$ si ottiene

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_k) &= \lambda_0 (K \varphi_0, \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_k)}{\lambda_i} \\ &= \lambda_0 (\varphi_0, K \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \delta_{ik} = \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) = 0, \end{aligned}$$

e quindi, in virtù della (III.43), $\varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0$. Dunque, λ_0 e φ_0 sono il numero caratteristico e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. Visto che φ_0 è ortogonale a tutte le autofunzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, ne segue che λ_0 coincide con uno dei numeri caratteristici $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$ e φ_0 può essere considerata uguale a φ_k per $k \geq p+1$. Dunque, λ_{p+1} è il numero caratteristico più piccolo del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x, y)$ in modulo. Applicando la disuguaglianza (III.39) a questo nucleo e tenendo conto della (III.42), si ottiene la disuguaglianza

$$\|K^{(p)} f\|_2 = \left\| K f - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_2 \leq \frac{\|f\|_2}{|\lambda_{p+1}|}, \quad f \in L^2(\Omega), \quad (\text{III.44})$$

dove $p = 1, 2, \dots$.

Supponiamo che il nucleo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ abbia un numero finito di numeri caratteristici: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Da quanto abbiamo dimostrato, il nucleo hermitiano $\mathcal{K}^{(N)}(x, y)$ non ha numeri caratteristici, e quindi, in base al Teorema III.8, si ha $\mathcal{K}^{(N)}(x, y) \equiv 0$, in modo che, in virtù della (III.41), si ha

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \quad (\text{III.45})$$

il che significa che il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è degenere.

Da ciò, e ricordando anche che un nucleo degenere ha sempre un numero finito di numeri caratteristici, formuliamo il seguente risultato:

Affinché un nucleo continuo hermitiano sia degenere, è necessario e sufficiente che questo nucleo abbia un numero finito di numeri caratteristici.

Dimostriamo che il nucleo iterato $\mathcal{K}_2(x, y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ può essere sviluppato in una serie bilineare in termini delle autofunzioni di questo nucleo,

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k^2}, \quad (\text{III.46})$$

e la serie è uniformemente convergente su $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

Tenendo conto del fatto che, in virtù della (III.17), si ha

$$\mathcal{K}_2(x, y) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y')\mathcal{K}(y', x) dy' = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, y')\overline{\mathcal{K}(x, y')} dy' = \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy,$$

si ottiene l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy. \quad (\text{III.47})$$

Dal teorema di Dini⁹ segue che la serie (III.47) è uniformemente convergente in $x \in \overline{\Omega}$, poichè la parte a destra è una funzione continua in $x \in \overline{\Omega}$. Integrando termine a termine la serie uniformemente convergente (III.47) e tenendo conto della normalizzazione delle autofunzioni, si ottiene la formula

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dx dy.} \quad (\text{III.48})$$

Dimostriamo ora il seguente risultato di Hilbert e Schmidt.¹⁰

Teorema III.9 (Teorema di Hilbert-Schmidt) *Se una funzione f appartiene all'immagine di un operatore integrale K di nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$, cioè $f = Kh$, la sua serie in termini delle autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è uniformemente convergente su $\overline{\Omega}$ alla funzione*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x). \quad (\text{III.49})$$

⁹Teorema di Dini: Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione crescente di funzioni continue definite su un compatto. Se esiste $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ e f è continua sul compatto, allora la convergenza è uniforme.

¹⁰David Hilbert [1862-1943] e Erhard Schmidt [1876-1959], relatore e dottorando, hanno contribuito sostanzialmente all'analisi funzionale.

Dimostrazione. Visto che $f = Kh$, $h \in L^2(\Omega)$, in base al Lemma III.1, $f \in C(\bar{\Omega})$ ed i coefficienti di Fourier delle funzioni f e h in termini delle autofunzioni $\{\varphi_k\}$ del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ sono collegati con la relazione

$$(f, \varphi_k) = (Kh, \varphi_k) = (h, K\varphi_k) = \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}. \quad (\text{III.50})$$

Se il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ ha un numero finito di autovalori, si ha, in virtù della (III.45),

$$f(x) = (Kh)(x) = \sum_{k=1}^N \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

ed il teorema di Hilbert-Schmidt è dimostrato.

Supponiamo ora che il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ abbia un numero infinito di autovalori. In questo caso $|\lambda_k| \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow +\infty$. Perciò la serie (III.49) converge a f nella norma di $L^2(\Omega)$:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^p (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_2 = \left\| Kh - \sum_{k=1}^p \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k \right\|_2 \leq \frac{\|h\|_2}{|\lambda_{p+1}|} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow +\infty.$$

Resta da dimostrare che la serie (III.49) converge in modo uniforme su $\bar{\Omega}$. Utilizzando la disuguaglianza di Schwartz e la (III.40), si ottiene, per tutti i valori di p e q e per ogni $x \in \bar{\Omega}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)| \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| &\leq \left[\sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{k=p}^q \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} |\mathcal{K}(x, y)|^2 dy \right]^{1/2} \leq M \sqrt{m(G)} \left[\sum_{k=p}^q |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Il primo membro della disuguaglianza (III.51) tende a zero per $p, q \rightarrow +\infty$. Ciò significa che la serie (III.49) è puntualmente convergente su $\bar{\Omega}$. Siccome il maggiorante in (III.51) non dipende da $x \in \bar{\Omega}$, la convergenza risulta uniforme in $x \in \bar{G}$. \square

Capitolo IV

PROBLEMI DI STURM-LIOUVILLE

Prima di studiare alcuni problemi al contorno per le equazioni di tipo ellittico (in particolare le equazioni di Laplace, di Poisson e delle onde nello spazio e nel piano), trattiamo i corrispondenti problemi unidimensionali.

1 Problema di Sturm-Liouville

Il cosiddetto *problema di Sturm-Liouville* ha la forma^{1 2}

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.1})$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0, \quad (\text{IV.2})$$

dove h_1, h_2, H_1, H_2 sono costanti non negative tali che $h_1 + h_2 > 0$ e $H_1 + H_2 > 0$.³ Assumiamo che $p \in C^1[0, \ell]$, $p(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \ell]$, e $q \in C[0, \ell]$ è reale. Come dominio dell'operatore L prendiamo

$$\mathcal{M}_L = \left\{ u \in C^2(0, \ell) \cap C^1[0, \ell] : \begin{array}{l} u'' \in L^2(0, \ell) \\ h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0 \\ H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0 \end{array} \right\}.$$

Se $h_2 = H_2 = 0$ (cioè $u(0) = u(\ell) = 0$), abbiamo le *condizioni di Dirichlet*. Se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè $u'(0) = u'(\ell)$), stiamo parlando delle *condizioni di Neumann*. Gli altri casi si dicono *condizioni miste* oppure *condizioni di Robin*.

¹Nel 1836-1837 Jacques Charles François Sturm [1803-1855] e Joseph Liouville [1809-1882] pubblicarono alcuni lavori su opportune generalizzazioni dell'equazione del calore. Liouville fu il primo a dimostrare la trascendenza di un numero, $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$.

²Presentiamo prima il problema di Sturm-Liouville con condizioni al contorno separate. Più tarde discuteremo tale problema con condizioni periodiche e antiperiodiche.

³Potremmo scegliere angoli $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tali che $h_1 = \cos \alpha$, $h_2 = \sin \alpha$, $H_1 = \cos \beta$ e $H_2 = \sin \beta$.

L'operatore L è hermitiano, cioè $(Lf, g) = (f, Lg)$ per ogni $f, g \in \mathcal{M}_L$. Infatti,

$$\begin{aligned} (Lf, g) - (f, Lg) &= \int_0^\ell [-(pf')'\bar{g} + qf\bar{g}] dx - \int_0^\ell [-f(p\bar{g}')' + f(q\bar{g})] dx \\ &= [-(pf')\bar{g} + f(p\bar{g}')]_0^\ell + \int_0^\ell [pf'\bar{g}' - f'p\bar{g}'] dx \\ &= [-(pf')\bar{g} + f(p\bar{g}')]_0^\ell = [p(f\bar{g}' - f'\bar{g})]_0^\ell, \end{aligned}$$

la quale si cancella se le condizioni (IV.2) sono ambedue di tipo Dirichlet o Neumann (se non valgono $h_1, h_2 \in (0, 1)$ e $H_1, H_2 \in (0, 1)$). Per $h_2, H_2 > 0$, sostituiamo $f'(\ell) = (-H_1/H_2)f(\ell)$ e $f'(0) = (h_1/h_2)f(0)$ e analogamente $g'(\ell) = (-H_1/H_2)g(\ell)$ e $g'(0) = (h_1/h_2)g(0)$, risultando in $(Lf, g) - (f, Lg) = 0$.

L'integrale d'energia assume la seguente forma:

$$(Lf, f) = \int_0^\ell (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2}p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2}p(\ell)|f(\ell)|^2, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (\text{IV.3})$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Se $q(x) \geq q_{min}$ per ogni $x \in [0, \ell]$, l'integrale d'energia (Lf, f) soddisfa

$$(Lf, f) \geq q_{min}\|f\|_2^2, \quad f \in \mathcal{M}_L.$$

Quindi tutti gli autovalori di L (che hanno un'autofunzione in \mathcal{M}_L) sono reali e cadono nell'intervallo $[q_{min}, +\infty)$. Se q_{min} fosse un autovalore di L con la corrispondente autofunzione $0 \neq f \in \mathcal{M}_L$, allora la (IV.3) implicherebbe che valgono le condizioni di Neumann negli estremi dell'intervallo ($h_2 = H_2 = 0$), $q(x) \equiv q_{min}$ è costante e l'autofunzione stessa è costante. In tutti gli altri casi gli autovalori cadono nell'intervallo $(q_{min}, +\infty)$.

1.1 Funzione di Green

Supponiamo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L . Consideriamo il problema al contorno

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.4})$$

$$h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0, \quad (\text{IV.5})$$

dove $f \in C(0, \ell) \cap L^2(0, \ell)$. Dato che $\lambda = 0$ non è autovalore dell'operatore L , la soluzione del problema al contorno (IV.4)-(IV.5) nella classe \mathcal{M}_L è unica. Costruiamo ora la soluzione di questo problema.

Siano v_1 e v_2 soluzioni non nulle (reali) dell'equazione omogenea $Lv = 0$ che soddisfano le condizioni

$$h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0) = 0, \quad H_1 v_2(\ell) + H_2 v_2'(\ell) = 0. \quad (\text{IV.6})$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie segue che queste soluzioni esistono ed appartengono alla classe $C^2[0, \ell]$. Le soluzioni lineari v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Infatti, nel caso contrario $v_1(x) = cv_2(x)$ per qualche $0 \neq c \in \mathbb{R}$ e, di conseguenza, in base alla (IV.6) la soluzione v_1 soddisfa anche la seconda condizione al contorno (IV.5). Ciò significa che v_1 è un'auto-funzione dell'operatore L corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$, contrariamente all'ipotesi; inoltre segue che in tal caso $v_1 \in \mathcal{M}_L$. Perciò il determinante Wronskiano vale

$$w(x) = \det \begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0, \quad x \in [0, \ell].$$

Allora

$$(pw)'(x) = (v_1(pv_2') - v_2(pv_1'))' = v_1(pv_2')' - v_2(pv_1')' = -v_1qv_2 + v_2qv_1 \equiv 0.$$

Quindi risulta l'identità

$$pw \equiv p(0)w(0), \quad x \in [0, \ell]. \quad (\text{IV.7})$$

Cercheremo la soluzione del problema (IV.4)-(IV.5) mediante il metodo della variazione delle costanti,

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x). \quad (\text{IV.8})$$

Allora $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ soddisfano il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(x)/p(x) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

con determinante $w(x) \neq 0$. Risolvendo questo sistema ed utilizzando l'identità (IV.7), si ottiene

$$c_1'(x) = \frac{v_2(x)f(x)}{pw}, \quad c_2'(x) = -\frac{v_1(x)f(x)}{pw}. \quad (\text{IV.10})$$

Per soddisfare le condizioni al contorno (IV.5), osserviamo che esistono due costanti d'integrazione c_1 e c_2 tali che

$$u(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) - \frac{v_1(x)}{pw} \int_x^\ell v_2(y) f(y) dy - \frac{v_2(x)}{pw} \int_0^x v_1(y) f(y) dy.$$

Calcolando la derivata si trova

$$u'(x) = c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) - \frac{v_1'(x)}{pw} \int_x^\ell f(y) v_2(y) dy - \frac{v_2'(x)}{pw} \int_0^x v_1(y) f(y) dy.$$

Tenendo conto dalle condizioni (IV.6), otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= h_1 u(0) - h_2 u'(0) = c_2 [h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0)]; \\ 0 &= H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = c_1 [H_1 v_1(\ell) + H_2 v_1'(\ell)], \end{aligned}$$

e quindi, in virtù del fatto che le espressioni tra parentesi quadrate non si annullano, troviamo $c_1 = c_2 = 0$. In altre parole,

$$u(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y) f(y) dy, \quad (\text{IV.11})$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y) &= -\frac{1}{pw} \begin{cases} v_1(x) v_2(y), & 0 \leq x < y \leq \ell, \\ v_2(x) v_1(y), & 0 \leq y < x \leq \ell, \end{cases} \\ &= -\frac{1}{pw} v_1(\min(x, y)) v_2(\max(x, y)). \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

La funzione $\mathcal{G}(x, y)$ è detta *funzione di Green* del problema al contorno (IV.4)-(IV.5) o dell'operatore L . **Tale** nucleo è reale, simmetrico e continuo. Inoltre, vale l'uguaglianza

$$\frac{\partial \mathcal{G}(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}(y-0, y)}{\partial x} = -\frac{w(y)}{pw} = -\frac{1}{p(y)}, \quad y \in (0, \ell). \quad (\text{IV.13})$$

Consideriamo l'operatore integrale G su $L^2(0, \ell)$ con nucleo $\mathcal{G}(x, y)$. Allora **tale** nucleo è reale, simmetrico e continuo. Dunque G è un operatore lineare autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L^2(0, \ell)$. Siccome $u = Gf$ appartiene ad \mathcal{M}_L per ogni $f \in C(0, \ell) \cap L^2(0, \ell)$, il dominio \mathcal{M}_L è strettamente contenuto nell'immagine dell'operatore integrale G . Ne segue facilmente che l'immagine di G (cioè, $\{Gf : f \in L^2(0, \ell)\}$) coincide con il dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} di L . Infatti, $\bar{L} = G^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_L = D(L) & \xrightarrow{L} & C[0, \ell] \\ \text{imm.} \downarrow & & \downarrow \text{imm.} \\ G[L^2(0, \ell)] = D(\bar{L}) & \xrightarrow{\bar{L}=G^{-1}} & L^2(0, \ell) \end{array}$$

Nel caso in cui $\lambda = 0$ è autovalore del problema (IV.4)-(IV.5), bisogna scegliere qualche $\mu \in \mathbb{R}$ che non è autovalore, e riscrivere (IV.4)-(IV.5) nella forma equivalente

$$(L - \mu)u \equiv -(pu')' + (q - \mu)u = f(x) - \mu u(x), \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.14})$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (\text{IV.15})$$

Partendo dalle due soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $(L - \mu)u = 0$ che soddisfano le condizioni (IV.6) e quindi sono linearmente indipendenti, arriviamo ad una funzione di Green $\mathcal{G}(x, y; \mu)$ ed un operatore integrale $G(\mu)$ dipendente di μ tali che

$$u = G(\mu) [f - \mu u].$$

Quest'ultima si può scrivere nella forma dell'equazione integrale di Fredholm

$$u(x) + \mu \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) u(y) dy = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y; \mu) f(y) dy, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (\text{IV.16})$$

Il dominio dell'estensione autoaggiunta \bar{L} di L [o di $L - \mu$] coincide con l'immagine dell'operatore integrale $G(\mu)$.

Esempio IV.10 Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$-u'' = f(x), \quad h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0.$$

Le soluzioni v_1 e v_2 dell'equazione omogenea $-u'' = 0$ che soddisfano le condizioni (IV.6), hanno la forma (tranne un fattore costante)

$$v_1(x) = h_1 x + h_2, \quad v_2(x) = H_1 \ell + H_2 - H_1 x,$$

e quindi $w(x) = -h_1(H_1 \ell + H_2) - h_2 H_1$ si annulla se e solo se $h_1 = H_1 = 0$ (cioè, condizioni di Neumann in ambedue gli estremi). Se $h_1 + H_1 > 0$, si trova per la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \begin{cases} \frac{[h_1 x + x_2][H_1(\ell - y) + H_2]}{h_1(H_1 \ell + H_2) + h_2 H_1}, & 0 \leq x < y \leq \ell, \\ \frac{[H_1(\ell - x) + H_2][h_1 y + h_2]}{h_1(H_1 \ell + H_2) + h_2 H_1}, & 0 \leq y < x \leq \ell. \end{cases}$$

Per trovare gli autovalori, cerchiamo le soluzioni $v_1(x, \lambda)$ e $v_2(x, \lambda)$ dell'equazione omogenea $-u'' = \lambda u$ che soddisfano le condizioni (IV.6), mentre $\lambda > 0$. Otteniamo

$$\begin{aligned} v_1(x, \lambda) &= h_2 \sqrt{\lambda} \cos(x\sqrt{\lambda}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda}); \\ v_2(x, \lambda) &= H_2 \sqrt{\lambda} \cos((\ell - x)\sqrt{\lambda}) + H_1 \sin((\ell - x)\sqrt{\lambda}), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} w(x) &= v_1(0, \lambda)v_2'(0, \lambda) - v_1'(0, \lambda)v_2(0, \lambda) \\ &= \sqrt{\lambda} \left[(h_2H_2\lambda - h_1H_1) \sin(\ell\sqrt{\lambda}) - (h_2H_1 + h_1H_2) \sqrt{\lambda} \cos(\ell\sqrt{\lambda}) \right]. \end{aligned}$$

Un numero $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se $w(x) \equiv 0$. Sotto le condizioni di Dirichlet ($h_2 = H_2 = 0$) e sotto quelle di Neumann ($h_1 = H_1 = 0$) segue

$$\sin(\ell\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Quindi gli autovalori e le autofunzioni sono

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots, & u_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad [\text{Dirichlet}] \\ n = 0, 1, 2, \dots, & u_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \quad [\text{Neumann}] \end{cases}$$

Sotto le altre condizioni (cioè, se $h_2H_1 + h_1H_2 > 0$), $\lambda = 0$ non è mai autovalore e $\lambda > 0$ è autovalore se e solo se è una radice positiva dell'equazione trascendente⁴

$$\cotg(\ell\sqrt{\lambda}) = \frac{h_2H_2\lambda - h_1H_1}{(h_2H_1 + h_1H_2)\sqrt{\lambda}}.$$

C'è un numero infinito di tali radici (infatti, una successione crescente λ_n che tende a $+\infty$) ed ogni radice corrispondente all'autofunzione

$$u_n(x, \lambda) = h_2\sqrt{\lambda_n} \cos(x\sqrt{\lambda_n}) + h_1 \sin(x\sqrt{\lambda_n}).$$

Le radici $\sqrt{\lambda_n}$ si trovano più facilmente nel modo grafico. Non ci sono autovalori fuori dell'intervallo $[0, +\infty)$.

1.2 Riduzione ad un'equazione integrale

Facciamo vedere che il problema di Sturm-Liouville può essere ridotto ad un'equazione integrale di Fredholm con nucleo reale, simmetrico e continuo $\mathcal{G}(x, y)$.

Teorema IV.11 *Il problema al contorno*

$$Lu = \lambda u + f, \quad u \in D(\bar{L}), \quad f \in C(0, \ell) \cap L^2(0, \ell), \quad (\text{IV.17})$$

⁴Ponendo $x = \sqrt{\lambda}$, $\alpha = h_2H_1 + h_1H_2 > 0$, $\beta = h_2H_2 \geq 0$ e $\gamma = h_1H_1 \geq 0$ con $\beta + \gamma > 0$, si vede subito che i grafici di $(\alpha x)/(\beta x^2 - \gamma)$ e $\text{tg}(\ell x)$ hanno un numero infinito di punti di intersezione $x > 0$.

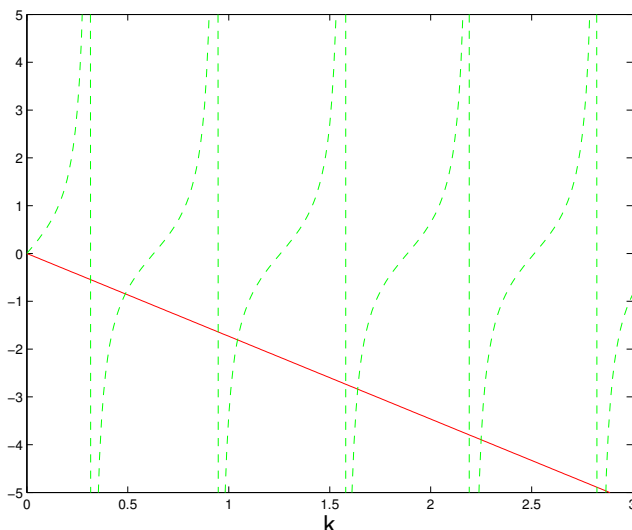


Figura IV.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni $y = \tan(xL)$ e $y = -k \tan \alpha$ per $L = 5$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Gli autovalori sono i valori di $k > 0$ corrispondenti ai loro punti di intersezione.

con la condizione che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy + \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)f(y) dy, \quad u \in L^2(0, \ell), \quad (\text{IV.18})$$

dove $\mathcal{G}(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L . Inoltre, le soluzioni u dei problemi equivalenti (IV.17) e (IV.18) appartengono ad \mathcal{M}_L .

Dimostrazione. Se $u(x)$ è una soluzione del problema al contorno (IV.17), allora

$$u(x) = (G[\lambda u + f])(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)[\lambda u(y) + f(y)] dy, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

cioè $u(x)$ soddisfa l'equazione integrale (IV.18).

Inversamente, supponiamo che la funzione $u_0 \in L^2(0, \ell)$ soddisfi l'equazione integrale (IV.18). Se G denota l'operatore integrale con nucleo $\mathcal{G}(x, y)$, allora $u_0 = G(\lambda u_0 + f) \in D(\bar{L})$ e $\bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. Dall'uguaglianza

$$u_0(x) = - \frac{v_1(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}$$

segue che $u_0 \in C[0, \ell]$, poichè le funzioni sotto il segno degli integrali appartengono ad $L^1(0, \ell)$. In tal caso segue dall'equazione precedente che $u_0 \in C^1[0, \ell]$ con derivata

$$u_0'(x) = - \frac{v_1'(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2'(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}.$$

Da quell'ultima equazione segue che $u_0 \in C^2[0, \ell]$. Inoltre, dalla (IV.6) segue che $u_0(x)$ soddisfa le condizioni al contorno (IV.2). Dunque $u_0 \in \mathcal{M}_L$. Di conseguenza, $Lu_0 = \bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$. \square

Applicando il teorema precedente al caso $f = 0$, concludiamo che ogni autofunzione dell'operatore L (in principio appartenente a $D(\bar{L})$) appartiene ad \mathcal{M}_L . Inoltre, tutte le autofunzioni appartengono a $C[0, \ell]$. Quindi il problema al contorno per $f = 0$ (cioè, il problema agli autovalori) è equivalente a quello agli autovalori dell'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy \quad (\text{IV.19})$$

in $C[0, \ell]$ oppure in $L^2(0, \ell)$, a condizione che $\lambda = 0$ non sia autovalore dell'operatore L .

Eliminiamo ora l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia un autovalore dell'operatore L . Per farlo, sia $\mu_0 \in \mathbb{R}$ un numero che non è un autovalore. Allora $\mu = 0$ non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q - \mu_0)u = \mu u, \quad (\text{IV.20})$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (\text{IV.21})$$

Ma $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$ e $D(\bar{L}) = D(\bar{L}_1)$. Quindi il problema di Sturm-Liouville (IV.1)-(IV.2) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = (\lambda - \mu_0) \int_0^\ell \mathcal{G}_1(x, y)u(y) dy, \quad (\text{IV.22})$$

dove $\mathcal{G}_1(x, y)$ è la funzione di Green dell'operatore L_1 .

1.3 Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni

Abbiamo dunque stabilito l'equivalenza tra il problema di Sturm-Liouville omogeneo ed il problema agli autovalori per l'equazione integrale omogenea

(IV.22) con nucleo integrale $\mathcal{G}_1(x, y)$ reale, simmetrico e continuo. Gli autovalori λ del problema (IV.1)-(IV.2) sono collegati ai numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ con la relazione $\mu = \lambda - \mu_0$, mentre le corrispondenti autofunzioni coincidono. Quindi, per il problema di Sturm-Liouville sono validi tutti gli enunciati della teoria delle equazioni integrali con nucleo continuo, reale e simmetrico. In particolare⁵ *l'insieme degli autovalori $\{\lambda_k\}$ di questo problema non è vuoto e non ha punti di accumulazione finiti; gli autovalori sono reali e sono anche di molteplicità finita; le autofunzioni possono essere scelte reali ed ortonormali ed appartengono a $C^2[0, \ell]$.*

Il problema di Sturm-Liouville ha alcune proprietà specifiche.

- 1) *Gli autovalori appartengono all'intervallo $[q_{\min}, \infty)$ dove $q_{\min} = \min_{x \in [0, \ell]} q(x)$.*

Infatti, per $f \in \mathcal{M}_L$ si ha

$$\begin{aligned} (Lf, f) &= \int_0^\ell (p|f'|^2 + q|f|^2) dx + \frac{h_1}{h_2}p(0)|f(0)|^2 + \frac{H_1}{H_2}p(\ell)|f(\ell)|^2 \\ &\geq q_{\min}\|f\|_2^2, \end{aligned}$$

dove gli ultimi termini del secondo membro si annullano per $h_2 = 0$ o per $H_2 = 0$, rispettivamente. Quindi, se λ è un autovalore di L con corrispondente autofunzione u , allora $u \in \mathcal{M}_L$ e $\lambda\|u\|_2^2 = (Lu, u) \geq q_{\min}\|u\|_2^2$, e dunque $\lambda \geq q_{\min}$.

- 2) *L'insieme degli autovalori è infinito numerabile.* Infatti, se quest'insieme fosse finito, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, il nucleo $\mathcal{G}_1(x, y)$ sarebbe degenerare:

$$\mathcal{G}_1(x, y) = \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k + 1}, \quad (\text{IV.23})$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sono i corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome $\varphi_k \in C^2[0, \ell]$, risulterebbe una contraddizione con la (IV.13):

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1(y+0, y)}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{G}_1(y+0, y)}{\partial x} = 0, \quad y \in (0, \ell).$$

- 3) *Ogni autovalore è semplice.* Sia λ_0 un autovalore. Allora la corrispondente autofunzione u soddisfa $Lu = \lambda_0 u$ e le due condizioni al contorno (IV.6) [per $v_1 = v_2 = u$]. Ciascuna di queste condizioni definisce un sottospazio di $L^2(0, \ell)$ di dimensione 1. Quindi l'autospazio corrispondente all'autovalore λ_0 è unidimensionale.

⁵Sfruttiamo il fatto che il corrispondente operatore integrale K è compatto e autoaggiunto su $L^2(\Omega)$. Ciò si deve alla stima $\int_\Omega \int_\Omega |\mathcal{G}_1(x, y)|^2 dx dy < +\infty$.

Le condizioni al contorno (IV.2) si dicono *separate*, poichè riguardano i valori e le derivate della u in estremi diversi dell'intervallo $(0, \ell)$. Più generalmente, per $u, v \in C^2[0, \ell]$ risulta dopo due integrazioni per parti:

$$(Lu, v) - (u, Lv) = [p(u\bar{v}' - u'\bar{v})]_0^\ell.$$

La parte a destra si annulla se u, v soddisfano le condizioni separate (IV.2). Purtroppo si annullano anche se consideriamo le condizioni non separate

$$\sqrt{p(0)} u(0) = \pm \sqrt{p(\ell)} u(\ell), \quad \sqrt{p(0)} u'(0) = \pm \sqrt{p(\ell)} u'(\ell),$$

per la u e per la v , dove bisogna scegliere il segno $+$ due volte oppure il segno meno due volte. In tal caso si può introdurre il dominio \mathcal{M}_L ed estenderlo ad un dominio su cui l'operatore differenziale L è autoaggiunto.

Per esempio, consideriamo il problema di Sturm-Liouville con condizioni **periodiche**

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\ell), \quad u'(0) = u'(\ell).$$

In tal caso gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2, & n = 0, 1, 2, \dots \\ u_0 = 1, \quad u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\frac{2n\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tranne per l'autovalore $\lambda_0 = 0$, tutti gli autospazi hanno la dimensione 2. D'altra parte, per il problema di Sturm-Liouville con condizioni antiperiodiche

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = -u(\ell), \quad u'(0) = -u'(\ell),$$

gli autovalori e le autofunzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{\ell}\right)^2, & n = 1, 2, 3, \dots \\ u_n(x) = c_1 \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) + c_2 \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right), & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

In questo caso tutti gli autospazi hanno la dimensione 2.

Siano $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ gli autovalori della L e $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate. Siccome il problema agli autovalori è equivalente a quello per un'equazione integrale con nucleo continuo reale e simmetrico, il sistema delle

autofunzioni è completo in $L^2(0, \ell)$. In altre parole, ogni funzione $f \in L^2(0, \ell)$ può essere sviluppata in una serie

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k, \quad (\text{IV.24})$$

dove

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\ell} \left| f(x) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k(x) \right|^2 dx = 0.$$

Consideriamo ora $Lu = -u''$ con le condizioni **antiperiodiche** $u(0) = -u(L)$ e $u'(0) = -u'(L)$. Allora $\lambda = 0$ non è autovalore, $v_1(x) = (L/2) - x$ soddisfa $Lv_1 = 0$ con $v_1(0) = -v_1(L)$, e $v_2(x) = 1$ soddisfa $Lv_2 = 0$ con $v_2'(0) = -v_2'(L)$, mentre il Wronskiano $v_1 v_2' - v_1' v_2 = 1$. Ponendo $u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$ arriviamo al sistema lineare

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}$$

con soluzione $c_1'(x) = f(x)$ e $c_2'(x) = (x - \frac{1}{2}L)f(x)$. Quindi $c_1(x) = c_1 + \int_0^x f(y) dy$ e $c_2(x) = c_2 + \int_0^x (y - \frac{L}{2})f(y) dy$, e dunque

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 \left(\frac{1}{2}L - x \right) + c_2 + \left(\frac{1}{2}L - x \right) \int_0^x f(y) dy + \int_0^x \left(y - \frac{1}{2}L \right) f(y) dy, \\ u'(x) &= -c_1 - \int_0^x f(y) dy. \end{aligned}$$

Sostituendo le condizioni al contorno otteniamo

$$c_1 = -\frac{1}{2} \int_0^L f(y) dy, \quad c_2 = \frac{1}{2} \int_0^L (L - y) f(y) dy.$$

Di conseguenza,

$$u(x) = \int_0^L \mathcal{G}_{\text{antiper.}}(x, y) f(y) dy, \quad (\text{IV.25})$$

dove

$$\mathcal{G}_{\text{antiper.}}(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}L - |x - y| \right).$$

1.4 Alcuni esempi delle funzioni di Green

In questo paragrafo presentiamo alcuni esempi per cui $\lambda = 0$ è autovalore semplice. In tal caso esiste la soluzione unica del problema di Sturm-Liouville soltanto se il termine non omogeneo verifica un vincolo lineare ed omogeneo.

Esempio IV.12 Sotto le condizioni di **Neumann** $u'(0) = -u'(L) = 0$ risulta

$$c_1 = -\frac{1}{2} \int_0^L f(y) dy = 0,$$

ristringendo così l'insieme delle f per cui esiste una soluzione. Dunque

$$u(x) = c_2 + \left(\frac{1}{2}L - x\right) \int_0^x f(y) dy + \int_0^x \left(y - \frac{1}{2}L\right) f(y) dy = c_2 - \int_0^x (x - y) f(y) dy.$$

Imponendo la condizione $\int_0^L u(y) dy = 0$, otteniamo

$$c_2 = \frac{1}{2L} \int_0^L (L - y)^2 f(y) dy.$$

Quindi $u(x)$ ha la forma (IV.25), dove

$$\mathcal{G}_N(x, y) = \frac{1}{2L} (L - \max(x, y))^2.$$

Esempio IV.13 Calcoliamo ora la funzione di Green sotto le condizioni **periodiche**. Partiamo dalle espressioni

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 x + c_2 - \int_0^x \int_0^z f(y) dy dz = c_1 x + c_2 - \int_0^x (x - y) f(y) dy, \\ u'(x) &= c_1 - \int_0^x f(y) dy. \end{aligned}$$

Quindi da $u'(0) = u'(L)$ segue la condizione necessaria $\int_0^L f(y) dy = 0$ per l'esistenza di una soluzione. Da $u(0) = u(L)$ seguono

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{L} \int_0^L (L - y) f(y) dy, \\ u(x) &= c_2 + \frac{x}{L} \int_0^L (L - y) f(y) dy - \int_0^x (x - y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Per imporre l'unicità, supponiamo che $\int_0^L u(y) dy = 0$. Allora

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{1}{2L} \int_0^L y(L - y) f(y) dy \\ &= -\frac{1}{2L} \int_0^L y(L - y) f(y) dy - \frac{1}{2L} x(L - x) \int_0^L f(y) dy. \end{aligned}$$

Quindi $u(x)$ ha la forma (IV.19), dove

$$\mathcal{G}_{\text{per.}}(x, y) = -\frac{1}{2L}|x - y|(L - |x - y|).$$

2 Problemi di Sturm-Liouville singolari

Finora ci siamo limitati ai problemi di Sturm-Liouville detti *regolari*. Ciò vuol dire che l'equazione differenziale ha la forma

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = \lambda u, \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{IV.26})$$

dove $p \in C^1[0, l]$ è strettamente positiva (anche agli estremi dell'intervallo $[0, l]$) e $q \in C[0, l]$ è una funzione reale. Nelle applicazioni appaiono, purtroppo, problemi di Sturm-Liouville in cui la funzione p è positiva all'interno dell'intervallo $(0, l)$ e si annulla ad uno (o ambedue) degli estremi. Esistono anche applicazioni importanti in cui l'intervallo è illimitato. Tali problemi di Sturm-Liouville si dicono *singolari*.

Un esempio di un problema di Sturm-Liouville singolare è quello di Legendre:

$$Lu = -((1 - x^2)u)'$$

definito su un dominio denso in $L^2(-1, 1)$ che contiene tutti i polinomi. Gli autovalori e le corrispondenti autofunzioni sono $\lambda_n = n(n + 1)$ e il polinomio di Legendre $P_n(x)$ [$n = 0, 1, 2, \dots$].

La teoria dei problemi di Sturm-Liouville singolari è stata principalmente sviluppata da Weyl (1908).⁶ L'esistenza di uno zero della p all'estremo $x = 0$ implica l'impossibilità di convertire l'equazione differenziale in un'equazione della forma $y'' + \dots = 0$ con condizioni iniziali di tipo $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_1$. Ciò compromette in modo serio la costruzione della funzione di Green e la conversione del problema di Sturm-Liouville in un'equazione integrale con nucleo hermitiano. Un'altra difficoltà è la descrizione delle condizioni al contorno che conducono ad un operatore autoaggiunto e quindi ad una teoria spettrale. La terza difficoltà consiste nella possibilità dell'esistenza di spettro continuo. Ciò capita in particolare per l'equazione di Schrödinger radiale con potenziale che tende a zero se $|x| \rightarrow \infty$, per cui \mathbb{R}^+ è lo spettro continuo dell'operatore di Sturm-Liouville. Tutto quanto vuol dire che non c'è alcuna speranza di una teoria generale **abbastanza** elementare. Invece, **se non vorremmo generalizzare la teoria di Sturm-Liouville in modo sostanziale**, bisogna trattare le applicazioni in modo ad hoc.

⁶Hermann Weyl [1885-1955]

Esempio IV.14 Sia $\nu \geq 0$. Consideriamo il problema al contorno

$$L_\nu u \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu, \quad 0 < x < 1, \quad (\text{IV.27})$$

$$u(x) = O(x^\gamma), \quad x \rightarrow 0; \quad \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, \quad (\text{IV.28})$$

dove $\gamma = \min(\nu, 1)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. Sia \mathcal{M}_{L_ν} l'insieme di tutte le funzioni $u \in C^2((0, 1]) \cap L^2((0, 1); x dx)$ che soddisfano le condizioni al contorno (IV.28) e la condizione $x^{-1/2}L_\nu u \in L^2(0, 1)$. Quest'insieme è denso nello spazio di Hilbert $L^2((0, 1); x dx)$ in cui verrà studiato il problema al contorno.

Dimostriamo ora che l'operatore L_ν è positivo. Infatti, nel prodotto scalare di $L^2(0, 1)$ si ha per $u \in \mathcal{M}_{L_\nu}$

$$\begin{aligned} (L_\nu u, u) &= - \int_0^1 (xu')' \bar{u} dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx \\ &= \int_0^1 x|u'|^2 dx - [xu'\bar{u}]_{x=0}^1 + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx \\ &= \int_0^1 x|u'|^2 dx + \nu^2 \int_0^1 \frac{|u|^2}{x} dx + \frac{\alpha}{\beta}|u(1)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza, tutti gli autovalori dell'operatore L_ν sono non negativi. Affinchè $\lambda = 0$ sia autovalore dell'operatore L_ν , è necessario e sufficiente che $\nu = 0$ ed $\alpha = 0$ [condizione di Neumann all'estremo $x = 1$]; a quest'autovalore corrisponde l'autofunzione costante. Gli autovalori sono anche semplici.

Discutiamo ora il caso $\lambda > 0$. In tal caso le uniche soluzioni della (IV.27) limitate per $x \rightarrow 0^+$ sono i multipli della funzione $J_\nu(x)$. Una tale soluzione soddisfa la condizione (IV.28) se e solo se

$$\alpha J_\nu(\sqrt{\lambda}) + \beta \sqrt{\lambda} J'_\nu(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

cioè, se e solo se $\mu = \sqrt{\lambda}$ è una radice dell'equazione (II.43). Enumerando questi zeri da $0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \dots$, otteniamo gli autovalori (soltanto quelli diversi da 0) $\lambda_k^{(\nu)} = [\mu_k^{(\nu)}]^2$ e le corrispondenti autofunzioni $J_\nu(\mu_k^{(\nu)}x)$ ($k = 1, 2, \dots$). Per $\nu = \alpha = 0$ si aggiunga l'autovalore $\lambda_0^{(0)} = 0$ con la corrispondente autofunzione costante.

Calcoliamo ora la funzione di Green nel caso $\nu = 0$. Per $\nu = 0$ le funzioni $v_1(x) = 1$ e $v_2(x) = \beta - \alpha \log(x)$ soddisfano l'equazione (IV.27) e, rispettivamente, alla prima e alla seconda condizione (IV.28). Quindi le soluzioni dell'equazione differenziale

$$L_0 u \equiv -(xu')' = xf(x)$$

hanno la forma

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x), \quad (\text{IV.29})$$

dove

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = -f(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.30})$$

Sia $\alpha > 0$ (cioè, escludiamo la condizione di Neumann in $x = 1$). Dunque $c_1'(x) = [\log(x) - \frac{\beta}{\alpha}]xf(x)$ e $c_2'(x) = xf(x)/\alpha$. Quindi

$$c_1(x) = c_1 + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] yf(y) dy, \quad c_2(x) = c_2 - \frac{1}{\alpha} \int_x^1 yf(y) dy.$$

Siccome

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(-\alpha c_2 + \int_0^1 yf(y) dy \right) \log(x) + c_1 + \beta c_2 \\ &\quad + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] yf(y) dy - \frac{\beta}{\alpha} \int_x^1 yf(y) dy - (\log x) \int_0^x yf(y) dy, \end{aligned}$$

si ha $c_2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 yf(y) dy$, e dunque

$$u(x) = c_1 + \int_0^x \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] yf(y) dy - \left[\log(x) - \frac{\beta}{\alpha} \right] \int_0^x yf(y) dy.$$

La seconda condizione

$$0 = u(1) + \frac{\beta}{\alpha} u'(1) = c_1 + \int_0^1 \left[\log(y) - \frac{\beta}{\alpha} \right] yf(y) dy$$

ci dà la costante c_1 . Infine

$$u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) f(y) y dy, \quad (\text{IV.31})$$

dove la funzione di Green

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{\beta}{\alpha} - \log \max(x, y) > 0.$$

Quindi il problema (IV.27)-(IV.28) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) - \lambda \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) u(y) y dy = \int_0^1 \mathcal{G}(x, y) f(y) y dy,$$

da risolvere nello spazio di Hilbert $L^2((0, 1); x dx)$.

Per $\nu > 0$ l'espressione esatta della funzione di Green si trova in [7].

Esempio IV.15 Consideriamo ora il problema al contorno

$$Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = \lambda u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{IV.32})$$

su un intervallo illimitato, dove $\mu > 0$. Sia \mathcal{M}_L l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$ tali che la sua derivata seconda (debole) $u'' \in L^2(\mathbb{R})$. Allora $v_1(x) = e^{\mu x}$ e $v_2(x) = e^{-\mu x}$ soddisfano l'equazione $v_j'' + \mu^2 v_j = 0$ per $j = 1, 2$. Le soluzioni dell'equazione $Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = f$ hanno tutte la forma

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x),$$

dove

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}.$$

Quindi $c_1'(x) = -e^{-\mu x} f(x)/2\mu$ e $c_2'(x) = e^{\mu x} f(x)/2\mu$. Di conseguenza,

$$c_1(x) = c_1 + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{-\mu y} f(y) dy, \quad c_2(x) = c_2 + \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^x e^{\mu y} f(y) dy.$$

Dunque

$$u(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{\mu(x-y)} f(y) dy + \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^x e^{-\mu(x-y)} f(y) dy. \quad (\text{IV.33})$$

Affinchè $u \in L^2(\mathbb{R})$, ci vuole $c_1 = c_2 = 0$. Quindi

$$u(x) = \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy. \quad (\text{IV.34})$$

Si osservi che $\mathcal{G}(x, y) = e^{-\mu|x-y|}/2\mu$ prende il posto della funzione di Green.

Esempio IV.16 Consideriamo ora il problema al contorno

$$\begin{cases} Lu \equiv -u'' + \mu^2 u = \lambda u, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0) = 0, & \text{Dirichlet,} \\ u'(0) = 0, & \text{Neumann,} \\ (\cos \alpha)u(0) - (\sin \alpha)u'(0) = 0, & \text{Condizione mista,} \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

su un intervallo illimitato, dove $\mu > 0$ e $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Sia \mathcal{M}_L l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$ tali che la sua derivata seconda (debole) $u'' \in L^2(\mathbb{R})$ e $(\cos \alpha)u(0) = (\sin \alpha)u'(0)$. Seguendo il metodo dell'esempio precedente troviamo al posto della (IV.33)

$$u(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu} \int_x^\infty e^{\mu(x-y)} f(y) dy + \frac{1}{2\mu} \int_0^x e^{-\mu(x-y)} f(y) dy. \quad (\text{IV.36})$$

Affinchè $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$, ci vuole $c_1 = 0$. Quindi

$$u(x) = c_2 e^{-\mu x} + \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy. \quad (\text{IV.37})$$

Ora sostituiamo la condizione al contorno in $x = 0$. Il risultato finale è

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy - \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{Dirichlet,} \\ \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy + \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{Neumann,} \\ \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty e^{-\mu|x-y|} f(y) dy + F(\mu, \alpha) \int_0^\infty e^{-\mu(x+y)} f(y) dy, & \text{mista,} \end{cases} \quad (\text{IV.38})$$

dove

$$F(\mu, \alpha) = \frac{\mu \sin \alpha - \cos \alpha}{2\mu[\mu \sin \alpha + \cos \alpha]}.$$

Quindi la combinazione lineare convessa

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y) &= \frac{e^{-\mu|x-y|} + 2\mu F(\mu, \alpha) e^{-\mu(x+y)}}{2\mu} \\ &= \frac{\mu \sin \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \mathcal{G}_{\text{Neumann}}(x, y) + \frac{\cos \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} \mathcal{G}_{\text{Dirichlet}}(x, y) \end{aligned}$$

delle funzioni di Green nei casi delle condizioni di Dirichlet e Neumann prende il posto della funzione di Green.

Capitolo V

FUNZIONI DI GREEN

1 Classificazione delle equazioni alle derivate parziali

Consideriamo un'equazione differenziale quasi-lineare (lineare in tutte le sue derivate di ordine maggiore) del secondo ordine

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \quad (\text{V.1})$$

a coefficienti continui $a_{ij}(x)$ definiti su un aperto $G \subset \mathbb{R}^n$. L'equazione (V.1) soddisfa la condizione di simmetria

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \text{ reale}, \quad x \in G. \quad (\text{V.2})$$

Esempi importanti dell'equazione (V.1) sono l'equazione di Poisson n -dimensionale¹

$$\Delta u = -f, \quad (\text{V.3})$$

dove $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ (la delta di Kronecker), l'equazione delle onde n -dimensionale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f, \quad (\text{V.4})$$

dove $a_{00}(x) = 1$ (essendo t la coordinata zero-esima), $a_{ii}(x) = -c^2$ ($i = 1, \dots, n$), e $a_{ij}(x) = 0$ per $i \neq j$, e l'equazione del calore n -dimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad (\text{V.5})$$

¹ Δ è l'operatore di Laplace: $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \nabla \cdot \nabla = \text{div grad}$.

dove $a_{00}(x) = 0$ (essendo t la coordinata zero-esima), $a_{ii}(x) = a^2$ ($i = 1, \dots, n$), e $a_{ij}(x) = 0$ per $i \neq j$.

All'equazione (V.1) si associa la matrice $n \times n$

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n, \quad (\text{V.6})$$

che dipende soltanto dai termini con le derivate parziale del secondo ordine. Grazie alla (V.2), la matrice $A(x)$ è reale e simmetrica. Quindi $A(x)$ ha n autovalori reali $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$. Inoltre esiste una matrice ortogonale $O(x)$ (cioè, $O(x)^T = O(x)^{-1}$ e la $O(x)$ è reale) tale che

$$O(x)^{-1}A(x)O(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)), \quad (\text{V.7})$$

dove la parte a destra è una matrice diagonale. La colonna j -esima della $O(x)$ è un autovettore (di norma euclidea 1) della $A(x)$ corrispondente all'autovalore $\lambda_j(x)$ ($j = 1, \dots, n$). Le colonne della $O(x)$ costituiscono una base ortonormale dello spazio euclideo \mathbb{R}^n .

Introduciamo la seguente classificazione delle equazioni (V.1) che soddisfanno la (V.2). Tale equazione si dice

- a. *ellittica* se tutti gli autovalori $\lambda_j(x)$ sono diversi da zero e hanno lo stesso segno.
- b. *iperbolica* se tutti gli autovalori $\lambda_j(x)$ sono diversi da zero, ma non tutti hanno lo stesso segno. La (V.1) si dice *di tipo iperbolico normale* se è iperbolica e tutti gli autovalori tranne uno hanno lo stesso segno.
- c. *parabolica* se almeno uno degli autovalori (ma non tutti) si annullano. La (V.1) si dice *di tipo parabolico normale* se è parabolica e tutti gli autovalori tranne uno hanno lo stesso segno.

Torniamo agli esempi (V.3), (V.4) e (V.5):

(V.3): Si ha $A(x) = \text{diag}(1, \dots, 1)$ di ordine n . Tutti gli autovalori sono uguali ad 1 e quindi l'equazione di Poisson è ellittica.

(V.4): Si ha $A(x) = \text{diag}(1, -c^2, \dots, -c^2)$ di ordine $n+1$. Uno degli autovalori è uguale ad 1 e gli altri sono uguali a $-c^2$. Quindi l'equazione delle onde è di tipo iperbolico normale.

(V.5): Si ha $A(x) = \text{diag}(0, -a^2, \dots, -a^2)$ di ordine $n+1$. Uno degli autovalori si annulla e gli altri sono uguali a $-a^2$. Quindi l'equazione del calore è di tipo parabolico normale.

Osserviamo che in principio la classificazione della (V.1) dipende dalla scelta del punto $x \in G$. Per la maggior parte delle equazioni della fisica matematica il segno degli autovalori (spesso gli autovalori stessi) e dunque la classificazione non dipende da $x \in G$ (tranne in qualche punto eccezionale, spesso di frontiera). Un'eccezione notevole è l'equazione di Tricomi

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{V.8})$$

dove $(x, y) \in G = \mathbb{R}^2$. In tal caso $A(x, y) = \text{diag}(y, 1)$, $\lambda_1(x, y) = y$ e $\lambda_2(x, y) = 1$. Quindi la (V.8) è ellittica se $y > 0$, parabolica se $y = 0$ e iperbolica se $y < 0$.

2 Problemi agli autovalori multidimensionali

2.1 Impostazione del problema agli autovalori

Consideriamo il seguente problema al contorno omogeneo lineare per un'equazione di tipo ellittico:

$$-\text{div}(p \text{grad } u) + qu = \lambda u, \quad x \in \Omega, \quad (\text{V.9})$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (\text{V.10})$$

Supponiamo che

$$\begin{cases} p \in C^1(\bar{\Omega}), & q \in C(\bar{\Omega}); & p(x) > 0, & q(x) \in \mathbb{R}, & x \in \bar{\Omega}, \\ \alpha \in C(\partial \Omega), & \beta \in C(\partial \Omega), \\ \alpha(x) \geq 0, & \beta(x) \geq 0, & \alpha(x) + \beta(x) > 0, & x \in \partial \Omega. \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

In alcuni casi supponiamo inoltre che $q(x) \geq 0$ per $x \in \bar{\Omega}$. Notiamo i seguenti casi particolari:

$$\begin{cases} \alpha(x) \equiv 1, & \beta(x) \equiv 0, & \text{quindi } u = 0, & x \in \partial \Omega, & [\text{condizione di Dirichlet}] \\ \alpha(x) \equiv 0, & \beta(x) \equiv 1, & \text{quindi } \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial \Omega, & [\text{condizione di Neumann}]. \end{cases}$$

Sia $\partial \Omega_0 = \{x \in \partial \Omega : \min(\alpha(x), \beta(x)) > 0\}$.

Il problema (V.9)-(V.10) consiste nel trovare una funzione $u(x)$ di classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ che soddisfi l'equazione (V.9) in Ω e la condizione (V.10) sulla frontiera $\partial \Omega$. Evidentemente, il problema (V.9)-(V.10) ha sempre la soluzione

nulla, e questa soluzione non ha alcun interesse. Perciò il problema (V.9)-(V.10) deve essere considerato come un problema agli autovalori per l'operatore

$$L = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}) + q.$$

Tutte le funzioni f di classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ che soddisfano la condizione al contorno (V.10) e la condizione $Lf \in L^2(\Omega)$ costituiscono il *dominio* \mathcal{M}_L dell'operatore L . Siccome lo spazio vettoriale $\mathcal{D}(\Omega)$ di tutte le funzioni di classe $C^\infty(\Omega)$ di supporto compatto (cioè, che si annullano fuori di un compatto contenuto in Ω) è denso in $L^2(\Omega)$ ed è contenuto in \mathcal{M}_L , \mathcal{M}_L è denso in $L^2(\Omega)$.

In generale, il dominio \mathcal{M}_L di L non è abbastanza grande per trovare tutte le autofunzioni. Per questa ragione bisogna estendere l'operatore L ad un dominio abbastanza grande per contenere le autofunzioni.

2.2 Formule di Green

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e $v \in C^1(\overline{\Omega})$, è valida la *prima formula di Green*:

$$\int_{\Omega} v Lu dx = \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} pv \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} quv dx. \quad (\text{V.12})$$

Per dimostrare la formula (V.12) prendiamo una regione arbitraria Ω' con frontiera $\partial\Omega'$ una superficie regolare a tratti tale che $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Visto che $u \in C^2(\Omega)$, si ha anche $u \in C^2(\overline{\Omega'})$ e, di conseguenza,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} v Lu dx &= \int_{\Omega'} v [-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu] dx \\ &= - \int_{\Omega'} \operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u) dx + \int_{\Omega'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega'} quv dx. \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema della divergenza (di Gauss) si ottiene

$$\int_{\Omega'} v Lu dx = \int_{\Omega'} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega'} pv \frac{\partial u}{\partial n'} dS' + \int_{\Omega'} quv dx,$$

dove $\partial\Omega'$ è la frontiera di Ω' . Facendo tendere Ω' a Ω nell'uguaglianza ottenuta ed utilizzando il fatto che $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, concludiamo che il limite del secondo membro esiste. Quindi esiste anche il limite del primo membro ed è valida l'uguaglianza (V.12). In tal caso l'integrale del primo membro della (V.12) deve essere considerato improprio. I limiti non dipendono della maniera in cui Ω' tende a Ω , poichè gli integrali nelle parte a destra della (V.12) sono assolutamente convergenti.

Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, è valida la *seconda formula di Green*:

$$\int_{\Omega} (v Lu - u Lv) dx = \int_{\partial\Omega} p \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{V.13})$$

Per dimostrare la formula (V.13), scambiamo u e v nella (V.12):

$$\int_{\Omega} u Lv dx = \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} pu \frac{\partial v}{\partial n} dS + \int_{\Omega} qvu dx, \quad (\text{V.14})$$

e sottraiamo l'uguaglianza ottenuta dalla (V.14). Come risultato, si ottiene la seconda formula di Green (V.13).

In particolare per $p(x) \equiv 1$ e $q(x) \equiv 0$, le formule (V.12) e (V.13) di Green si trasformano nelle seguenti uguaglianze:

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = - \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad (\text{V.15})$$

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{V.16})$$

2.3 Proprietà dell'operatore L

1. *L'operatore L è hermitiano:*

$$(Lf, g) = (f, Lg), \quad f, g \in \mathcal{M}_L. \quad (\text{V.17})$$

Infatti, visto che $f, \bar{g} \in \mathcal{M}_L$, si ha $Lf \in L^2(\Omega)$ e $L\bar{g} = \overline{Lg} \in L^2(\Omega)$. In tal caso la seconda formula di Green (V.13), per $u = f$ e $v = \bar{g}$, assume la forma

$$(Lf, g) - (f, Lg) = \int_{\Omega} (\bar{g} Lf - f \overline{Lg}) dx = \int_{\partial\Omega} p \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{V.18})$$

Per dimostrare che si annulla l'ultima parte della (V.18), osserviamo che le funzioni f e \bar{g} soddisfano le condizioni al contorno (V.10):

$$\left(\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left(\alpha \bar{g} + \beta \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (\text{V.19})$$

Per l'ipotesi (V.11), $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ per $x \in \partial\Omega$. Perciò per ogni $x \in \partial\Omega$ il sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari (V.19) ha una soluzione non nulla $(\alpha(x), \beta(x))$, si annulla il suo determinante, cioè

$$\det \begin{bmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial n} \\ \bar{g} & \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} \end{bmatrix} = \left(f \frac{\partial \bar{g}}{\partial n} - \bar{g} \frac{\partial f}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Di conseguenza, è hermitiano l'operatore L .

2. Sia $f \in \mathcal{M}_L$. Ponendo $u = f$ e $v = \bar{f}$ nella prima formula di Green (V.12) e tenendo conto del fatto che $f \in L^2(\Omega)$, si ottiene

$$(Lf, f) = \int_{\Omega} p|\text{grad } f|^2 dx - \int_{\partial\Omega} pf \frac{\partial \bar{f}}{\partial n} dS + \int_{\Omega} q|f|^2 dx. \quad (\text{V.20})$$

Dalla condizione al contorno (V.10) segue che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\beta}f, & \beta(x) > 0, \quad x \in \partial\Omega; \\ f = 0, & \beta(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sostituendo queste relazioni nell'uguaglianza (V.20), si ottiene l'espressione per la forma quadratica

$$(Lf, f) = \int_{\Omega} (p|\text{grad } f|^2 + q|f|^2) dx + \int_{\partial\Omega_0} p \frac{\alpha}{\beta} |f|^2 dS, \quad f \in \mathcal{M}_L, \quad (\text{V.21})$$

dove $\partial\Omega_0$ è la parte di $\partial\Omega$ in cui $\min(\alpha(x), \beta(x)) > 0$. La forma quadratica (Lf, f) , $f \in \mathcal{M}_L$, è detta *integrale d'energia*.

3. Ritorniamo adesso all'operatore di Sturm-Liouville L con dominio \mathcal{M}_L . Allora L è hermitiano su $L^2(\Omega)$ con dominio denso in $L^2(\Omega)$ che ha la seguente proprietà: $(Lf, f) \geq q_{\min} \|f\|_2^2$ per $f \in \mathcal{D}(L)$. In tal caso esiste un'unica estensione autoaggiunta \bar{L} dell'operatore L tale che $(\bar{L}f, f) \geq q_{\min} \|f\|_2^2$ per $f \in \mathcal{D}(\bar{L})$.² Le autofunzioni del problema al contorno (V.9)-(V.10) si cercano nel dominio $D(\bar{L})$.

Proposizione V.1 *Abbiamo le seguenti proprietà:*

- a) *Tutti gli autovalori sono reali e sono contenuti nell'intervallo $[q_{\min}, \infty)$, dove $q_{\min} = \min\{q(x) : x \in \bar{\Omega}\}$.*
- b) *Le autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra loro.*
- c) *Le autofunzioni possono essere scelte reali.*
- d) *Affinchè $\lambda = q_{\min}$ è autovalore di L , è necessario e sufficiente che q sia costante ed $\alpha(x) \equiv 0$. In tal caso l'autofunzione è costante.*

²Vedi Appendix B, Sec. 5.4.

Dimostrazione. Per dimostrare la parte (a), sia $f \in D(\bar{L})$ tale che $\bar{L}f = \lambda f$ e $f \neq 0$. Allora $(\lambda - \bar{\lambda})\|f\|_2 = (\bar{L}f, f) - (f, \bar{L}f) = 0$, e quindi $\lambda = \bar{\lambda}$ è reale. Inoltre, se $q(x) \geq q_{\min}$ per ogni $x \in \Omega$ e λ è autovalore corrispondente all'autofunzione f (cioè, $f \neq 0$ e $\bar{L}f = \lambda f$), allora

$$\lambda\|f\|_2^2 = (\bar{L}f, f) \geq q_{\min}\|f\|_2^2.$$

Per dimostrare la parte (b), consideriamo $f, g \in D(\bar{L})$ non banali tali che $\bar{L}f = \lambda f$ e $\bar{L}g = \mu g$; in tal caso $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si controlla facilmente che $(\lambda - \mu)(f, g) = (\bar{L}f, g) - (f, \bar{L}g) = 0$ e quindi $\lambda = \mu$ oppure $(f, g) = 0$.

Per dimostrare la parte (c), se f è un'autofunzione, il fatto che il corrispondente autovalore è reale implica che anche \bar{f} è una autofunzione. Siccome le parti reale ed immaginaria della f non si possono ambedue annullare quasi ovunque, una di loro è un'autofunzione reale.

Infine,³ per dimostrare la parte (d), sia $\lambda = q_{\min}$ autovalore con corrispondente autofunzione f . Allora dalla (V.21) segue che $\text{grad } f \equiv 0$ (cioè che f è costante) e $qf \equiv q_{\min}f$. \square

3 Equazioni ellittiche

In Cap. IV abbiamo espresso la soluzione unica del problema di Sturm-Liouville **unidimensionale**

$$Lu \equiv -(pu')' + qu = f, \quad 0 < x < \ell, \quad (\text{V.22a})$$

$$h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad H_1u(\ell) + H_2u'(\ell) = 0, \quad (\text{V.22b})$$

dove $\lambda = 0$ non è autovalore, nella forma

$$u(x) = (Gf)(x) = \int_0^L \mathcal{G}(x, y)u(y) dy, \quad (\text{V.23})$$

dove la funzione di Green $\mathcal{G}(x, y)$ è reale, simmetrica e continua e quindi l'operatore integrale G è autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L^2(0, L)$. In questo capitolo estendiamo tali espressioni al caso multidimensionale per due operatori differenziali: quello di Laplace ($L = -\Delta$) e quello di Helmholtz ($L = -\Delta + k^2$).

Se $\lambda = 0$ è autovalore, la soluzione del problema (V.22) esiste se e solo se f è ortogonale a tutte le autofunzioni corrispondenti all'autovalore $\lambda = 0$. Se questo autovalore è semplice e l'autofunzione è φ_0 , allora esiste, per ogni $f \in L^2(0, L)$ che soddisfa $(f, \varphi_0) = 0$, un'unica soluzione u che soddisfa $(u, \varphi_0) = 0$. Tale soluzione verrà scritta nella forma (V.23).

³Ci semplifichiamo la vita supponendo che $f \in \mathcal{M}_L$.

3.1 Equazioni di Laplace e di Poisson

Consideriamo prima il problema al contorno (di Dirichlet)

$$(Lu)(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\Delta u + q(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (\text{V.24a})$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (\text{V.24b})$$

dove Ω è un sottoinsieme aperto, limitato e connesso in \mathbb{R}^n con frontiera $\partial\Omega$ un'ipersuperficie regolare a tratti. Cerchiamo prima la cosiddetta *funzione di Green* $\mathcal{G}_D(x, y)$ tale che⁴

$$\begin{cases} L_y[\mathcal{G}_D(x, y)] = -\Delta_y \mathcal{G}_D(x, y) + q(y)\mathcal{G}_D(x, y) = \delta(x - y), \\ \mathcal{G}_D(x, y) = 0 \text{ per } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{V.25})$$

Allora

$$u(x) = \int_{\Omega} \mathcal{G}_D(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{G}_D}{\partial n_y}(x, y) g(y) d\sigma(y). \quad (\text{V.26})$$

Infatti, per $v(y) = \mathcal{G}_D(x, y)$ we have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(y)v(y) dy &= - \int_{\Omega} v \Delta_y u dy + \int_{\Omega} q(y)u(y)v(y) dy \\ &= - \int_{\Omega} (v \Delta_y u - u \Delta_y v) dy + \int_{\Omega} u(-\Delta_y v + q(y)v(y)) dy \\ &\stackrel{(\text{V.16})}{=} - \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n_y} - u \frac{\partial v}{\partial n_y} \right) d\sigma_y + \int_{\Omega} u(y)\delta(x - y) dy \\ &\stackrel{(\text{V.25})}{=} \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial \mathcal{G}_D}{\partial n_y}(x, y) d\sigma_y + u(x), \end{aligned}$$

implicando la (V.26).

Invece, se consideriamo il problema al contorno (di Neumann)

$$(Lu)(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (\text{V.27a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_x} = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (\text{V.27b})$$

allora esiste una soluzione u del problema di Neumann (V.27) se e solo se $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$, cioè, se e solo se $(f, \varphi_0) = 0$ per $\varphi_0(x) \equiv 1$ autofunzione di L (con condizione di Neumann) corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$. L'unicità

⁴Tecnicamente bisogna utilizzare le distribuzioni [Vedi Appendice D]. Per comodità siamo un pò non rigorosi.

viene garantita richiedendo che $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$. Cerchiamo ora la *funzione di Green* $\mathcal{G}_N(x, y)$ tale che

$$L_y[\mathcal{G}_N(x, y)] = -\Delta_y \mathcal{G}_N(x, y) = \delta(x - y) - \frac{1}{m(\Omega)}, \quad (\text{V.28a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_N}{\partial n_y}(x, y) = 0 \text{ per } y \in \partial\Omega, \quad (\text{V.28b})$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{G}_N(x, y) dx = 0, \quad (\text{V.28c})$$

dove $m(\Omega)$ è la misura di Ω . Allora

$$u(x) = \int_{\Omega} \mathcal{G}_N(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{G}_N}{\partial n_y}(x, y) g(y) d\sigma(y). \quad (\text{V.29})$$

Infatti, per $v(y) = \mathcal{G}_N(x, y)$ we have

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(y)v(y) dy &= - \int_{\Omega} v \Delta_y u dy \\ &= - \int_{\Omega} (v \Delta_y u - u \Delta_y v) dy + \int_{\Omega} u(-\Delta_y v) dy \\ &\stackrel{(\text{V.16})}{=} - \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n_y} - u \frac{\partial v}{\partial n_y} \right) d\sigma_y + \int_{\Omega} u(y) \delta(x - y) dy \\ &\quad - \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} u(y) dy = \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial \mathcal{G}_N}{\partial n_y}(x, y) d\sigma_y + u(x), \end{aligned}$$

piochè $\int_{\Omega} u(y) dy = 0$, implicando la (V.29).

Nei seguenti sottoparagrafi presentiamo alcuni esempi di funzioni di Green per l'equazione di Laplace. Grazie alle simmetrie del dominio Ω , è abbastanza semplice calcolare tali funzioni di Green esplicitamente.

3.1.a Equazione di Laplace nel disco

Consideriamo l'equazione di Laplace (V.39) nel disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < L\}$ sotto le condizioni al contorno

$$u = g \text{ sul bordo } \partial D. \quad (\text{V.30})$$

Ponendo $\Omega = D$, assumiamo che g sia continua sulla circonferenza ∂D , e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. In coordinate polari l'equazione di Laplace ha la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

dove $0 \leq \theta < 2\pi$ (con periodicità) e $0 < r < L$ con continuità della soluzione per $r \rightarrow 0^+$. La separazione delle variabili conduce alle soluzioni $u_0(r)$, $u_m(r) \cos m\theta$ e $u_m(r) \sin m\theta$, dove $m = 0, 1, 2, \dots$ e la funzione $u_m(r)$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_m}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} u_m(r) = 0. \quad (\text{V.31})$$

L'equazione (V.30) è un'equazione di Eulero $[r^2 u_m''(r) + r u_m'(r) - m^2 u_m(r) = 0]$ con la soluzione generale

$$u_m(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln(r), & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m}, & m = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie. La continuità se $r \rightarrow 0^+$ conduce ad una soluzione costante se $m = 0$ e una proporzionale a r^m se $m = 1, 2, \dots$. Quindi la soluzione generale ha la forma

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (\text{V.32})$$

dove $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ sono opportune costanti.

Sostituiamo $r = L$ in (V.32) e applichiamo la condizione al contorno $u(L, \theta) = g(\theta)$. Risulta

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (\text{V.33})$$

Applicando la teoria delle serie di Fourier abbiamo for $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta \\ a_n L^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos n\theta d\theta, & b_n L^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin n\theta d\theta, \end{cases}$$

dove la serie (V.33) è uniformemente convergente in $\theta \in [-\pi, \pi]$ se $g(\theta)$ è continua (con $g(-\pi) = g(\pi)$) e regolare a tratti.

Sostituiamo ora le espressioni per i coefficienti di Fourier nell'espressione per la $u(r, \theta)$. Risulta

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{L} \right)^n \left[\cos n\theta \cos n\hat{\theta} + \sin n\theta \sin n\hat{\theta} \right] \right) g(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{L} \right)^n \cos n(\theta - \hat{\theta}) \right] g(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{L} e^{i(\theta - \hat{\theta})} \right)^n + \left(\frac{r}{L} e^{-i(\theta - \hat{\theta})} \right)^n \right\} \right] g(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left[1 + \left\{ \frac{e^{i(\theta - \hat{\theta})} \frac{r}{L}}{1 - e^{i(\theta - \hat{\theta})} \frac{r}{L}} + \frac{e^{-i(\theta - \hat{\theta})} \frac{r}{L}}{1 - e^{-i(\theta - \hat{\theta})} \frac{r}{L}} \right\} \right] g(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \left(\frac{r}{L} \right)^2}{1 - 2 \frac{r}{L} \cos(\theta - \hat{\theta}) + \left(\frac{r}{L} \right)^2} g(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{L^2 - r^2}{L^2 - 2rL \cos(\theta - \hat{\theta}) + r^2} g(\hat{\theta}) d\hat{\theta},
\end{aligned}$$

il cosiddetto *integrale di Poisson*. Osserviamo che il nucleo di Poisson

$$\frac{1}{2\pi} \frac{L^2 - r^2}{L^2 - 2rL \cos(\theta - \hat{\theta}) + r^2}$$

è simmetrico in r e L e simmetrico in θ e $\hat{\theta}$. Inoltre, è strettamente positivo; le sue uniche singolarità si trovano sulla circonferenza $r = L$ per $\theta = \hat{\theta}$.

Invece, se risolviamo l'equazione di Laplace in D sotto la condizione di Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \text{ sul bordo } \partial D, \tag{V.34}$$

ci vuole la condizione necessaria $\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) d\theta = 0$ per l'esistenza della soluzione. Siccome la derivata normale esterna coincide con quella radiale, cerchiamo la soluzione $u(r, \theta)$ nella forma (V.32) con $a_0 = 0$ (per garantirne l'unicità), dove

$$h(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \tag{V.35}$$

Applicando la teoria delle serie di Fourier risultano

$$na_n L^{n-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad nb_n L^{n-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \sin n\theta d\theta,$$

dove la serie (V.35) è uniformemente convergente in $\theta \in [-\pi, \pi]$ se $h(\theta)$ è continua, regolare a tratti e periodica nel senso che $h(-\pi) = h(\pi)$. Sostituiamo ora le espressioni per i coefficienti di Fourier nell'espressione per la $u(r, \theta)$. Risulta

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{L}\right)^n \left[\cos n\theta \cos n\hat{\theta} + \sin n\theta \sin n\hat{\theta} \right] h(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\ &= \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{L}\right)^n \cos n(\theta - \hat{\theta}) h(\hat{\theta}) d\hat{\theta} \\ &= -\frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(1 - 2\frac{r}{L} \cos(\theta - \hat{\theta}) + \frac{r^2}{L^2} \right) h(\hat{\theta}) d\hat{\theta}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n/n) = -\log(1-z)$ per $|z| < 1$.⁵

3.1.b Equazione di Laplace e funzioni analitiche

In questo sottoparagrafo calcoliamo la funzione di Green per l'equazione di Laplace sul disco. Invece del metodo utilizzato precedentemente e basato sull'analisi di Fourier, adottiamo ora un metodo basato sul teorema integrale di Cauchy per le funzioni analitiche.

Ogni insieme aperto Ω in \mathbb{R}^2 corrisponde ad un unico insieme aperto $\tilde{\Omega}$ in \mathbb{C} nel seguente modo:

$$(x, y) \in \Omega \iff x + iy \in \tilde{\Omega}, \quad z \in \tilde{\Omega} \iff (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \Omega.$$

Ad ogni funzione analitica $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ corrispondono due funzioni $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ che soddisfano alle cosiddette *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (\text{V.36})$$

Infatti, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ per $(x, y) \in \Omega$. Di conseguenza, u and v sono *funzioni armoniche* nel senso che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{V.37})$$

D'altra parte, ogni coppia di funzioni armoniche $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 che soddisfa alle equazioni di Cauchy-Riemann (V.36) determina un'unica funzione analitica $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ per $(x, y) \in \Omega$. Le funzioni armoniche u, v si dicono *coniugate armoniche*.⁶

⁵Si intende il ramo del logaritmo che è una funzione analitica nel semipiano complesso destro con valore $\log(1) = 0$.

⁶Conoscendo u , si può trovare v dalle equazioni di Cauchy-Riemann, ma tranne un termine costante arbitrario.

Consideriamo ora $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < L\}$ e dunque $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < L\}$. Come nella Subsection 3.1.a, cerchiamo una funzione armonica $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa la condizione di Dirichlet (V.30). Sia $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una coniugata armonica di u e sia $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione analitica definita da $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ per $(x, y) \in \Omega$. Scegliendo $\rho \in (0, L)$, applichiamo ora la formula integrale di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z| < \rho.$$

Sia $z^* = \rho^2/\bar{z}$. Allora $|z^*| = \rho^2/|z| > \rho$. Dal Teorema di Cauchy segue

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = 0.$$

Di conseguenza,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} \right] d\zeta. \quad (\text{V.38})$$

Ponendo $\zeta = \rho e^{i\hat{\theta}}$ e $z = r e^{i\theta}$ si calcola facilmente che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} &= \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \frac{\rho^2}{\bar{\zeta}}} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta|\zeta - z|^2} \\ &= \frac{\rho^2 - r^2}{\rho e^{i\hat{\theta}}(\rho e^{i\hat{\theta}} - r e^{i\theta})(\rho e^{-i\hat{\theta}} - r e^{-i\theta})} \\ &= \frac{\rho^2 - r^2}{\rho e^{i\hat{\theta}}(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \hat{\theta}))}. \end{aligned}$$

Sostituendolo nella (V.38) otteniamo

$$\begin{aligned} u(r e^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\hat{\theta}}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho e^{i\hat{\theta}}(\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \hat{\theta}))} i \rho e^{i\hat{\theta}} d\hat{\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\hat{\theta}}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \hat{\theta})} d\hat{\theta}. \end{aligned}$$

Infine, per $\rho \rightarrow L^-$ risulta per $r \in [0, L)$ l'integrale di Poisson

$$u(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\hat{\theta}) \frac{L^2 - r^2}{L^2 + r^2 - 2Lr \cos(\theta - \hat{\theta})} d\hat{\theta}.$$

Sia Ξ un sottoinsieme aperto e semplicemente connesso⁷ di \mathbb{R}^2 tali che $\Xi \subsetneq \mathbb{R}^2$. Secondo il Teorema di Riemann ([12], Vol. III, Th. 1.2) esiste

⁷Cioé, tale che il complementare $\mathbb{R}^2 \setminus \Xi$ è connesso, cioè un dominio senza buchi.

una trasformazione biunivoca e analitica $\tilde{\phi} : \tilde{\Xi} \rightarrow \tilde{\Omega}$. In tal caso anche la trasformazione inversa $\tilde{\phi}^{-1} : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Xi}$ è analitica. Le trasformazioni $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\phi}^{-1}$ si chiamano *trasformazioni conformi*. Definiamo ora $\phi : \Xi \rightarrow \Omega$ da

$$\phi(x, y) = (\operatorname{Re} \tilde{\phi}(x + iy), \operatorname{Im} \tilde{\phi}(x + iy)), \quad (x, y) \in \Xi.$$

Allora ϕ induce una corrispondenza biunivoca tra funzioni armoniche in Ξ e funzioni armoniche in Ω . Le funzioni armoniche in Ξ sono le funzioni $\phi^{-1} \circ u \circ \phi$, dove u è armonica nel disco Ω . Conoscendo le trasformazioni conformi tra Ξ e il disco Ω tali che c'è anche la corrispondenza biunivoca tra i punti delle loro frontiera, si può risolvere l'equazione di Laplace in Ξ sotto la condizione di Dirichlet utilizzando le trasformazioni conformi e l'integrale di Poisson.

3.1.c Equazione di Laplace nel semipiano

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{V.39}$$

nel semipiano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ sotto la condizione $u(x, 0) = u_0(x)$. Siccome $e^{i\lambda x} e^{-|\lambda|y}$ è soluzione dell'equazione di Laplace limitata nel piano superiore qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$, rappresentiamo la soluzione della (V.39) nella forma

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) e^{i\lambda x} e^{-|\lambda|y} d\lambda,$$

dove $c \in L^2(\mathbb{R})$. Sostituendo $y = 0$ si ottiene

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} c(\lambda) d\lambda,$$

che vuol dire che $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ e $\|c\|_2 = (2\pi)^{1/2} \|u_0\|_2$. Invertendo la trasformata di Fourier si ha

$$c(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} u_0(x) dx.$$

Infine otteniamo

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x, \hat{x}; y) u_0(\hat{x}) d\hat{x}, \tag{V.40}$$

dove la funzione di Green ha l'espressione

$$\mathcal{G}(x, \hat{x}; y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-\hat{x})} e^{-|\lambda|y} d\lambda = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + (x - \hat{x})^2}. \tag{V.41}$$

Ovviamente sono operatori lineari limitati le trasformazioni $u_0 \mapsto u(\cdot, y)$ per ogni $y \geq 0$ (da $L^2(\mathbb{R})$ in se stesso) e $u_0 \mapsto u$ (da $L^2(\mathbb{R})$ in $l^2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\})$). Inoltre la trasformazione $u_0 \mapsto u(\cdot, y)$ è limitato da $BC(\mathbb{R})$ [oppure $C_0(\mathbb{R})$] in se stesso, uniformemente in $y \geq y_0$ per ogni $y_0 > 0$.

3.1.d Equazione di Laplace nella sfera n -dimensionale

Per $n \geq 2$ conviene cercare le soluzioni dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ nella regione sferica $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|_2 < L\}$ nella seguente forma:

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{r}{L}\right)^l y(\boldsymbol{\omega}), \quad r > 0, \boldsymbol{\omega} \in S^{n-1}, \quad (\text{V.42})$$

dove $y(\boldsymbol{\omega})$ è una funzione sferica di grado $l = 0, 1, 2, \dots$. Sia $N(l, n)$ il numero delle funzioni sferiche di grado l in n variabili linearmente indipendenti.⁸ Allora esiste una base ortonormale

$$\{y_{l,s}(\boldsymbol{\omega})\}_{s=1, \dots, N(l,n); l=0,1,2, \dots}$$

dello spazio di Hilbert $L^2(S^{n-1})$ che consiste esclusivamente in funzioni sferiche. Data la funzione $g \in L^2(S^{n-1})$, si ha lo sviluppo

$$g(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{N(l,n)} c_{l,s} y_{l,s}(\boldsymbol{\omega}),$$

dove

$$c_{l,s} = (g, y_{l,s}) = \int_{S^{n-1}} g(\boldsymbol{\omega}) \overline{y_{l,s}(\boldsymbol{\omega})} d\boldsymbol{\omega}.$$

In tal caso la funzione armonica $u(r, \boldsymbol{\omega})$ nella regione sferica di raggio L che soddisfa la condizione di Dirichlet $u(L, \boldsymbol{\omega}) = g(\boldsymbol{\omega})$ ha la forma

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^l \sum_{s=1}^{N(l,n)} c_{l,s} y_{l,s}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{S^{n-1}} \mathcal{G}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) g(\hat{\boldsymbol{\omega}}) d\hat{\boldsymbol{\omega}}, \quad (\text{V.43})$$

dove

$$\mathcal{G}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^l \sum_{s=1}^{N(l,n)} y_{l,s}(\boldsymbol{\omega}) \overline{y_{l,s}(\hat{\boldsymbol{\omega}})}. \quad (\text{V.44})$$

La funzione armonica $u(r, \boldsymbol{\omega})$ nella regione sferica che soddisfa la condizione al contorno $\frac{\partial u}{\partial r}(L, \boldsymbol{\omega}) = h(\boldsymbol{\omega})$ ha la forma⁹

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{L}{l} \left(\frac{r}{L}\right)^{l-1} \sum_{s=1}^{N(l,n)} c_{l,s} y_{l,s}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{S^{n-1}} \mathcal{H}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) g(\hat{\boldsymbol{\omega}}) d\hat{\boldsymbol{\omega}}, \quad (\text{V.45})$$

⁸Quindi $N(0, n) = 1$, $N(1, n) = n$, $N(l, 2) = 2$ per $l \geq 1$, $N(l, 3) = 2l + 1$, $N(l, 4) = (l + 1)^2$, e $N(l, n) = \frac{(2l+n-2)(l+n-3)!}{l!(n-2)!}$.

⁹Si spieghi poichè $\mathcal{G}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}})$ e $\mathcal{H}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}})$ dipendono soltanto da (r/L) e $\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}$.

dove

$$\mathcal{H}(r, \boldsymbol{\omega}, \hat{\boldsymbol{\omega}}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{L}{l} \left(\frac{r}{L}\right)^{l-1} \sum_{s=1}^{N(l,n)} y_{l,s}(\boldsymbol{\omega}) \overline{y_{l,s}(\hat{\boldsymbol{\omega}})}. \quad (\text{V.46})$$

Per l'esistenza della funzione armonica, bisogna richiedere $\int_{S^{n-1}} h(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = 0$, mentre per l'unicità richiediamo $\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$.

Per $n = 2$ abbiamo $N(l, 2) = 2 - \delta_{l,0}$, $\boldsymbol{\omega} \equiv \theta \in [0, 2\pi]$, $y_{0,1}(\boldsymbol{\omega}) = (2\pi)^{-1/2}$, $y_{l,1}(\boldsymbol{\omega}) = \pi^{-1/2} \cos(l\theta)$, e $y_{l,2}(\boldsymbol{\omega}) = \pi^{-1/2} \sin(l\theta)$. Dunque

$$\mathcal{G}(r, \theta, \hat{\theta}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{r}{L}\right)^l \cos l(\theta - \hat{\theta}) \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{L^2 - r^2}{L^2 - 2rL \cos(\theta - \hat{\theta}) + r^2}$$

sotto la condizione di Dirichlet non omogenea, e

$$\mathcal{H}(r, \theta, \hat{\theta}) = \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{L}{l} \left(\frac{r}{L}\right)^{l-1} \cos l(\theta - \hat{\theta}) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{L^2}{L^2 - 2rL \cos(\theta - \hat{\theta}) + r^2}$$

sotto la condizione di Neumann non omogenea.

3.1.e Funzione di Green in \mathbb{R}^n

Introducendo $r = \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ e $\boldsymbol{\omega} = (x_1, \dots, x_n)/r$, il Laplaciano ha la seguente forma:

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} (L_B\psi)(\boldsymbol{\omega}), \quad (\text{V.47})$$

dove L_B è il cosiddetto *operatore di Beltrami* n -dimensionale. Applicando il Laplaciano al polinomio omogeneo armonico $r^l y(\boldsymbol{\omega})$ di grado l (essendo $y(\boldsymbol{\omega})$ una funzione sferica) otteniamo

$$(L_B y)(\boldsymbol{\omega}) = l(l + n - 2)y(\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} \in S^{n-1}. \quad (\text{V.48})$$

Quindi le funzioni sferiche sono le autofunzioni dell'operatore di Beltrami.

Consideriamo ora l'equazione di Poisson

$$\Delta\mathcal{G}(\mathbf{x}) = -\frac{\delta(r)}{\Omega_n r^{n-1}}, \quad (\text{V.49})$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r = |\mathbf{x}|$ e $\Omega_n = m(S^{n-1})$.¹⁰ Allora $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ dipende soltanto da $r = |\mathbf{x}|$ e

$$\frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\mathcal{G}}{dr} \right) = -\frac{\delta(r)}{\Omega_n}, \quad r > 0. \quad (\text{V.50})$$

Risolvendo la (V.50) sotto la condizione che $\mathcal{G}(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow +\infty$ (solo fattibile se $n \geq 3$) e applicando il Teorema della Divergenza alla (V.49), si trova¹¹

$$\mathcal{G}(r) = \begin{cases} -(2\pi)^{-1} \log(r), & n = 2, \\ \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}} \frac{1}{r^{n-2}}, & n \geq 3, \\ 1/(4\pi r), & n = 3. \end{cases} \quad (\text{V.51})$$

Quindi la soluzione dell'equazione $\Delta_y \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ nell'intero spazio è $\mathcal{G}(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$. In altre parole, la soluzione unica dell'equazione di Poisson

$$\Delta u = -\rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

ha la seguente forma (per $n \geq 3$)

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{y} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) = \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{n-2}}. \quad (\text{V.52})$$

Per $n = 3$ otteniamo l'espressione

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$$

nota dall'elettrodinamica.

¹⁰Sia V_n la misura della palla di raggio 1 in \mathbb{R}^n . Allora $V_n r^n = \int_0^r d\hat{r} \hat{r}^{n-1} \Omega_n = \Omega_n r^n / n$. Inoltre,

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} dx_3 \dots \int_{-\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}} dx_n \\ &= \int_{-1}^1 dx_1 V_{n-1} (\sqrt{1-x_1^2})^{n-1} = V_{n-1} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \\ &= V_{n-2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) = V_{n-2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}. \end{aligned}$$

Quindi $\Omega_{2p} = 2\pi^p / (p-1)!$ e $\Omega_{2p+1} = \pi^p 2^{2p+1} (p!) / (2p)!$

¹¹Per $n = 2$ la funzione di Green non tende a zero all'infinito, creando parecchi problemi tecnici nel trattamento dell'equazione di Poisson nell'intero piano.

3.2 Equazione di Helmholtz

Utilizzando la (V.47) e la (V.48) e applicando la separazione delle variabili $\psi(r, \boldsymbol{\omega}) = R(r)\psi(\boldsymbol{\omega})$ (con $r > 0$ e $\boldsymbol{\omega} \in S^{n-1}$) all'equazione di Helmholtz n -dimensionale

$$\Delta\psi + k^2\psi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2} + k^2\psi = 0, \quad (\text{V.53})$$

otteniamo l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{dR}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{l(l+n-2)}{r^2} \right) R(r) = 0, \quad (\text{V.54})$$

mentre $y(\boldsymbol{\omega})$ è una funzione sferica di grado l in n variabili. Per $n = 2$ risulta l'equazione di Bessel di ordine l nella variabile kr . La sostituzione $R(r) = r^\gamma \tilde{R}(r)$ nella (V.54) rende

$$\tilde{R}''(r) + \frac{2\gamma + n - 1}{r} \tilde{R}'(r) + \left(k^2 - \frac{(l - \gamma)(l + \gamma + n - 2)}{r^2} \right) \tilde{R}(r) = 0.$$

Per $\gamma = 1 - \frac{1}{2}n$ risulta l'equazione di Bessel di ordine $l - 1 + \frac{1}{2}n$ nella variabile kr

$$\tilde{R}''(r) + \frac{1}{r} \tilde{R}'(r) + \left(k^2 - \frac{(l - 1 + \frac{1}{2}n)^2}{r^2} \right) \tilde{R}(r) = 0. \quad (\text{V.55})$$

Per risolvere l'equazione di Helmholtz non omogenea

$$\Delta u + k^2 u(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{V.56})$$

nella forma

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

bisogna introdurre una funzione $\mathcal{E}_n(r)$ tale che (i) $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{E}_n(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$, (ii) vale l'equazione differenziale¹²

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\mathcal{E}_n}{dr} \right) + k^2 \mathcal{E}_n(r) = -\frac{\delta(r)}{r^{n-1} \Omega_n},$$

dove Ω_n è la misura di S^{n-1} , e (iii) $\mathcal{E}_n(r)$ si comporta come onda sferica decrescente in R^n per $r \rightarrow +\infty$. Per le applicazioni in fisica e ingegneria in cui $\text{Im } k \geq 0$, otteniamo per $n \geq 3$ ¹³

$$\mathcal{E}_n(r) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{k}{r} \right)^{(n-2)/2} H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr). \quad (\text{V.57})$$

¹²La funzione $\delta(r)$ è il funzionale lineare che attribuisce ad una funzione test $\varphi \in C_0^\infty([0, +\infty))$ il valore $\varphi(0^+)$ [vedi l'Appendice D].

¹³Per $n \geq 3$ e $k \rightarrow 0$ deve risultare la (V.51). Ciò necessita uno studio del comportamento asintotico della funzione $H_{(n-2)/2}^{(1)}(kr)$ per $k \rightarrow 0$.

Infatti, per $n = 2, 3$ risulta

$$\mathcal{E}_n(r) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), & n = 2, \\ \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, & n = 3. \end{cases} \quad (\text{V.58})$$

Per $n = 3$ la soluzione dell'equazione di Helmholtz (V.56) ha la forma

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{V.59})$$

Consideriamo l'equazione di Helmholtz tridimensionale

$$\Delta u + k^2 u = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L_B u + k^2 u = 0, \quad (\text{V.60})$$

dove $\text{Im } k \geq 0$, $r = \|\mathbf{x}\|_2 > r_0 (> 0)$ e L_B è l'operatore di Beltrami. Allora

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l u_{l,m}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (\text{V.61})$$

dove

$$u_{l,m}(r) = \int_{S^2} u(r, \theta, \varphi) \overline{Y_{l,m}(\theta, \varphi)} \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

Sostituendo la (V.61) nella (V.60) e utilizzando $L_B Y_l^m = l(l+1) Y_l^m$ otteniamo

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du_{l,m}}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_{l,m}(r) = 0. \quad (\text{V.62})$$

Ponendo $u_{l,m}(r) = r^{-1/2} v_{l,m}(r)$ si arriva all'equazione di Bessel

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_{l,m}}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right) v_{l,m}(r) = 0.$$

La limitatezza della soluzione per $r \rightarrow +\infty$ (per $\text{Im } k \geq 0$) implica che $v_{l,m}(r) \sim H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)$. Di conseguenza,

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{l,m} r^{-1/2} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (\text{V.63})$$

Nel caso n -dimensionale ($n \geq 2$) abbiamo invece della (V.60)

$$\Delta u + k^2 u = \frac{1}{r^{n-1}} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^{n-1}} L_B u + k^2 u = 0, \quad (\text{V.64})$$

dove $\text{Im } k \geq 0$, $r = \|\mathbf{x}\|_2 > r_0 (> 0)$ e L_B è l'operatore di Beltrami n -dimensionale. Sviluppando la soluzione della (V.64) in funzioni sferiche (con $L_B y_l = l(l+n-2)y_l$, dove $l = 0, 1, 2, \dots$ è il grado del polinomio armonico omogeneo in n variabile che determina y_l), otteniamo invece della (V.62)

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{du_{l,\mathbf{m}}}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{l(l+n-2)}{r^{n-1}} \right) u_{l,\mathbf{m}}(r) = 0, \quad (\text{V.65})$$

dove \mathbf{m} parametrizza gli altri indici della funzione sferica. Ponendo $u_{l,\mathbf{m}}(r) = r^{-(n-2)/2} v_{l,\mathbf{m}}(r)$ arriviamo all'equazione di Bessel

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_{l,\mathbf{m}}}{dr} \right) + \left(k^2 - \frac{[l + \frac{1}{2}(n-2)]^2}{r^2} \right) v_{l,\mathbf{m}}(r) = 0.$$

Dunque

$$u_{l,\mathbf{m}}(r) \sim r^{-(n-2)/2} H_{l+\frac{1}{2}(n-2)}(kr).$$

Di conseguenza,

$$u(r, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{m}} a_{l,\mathbf{m}} r^{-(n-2)/2} H_{l+\frac{1}{2}(n-2)}^{(1)}(kr) y_l^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\omega}), \quad (\text{V.66})$$

dove $\boldsymbol{\omega} \in S^{n-1}$. Per $n = 2$ le funzioni sferiche coincidono con quelle trigonometriche; in questo caso risulta

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} H_0^{(1)}(kr) + \sum_{l=1}^{\infty} \left(a_l H_l^{(1)}(kr) \cos(l\theta) + b_l H_l^{(1)}(kr) \sin(l\theta) \right).$$

4 Equazioni paraboliche

L'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f,$$

dove $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $a > 0$ e $t > 0$, ha una delle seguenti condizioni iniziali:

- a. La condizione iniziale $u(x, t = 0) = u_0(x)$ per $x \in \Omega$;
- b. La condizione al contorno $u|_S = u_S$ [specificando la temperatura al bordo], oppure $(\partial u / \partial n)|_S = -(u_1/k)$ [specificando il flusso di calore attraverso il bordo], oppure $k(\partial u / \partial n) + h(u - u_{\text{amb}})|_S = 0$ [dove u_{amb} è la temperatura dell'ambiente e h il coefficiente di scambio di calore]. In quest'equazione Ω è una regione con bordo S regolare a tratti.

L'equazione del calore si può generalizzare nel seguente modo:

$$\frac{du}{dt} = -Lu(t) + f(t), \quad t > 0, \quad (\text{V.67})$$

con condizione iniziale

$$u(t=0) = u_0, \quad (\text{V.68})$$

dove L è un operatore di Sturm-Liouville autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L^2(\Omega)$, u_0 è un vettore in $L^2(\Omega)$ [modellizzando la temperatura iniziale], $f(t)$ è un vettore in $L^2(\Omega)$ continuo nel tempo $t \geq 0$ [modellizzando i sorgenti di calore al momento t], e $u(t)$ è un vettore di $L^2(\Omega)$ [modellizzando la temperatura al momento t]. Supponiamo che L abbia un numero infinito di autovalori λ_n , tutti non negativi, con base ortonormale di corrispondenti autofunzioni φ_n : $L\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, dove $n = 1, 2, \dots$. In tal caso ogni $u \in L^2(\Omega)$ soddisfa l'identità di Parseval

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2.$$

Da questa impostazione segue subito

$$\frac{d}{dt}(u(t), \varphi_n) = -\lambda_n(u(t), \varphi_n) + (f(t), \varphi_n)$$

con condizione iniziale

$$(u(t=0), \varphi_n) = (u_0, \varphi_n),$$

dove $n = 1, 2, \dots$ e il prodotto scalare è quello complesso di $L^2(\Omega)$. Utilizzando la formula della variazione dei parametri si trova immediatamente

$$(u(t), \varphi_n) = e^{-\lambda_n t} (u_0, \varphi_n) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} (f(s), \varphi_n) ds.$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_n t} (u_0, \varphi_n) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} (f(s), \varphi_n) ds \right] \varphi_n(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t-s) f(s, \mathbf{y}) dy ds, \end{aligned} \quad (\text{V.69})$$

dove la funzione di Green

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(\mathbf{x}) \overline{\varphi_n(\mathbf{y})}. \quad (\text{V.70})$$

Secondo l'identità di Parseval abbiamo

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{x}) \overline{\varphi_n(\mathbf{y})} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

4.1 Esempi su intervalli limitati

Esempio V.2 Poniamo $\Omega = (0, a)$ e $Lu = -u''$ con condizioni di Dirichlet, cioè il problema al contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < a, \quad t > 0;$$

$$u(0, t) = u(a, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

In tal caso gli autovalori sono $\lambda_n = (n\pi/a)^2$ e le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate in $L^2(0, 1)$ sono $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi x}{a})$, dove $n = 1, 2, \dots$. Quindi la soluzione ha la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \int_0^a u_0(y) dy \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^a e^{-n^2\pi^2(t-s)/a^2} f(y, s) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy ds \right] \\ &= \int_0^1 \mathcal{G}(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_0^1 \mathcal{G}(x, y; t-s) f(y, s) dy ds, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y; t) &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \frac{-\cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{a}\right) + \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{a}\right)}{2} \right] \\ &= \frac{-\vartheta_3\left(\pi \frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right) + \vartheta_3\left(\pi \frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right)}{2a}, \end{aligned}$$

in cui $\vartheta_3(z, q) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz)$ è una delle funzioni Theta di Jacobi ([23], 21.11; citeBW, Sec. 11.4).¹⁴

Consideriamo $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0, a)$ con le condizioni di Neumann $u'(0) = u'(a) = 0$. In tal caso $\lambda_n = (n\pi/a)^2$ e $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{a}} \cos(n\pi x/a)$, dove $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Allora

$$u(x, t) = \int_0^a \mathcal{G}(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_0^a \mathcal{G}(x, y; t-s) f(y, s) dy ds,$$

¹⁴Si ha $\vartheta_3(z, q) = G \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos(2z) + q^{4n-2})$, dove $G = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$.

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x, y; t) &= \frac{1}{a} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right] \\
&= \frac{1}{a} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(\pi^2 t/a^2)} \frac{\cos\left(\frac{n\pi(x+y)}{a}\right) + \cos\left(\frac{n\pi(x-y)}{a}\right)}{2} \right] \\
&= \frac{\vartheta_3\left(\pi \frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right) + \vartheta_3\left(\pi \frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right)}{2a}.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0, a)$ con la condizione di Dirichlet all'estremo sinistro e quella di Neumann all'estremo destro: $u(0) = u'(a) = 0$. In tal caso $\lambda_n = ((n + \frac{1}{2})\pi/a)^2$ e $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin((n + \frac{1}{2})\pi x/a)$, dove $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Allora

$$u(x, t) = \int_0^a \mathcal{G}(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_0^a \mathcal{G}(x, y; t-s) f(y, s) dy ds,$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x, y; t) &= \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 t/4a^2)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2a}\right) \\
&= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)^2(\pi^2 t/4a^2)} \left\{ -\cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x+y)}{2a}\right) \right. \\
&\quad \left. + \cos\left(\frac{(2n+1)\pi(x-y)}{2a}\right) \right\} \\
&= \frac{-\vartheta_2\left(\pi \frac{x+y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right) + \vartheta_2\left(\pi \frac{x-y}{a}, e^{-\pi^2 t/a^2}\right)}{2a},
\end{aligned}$$

in cui $\vartheta_2(z, q) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2/4} \cos((2n+1)z)$ è una delle funzioni Theta di Jacobi ([23], 21.11; [5], Sec. 11.4).¹⁵

Consideriamo infine $Lu = -u''$ nell'intervallo $(0, a)$ con condizioni periodiche. In tal caso ci sono un autovalore semplice $\lambda_0 = 0$ con autofunzione corrispondente $\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}$ e gli autovalori doppi $\lambda_n = (2n\pi/a)^2$ con autofunzioni corrispondenti $\varphi_n^c(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(2n\pi x/a)$ e $\varphi_n^s(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(2n\pi x/a)$, dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Allora

$$u(x, t) = \int_0^a \mathcal{G}(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_0^a \mathcal{G}(x, y; t-s) f(y, s) dy ds,$$

¹⁵Si ha $\vartheta_2(z, q) = 2Gq^{1/4} \cos(z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos(2z) + q^{4n})$, dove $G = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$.

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x, y; t) &= \frac{1}{a} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{2n\pi}{a})^2 t} \left\{ \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) \right\} \right] \\
&= \frac{1}{a} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{2n\pi}{a})^2 t} \cos\left(\frac{2n\pi(x-y)}{a}\right) \right] \\
&= \frac{1}{a} \vartheta_3\left(\frac{\pi(x-y)}{a}, e^{-(\frac{2\pi}{a})^2 t}\right).
\end{aligned}$$

Esempio V.3 Adesso discutiamo il caso $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < L\}$ e $L = -\Delta$ con la condizione di Dirichlet al bordo. In tal caso gli autovalori $\lambda > 0$. Infatti,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\lambda u(r, \theta), \quad (\text{V.71})$$

e applicando la solita separazione delle variabili arriviamo, per $\lambda > 0$, all'equazione differenziale

$$\frac{d^2 R}{d(r\sqrt{\lambda})^2} + \frac{1}{r\sqrt{\lambda}} \frac{dR}{d(r\sqrt{\lambda})} + \left(1 - \frac{m^2}{(r\sqrt{\lambda})^2} \right) R(r) = 0,$$

dove $m = 0, 1, 2, \dots$ e $R(r)$ è limitato se $r \rightarrow 0^+$. Allora $R(r) \sim J_m(r\sqrt{\lambda})$, mentre $R(L) = 0$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_{mn} = (\nu_{mn}/L)^2$ [essendo ν_{mn} lo zero positivo n -esimo della $J_m(x)$], dove $m = 0, 1, 2, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$. Le autofunzioni normalizzate in $L^2(\Omega) \simeq L^2([0, L] \times [0, 2\pi]; r dr d\theta)$ sono

$$\begin{cases} \varphi_{0n}(r, \theta) = \frac{1}{L\sqrt{\pi}|J'_0(\nu_{0n})|} J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{L}\right), & n = 1, 2, 3, \dots \\ \varphi_{mn}^c(r, \theta) = \frac{\sqrt{2} \cos m\theta}{L\sqrt{\pi}|J'_m(\nu_{mn})|} J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right), & m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, \dots \\ \varphi_{mn}^s(r, \theta) = \frac{\sqrt{2} \sin m\theta}{L\sqrt{\pi}|J'_m(\nu_{mn})|} J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right), & m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Le costanti di normalizzazione seguono dall'identità

$$\begin{aligned}
\int_0^L \int_0^{2\pi} r J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right) \cos m\theta d\theta dr &= (1 + \delta_{m0})\pi \int_0^L r J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right) dr \\
&= (1 + \delta_{m0}) \frac{L^2}{2} J'_m(\nu_{mn})^2,
\end{aligned}$$

e ugualmente con $\sin m\theta$ al posto di $\cos m\theta$ se $m \geq 1$.

Risulta

$$u(r, \theta, t) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \mathcal{G}(r, \hat{r}, \theta - \hat{\theta}; t) u_0(r, \theta) d\theta dr \\ + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \hat{r} \mathcal{G}(r, \hat{r}, \theta - \hat{\theta}; t - s) f(\hat{r}, \hat{\theta}, s) d\hat{\theta} d\hat{r} ds,$$

dove [cf. (II.44)]

$$\mathcal{G}(r, \hat{r}, \theta - \hat{\theta}; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{-\nu_{0n}^2 t / L^2} \frac{J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right) J_0\left(\frac{\nu_{0n} \hat{r}}{L}\right)}{\pi L^2 J_0'(\nu_{0n})^2} \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\nu_{mn}^2 t / L^2} \frac{J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) J_m\left(\frac{\nu_{mn} \hat{r}}{L}\right) \cos[m(\theta - \hat{\theta})]}{\pi L^2 J_m'(\nu_{mn})^2} \right],$$

in cui abbiamo utilizzato la formula

$$\cos(m[\theta - \hat{\theta}]) = \cos m\theta \cos m\hat{\theta} - \sin m\theta \sin m\hat{\theta}.$$

4.2 Esempi su domini illimitati

Esempio V.4 Consideriamo il problema a valori iniziali

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (\text{V.72})$$

Applicando la trasformata di Fourier unidimensionale $u \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}$ otteniamo

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t) + \hat{f}(\xi, t), & \xi \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi). \end{cases} \quad (\text{V.73})$$

La soluzione del problema (V.73) è elementare:

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2(t-\tau)} \hat{f}(\xi, \tau) d\tau. \quad (\text{V.74})$$

Quindi

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi, t) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left[e^{-\xi^2 t} \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2(t-\tau)} \hat{f}(\xi, \tau) d\tau \right] d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x-y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(x-y; t-\tau) f(y, \tau) dy d\tau,
\end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{G}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-\xi^2 t} d\xi = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/4t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi - \frac{ix}{2t})^2 t} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

è il cosiddetto “heat kernel” unidimensionale.

Esempio V.5 Consideriamo ora il problema a valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (\text{V.75})$$

Per risolvere la (V.75) introduciamo la trasformata di Fourier seno

$$(\mathcal{F}_s u)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(x) \sin(x\xi) dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \hat{u}(\xi), \quad (\text{V.76})$$

dove $u(x) = -u(-x)$ per $x \in \mathbb{R}^-$ è l'estensione di u ad una funzione dispari. Si vede subito che

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\mathcal{F}_s u)(\xi) \sin(x\xi) d\xi. \quad (\text{V.77})$$

Applicando la trasformata di Fourier seno \mathcal{F}_s alla (V.73) risulta

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}_s u}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 (\mathcal{F}_s u)(\xi, t) + (\mathcal{F}_s f)(\xi, t), & \xi \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ (\mathcal{F}_s u)(\xi, 0) = (\mathcal{F}_s u_0)(\xi), \end{cases} \quad (\text{V.78})$$

e ha la soluzione unica (V.74). Dunque

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(x\xi) (\mathcal{F}_s u)(\xi, t) d\xi \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(x\xi) \left[e^{-\xi^2 t} (\mathcal{F}_s u_0)(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2(t-\tau)} (\mathcal{F}_s f)(\xi, \tau) d\tau \right] d\xi \\
&= \int_0^{\infty} \mathcal{G}_s(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_0^{\infty} \mathcal{G}_s(x, y; t-\tau) f(y, \tau) dy d\tau,
\end{aligned}$$

dove¹⁶

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_s(x, y; t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(x\xi) \sin(y\xi) e^{-\xi^2 t} d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \{-\cos((x+y)\xi) + \cos((x-y)\xi)\} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[-e^{-(x+y)^2/4t} + e^{-(x-y)^2/4t} \right].
\end{aligned} \tag{V.79}$$

Consideriamo ora il problema a valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \tag{V.80}$$

Per risolvere la (V.80) introduciamo la trasformata di Fourier coseno

$$(\mathcal{F}_c u)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(x) \cos(x\xi) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{u}(\xi), \tag{V.81}$$

dove $u(x) = u(-x)$ per $x \in \mathbb{R}^-$ è l'estensione di u ad una funzione pari. Si vede subito che

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (\mathcal{F}_c u)(\xi) \cos(x\xi) d\xi. \tag{V.82}$$

Applicando la trasformata di Fourier coseno \mathcal{F}_c alla (V.80) risulta

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}_c u}{\partial t}(\xi, t) = -\xi^2 (\mathcal{F}_c u)(\xi, t) + (\mathcal{F}_c f)(\xi, t), & \xi \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ (\mathcal{F}_c u)(\xi, 0) = (\mathcal{F}_c u_0)(\xi), \end{cases} \tag{V.83}$$

e ha la soluzione unica (V.74). Dunque

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\xi) (\mathcal{F}_c u)(\xi, t) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\xi) \left[e^{-\xi^2 t} (\mathcal{F}_c u_0)(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2(t-\tau)} (\mathcal{F}_c f)(\xi, \tau) d\tau \right] d\xi \\
&= \int_0^\infty \mathcal{G}_c(x, y; t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_0^\infty \mathcal{G}_c(x, y; t - \tau) f(y, \tau) dy d\tau,
\end{aligned}$$

¹⁶Si utilizza $\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-z^2 t} \cos(zt) dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-z^2/4t}$. Vedi [1], Eq. 7.4.6.

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_c(x, y; t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(x\xi) \cos(y\xi) e^{-\xi^2 t} d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \{ \cos((x+y)\xi) + \cos((x-y)\xi) \} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[e^{-(x+y)^2/4t} + e^{-(x-y)^2/4t} \right].
\end{aligned} \tag{V.84}$$

Esempio V.6 Consideriamo infine il problema a valori iniziali

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \Delta u + f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{V.85}$$

Applicando la trasformata di Fourier unidimensionale $u \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}$ otteniamo

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\boldsymbol{\xi}, t) = -|\boldsymbol{\xi}|^2 \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) + \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, t), & \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}). \end{cases} \tag{V.86}$$

La soluzione del problema (V.86) è elementare:

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 t} \hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}) + \int_0^t e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2(t-\tau)} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\tau. \tag{V.87}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^\infty e^{i(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi})} \hat{u}(\boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi})} \left[e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 t} \hat{u}_0(\boldsymbol{\xi}) + \int_0^t e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2(t-\tau)} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\tau \right] d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}; t) u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}; t - \tau) f(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau,
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi})} e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 t} d\boldsymbol{\xi} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\boldsymbol{\xi} + \frac{i\mathbf{x}}{2t}, \boldsymbol{\xi} + \frac{i\mathbf{x}}{2t})t} d\boldsymbol{\xi} = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \right)^n e^{-|\mathbf{x}|^2/4t}
\end{aligned}$$

è il cosiddetto “heat kernel” n -dimensionale.

5 Equazioni iperboliche

L'equazione delle onde ha la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad (\text{V.88})$$

dove $c > 0$ è la velocità della onda, $x \in \Omega$ (un aperto connesso e limitato in \mathbb{R}^n con frontiera $\partial\Omega$ superficie regolare a tratti), e valgono la condizione di Dirichlet

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (\text{V.89})$$

e le due condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (\text{V.90a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \quad (\text{V.90b})$$

La separazione delle variabili

$$u(x, t) = \psi(x)T(t) \quad (\text{V.91})$$

conduce alle equazioni

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \text{costante}, \quad (\text{V.92a})$$

$$\psi(x, t) = 0 \text{ per } x \in \partial\Omega. \quad (\text{V.92b})$$

Supponiamo che l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + \lambda^2\psi = 0$$

su Ω con la condizione di Dirichlet abbia un infinito numerabile di autovalori positivi λ_n^2 (dove $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$) con autofunzioni corrispondenti φ_n che formano una base ortonormale di $L^2(\Omega)$. In tal caso la costante nella (V.92a) vale $-\lambda_n^2$, e quindi

$$T(t) = c_n \cos(c\lambda_n t) + d_n \sin(c\lambda_n t).$$

La soluzione generale della equazione delle onde (V.94b) con la condizione di Dirichlet (V.89) ha la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(c\lambda_n t) + d_n \sin(c\lambda_n t)) \psi_n(x). \quad (\text{V.93})$$

Quindi dalle (V.90) otteniamo

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x), \quad (\text{V.94a})$$

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n c \lambda_n \psi_n(x). \quad (\text{V.94b})$$

Dall'ortonormalità delle autofunzioni ψ_n in $L^2(\Omega)$ seguono i coefficienti c_n e d_n :

$$c_n = \langle u_0, \psi_n \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u_0(x) \psi_n(x) dx, \quad (\text{V.95a})$$

$$d_n = \frac{\langle u_1, \psi_n \rangle}{c \lambda_n} = \frac{1}{c \lambda_n} \int_{\Omega} u_1(x) \psi_n(x) dx. \quad (\text{V.95b})$$

Lo stesso discorso vale se al posto della condizione di Dirichlet (V.89) si considera la condizione di Neumann. L'unica differenza è che ora zero è autovalore (con l'autofunzione costante) dell'equazione di Helmholtz su Ω con la condizione di Neumann. Al posto della (V.93) si consideri ora

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\text{mis}(\Omega)}} (c_0 + d_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(c \lambda_n t) + d_n \sin(c \lambda_n t)) \psi_n(x), \quad (\text{V.96})$$

dove $\psi_0(x) = 1/\sqrt{\text{mis}(\Omega)}$ è l'autofunzione normalizzata corrispondente all'autovalore zero. Per $n \geq 1$ si trovano le espressioni (V.93) e (V.95b), mentre

$$c_0 = \frac{\int_{\Omega} u_0(x) dx}{\sqrt{m(\Omega)}}, \quad d_0 = \frac{\int_{\Omega} u_1(x) dx}{\sqrt{m(\Omega)}}.$$

Nel caso in cui $\Omega = (0, L)$, abbiamo per le condizioni di Dirichlet

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{V.97})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$, e per le condizioni di Neumann

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (\text{V.98})$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$, mentre $\lambda_0 = 0$ e $\psi_0(x) = 1/\sqrt{L}$.

Nel caso delle condizioni di Dirichlet, utilizzando le espressioni

$$2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right),$$

$$2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right),$$

e sostituendo la (V.97) nella (V.93), otteniamo

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n [\psi_n(x-ct) + \psi_n(x+ct)] + \frac{1}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} d_n c \frac{n\pi}{L} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_n(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\stackrel{???}{=} \frac{1}{2} [u_0(x-ct) + u_0(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\tilde{x}) d\tilde{x} \text{ [SBAGLIATO]}, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato gli sviluppi di Fourier (V.94) e esteso le autofunzioni come fossero definite fuori dell'intervallo $(0, L)$.

Per $c > 0$ consideriamo l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad (\text{V.99a})$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (\text{V.99b})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad (\text{V.99c})$$

dove $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Applicando la trasformata di Fourier arriviamo al sistema di equazioni

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\xi, t) = -c^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t) + \hat{f}(\xi, t), \quad (\text{V.100a})$$

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \quad (\text{V.100b})$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi), \quad (\text{V.100c})$$

con la soluzione unica

$$\hat{u}(\xi, t) = \cos(c\xi t) \hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(c\xi t)}{c\xi} \hat{u}_1(\xi) + \int_0^t \frac{\sin(c\xi(t-\tau))}{c\xi} \hat{f}(\xi, \tau) d\tau. \quad (\text{V.101})$$

Per $\xi = 0$ si calcola il limite:

$$\hat{u}(0, t) = \hat{u}_0(0) + t\hat{u}_1(0) + \int_0^t (t - \tau) \hat{f}(0, \tau) d\tau. \quad (\text{V.102})$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \hat{u}(\xi, t) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} [\cos(c\xi t) \hat{u}_0(\xi) \\ &+ \frac{\sin(c\xi t)}{c\xi} \hat{u}_1(\xi) + \int_0^t \frac{\sin(c\xi(t - \tau))}{c\xi} \hat{f}(\xi, \tau) d\tau] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(x - y; t) u_0(y) + \mathcal{G}(x - y; t) u_1(y) \right. \\ &\left. + \int_0^t \mathcal{G}(x - y; t - \tau) f(y, \tau) d\tau \right] dy, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x - y; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi} \frac{\sin(c\xi t)}{c\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2c} [H(y - x + ct) + H(y - x - ct)], \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(x - y; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)\xi} \cos(c\xi t) d\xi \\ &= \frac{1}{2} [\delta(y - x + ct) - \delta(y - x - ct)]. \end{aligned}$$

In particolare, abbiamo trovato la cosiddetta *soluzione di D'Alembert*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-ct+c\tau}^{x+ct-c\tau} f(y, \tau) dy d\tau. \end{aligned}$$

L'equazione delle onde (V.88) con un'opportuna condizione al contorno e le condizioni iniziali (V.90) ha la soluzione unica

$$u(x, t) = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(x, \hat{x}; t) u_0(\hat{x}) d\hat{x} + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, \hat{x}; t) u_1(\hat{x}) d\hat{x}, \quad (\text{V.103})$$

dove la funzione di Green è molto singolare. Ciò si spiega dal principio di Huygens: Le singolarità presenti nella soluzione per $t = 0$ si propagano in tutte le direzioni con velocità c quindi si manifestano nella soluzione al momento

$t > 0$. Per esempio, generalizzando la risoluzione del sistema (V.99) per $x \in \mathbb{R}^n$ si applichi la trasformazione di Fourier n -dimensionale per trovare la stessa forma della soluzione. Questa volta la funzione di Green ha l'espressione

$$\mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y}; t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\xi}} \frac{\sin(ct\|\boldsymbol{\xi}\|_2)}{c\|\boldsymbol{\xi}\|_2} d\boldsymbol{\xi}, \quad (\text{V.104a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}(\mathbf{x} - \mathbf{y}; t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\xi}} \cos(ct\|\boldsymbol{\xi}\|_2) d\boldsymbol{\xi}. \quad (\text{V.104b})$$

Quindi la soluzione verifica di nuovo il principio di Huygens.

Appendice A

LA FUNZIONE GAMMA

La funzione Gamma è definita dall'integrale generalizzato assolutamente convergente

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = 2 \int_0^{\infty} \rho^{2z-1} e^{-\rho^2} d\rho,} \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (\text{A.1})$$

dove la convergenza assoluta segue spezzando l'intervallo di integrazione in due, in $(0, 1)$ ed in $(1, +\infty)$. Infatti $|e^{-t} t^{z-1}| \leq t^{\operatorname{Re} z - 1}$ per $t \in (0, 1)$ e $t^\alpha |e^{-t} t^{z-1}| \rightarrow 0$ se $t \rightarrow +\infty$ per ogni $\alpha > 1$. La funzione Γ è analitica nel semipiano destro $\operatorname{Re} z > 0$.

Dopo un'integrazione per parti si ottiene facilmente

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),} \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (\text{A.2})$$

Si ha $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$. Utilizzando la (A.2) risulta

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!,} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.3})$$

Un altro valore particolare della funzione Gamma è quello per $z = 1/2$. Si ha

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.}$$

Utilizzando la (A.2) si ottiene

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.4})$$

L'identità (A.2) può essere utilizzata per definire la funzione Gamma altrove. Prima si definisca la funzione Gamma nella striscia $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$

da $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$, poi nella striscia $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$, ecc. Siccome il denominatore nell'uguaglianza $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ si annulla per $z = 0$, risulta una funzione meromorfa con poli semplici nei punti $0, -1, -2, \dots$. Il residuo nel polo a $z = 0$ è $\lim_{z \rightarrow 0} z\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z+1) = \Gamma(1) = 1$, mentre quello a $-n$ ($n = 1, 2, \dots$) è il seguente

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \dots \\ &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{(-1)^n (n!)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ha qualche importanza la *funzione beta di Eulero*:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta, \quad (\text{A.5})$$

dove $\operatorname{Re} p > 0$ e $\operatorname{Re} q > 0$. È abbastanza semplice dimostrare che

$$\boxed{B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},} \quad \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0. \quad (\text{A.6})$$

Infatti, per p, q tali che $\min(\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q) > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty t^{2p-1} s^{2q-1} e^{-(t^2+s^2)} dt ds \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \rho^{2(p+q-1)} e^{-\rho^2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta d\rho \\ &= 2 \underbrace{\int_0^\infty \rho^{2(p+q-1)} e^{-\rho^2} d\rho}_{\Gamma(p+q)} \underbrace{2 \int_0^\pi (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta}_{t=\cos^2 \theta, 1-t=\sin^2 \theta, dt=-2 \cos \theta \sin \theta d\theta} \\ &= \Gamma(p+q)B(p, q). \end{aligned}$$

dove al passaggio dalla prima alla seconda riga abbiamo sostituito $t = \rho \cos \theta$ e $s = \rho \sin \theta$.

Discutiamo ora una caratterizzazione potente della funzione Gamma.

Teorema A.1 (Bohr-Mollerup) *Sia $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori positivi con le seguenti proprietà:*

- (a) $\log f(x)$ è una funzione convessa;

(b) $f(x+1) = x f(x)$ per ogni $x > 0$;

(c) $f(1) = 1$.

Allora $f(x) = \Gamma(x)$ per ogni $x > 0$.

Dimostrazione. Sia $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori positivi che ha le proprietà (a)-(c). Allora la proprietà (b) implica l'identità

$$f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x), \quad x > 0, n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.7})$$

Per $x \in (0, 1]$ e $n \geq 2$ si ottiene dalla convessità¹ della funzione f

$$\frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{(n-1) - n} \leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n) - n} \leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1) - n}.$$

Siccome $f(m) = (m-1)!$ per $m \in \mathbb{N}$ (vedi la (b) e la (c)), risulta per $0 < x \leq 1$

$$\log(n-1)! - \log(n-2)! \leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \leq \log n! - \log(n-1)!,$$

oppure

$$x \log(n-1) \leq \log f(x+n) - \log(n-1)! \leq \log n, \quad 0 < x \leq 1,$$

oppure

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x (n-1)!$$

Applicando la (A.7) risulta per $0 < x \leq 1$

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n)} \left[\frac{x+n}{n} \right].$$

Siccome $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x+n}{n} \right] = 1$ per $x \in [0, 1]$, si ha

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}. \quad (\text{A.8})$$

Dalla (A.1) si trova facilmente

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt,$$

mentre n integrazioni per parti ci danno l'identità

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Quindi le ultime due equazioni e la (A.8) implicano che $f(x) = \Gamma(x)$ per ogni $x > 0$. \square

¹La convessità della $g = \log f$ implica che il rapporto $\frac{g(n+1)-g(y)}{(n+1)-y}$ cresce se y cresce da $n-1$ a $n+1$.

Il teorema A.1 può essere applicato per dimostrare la seguente rappresentazione prodotto

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad (\text{A.9})$$

dove γ è la cosiddetta *costante di Eulero*. Sostituendo $z = 1$ e utilizzando $\Gamma(1) = 1$ si trova

$$e^{\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n},$$

oppure

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1} e^{1/k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \log(k+1) + \log k \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \log(n+1) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \log n \right]. \end{aligned}$$

Tornando alla (A.9) abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k e^{z/k}}{z+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma z} n!}{z(z+1) \dots (z+n)} \exp \left(z \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che la funzione $\Gamma(z)$ definita dal prodotto infinito (A.9) coincide con la funzione gamma introdotta prima.

Per $0 < \operatorname{Re} z < 1$ si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+z} e^{z/k} \cdot \frac{e^{-\gamma(1-z)}}{1-z} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1-z} e^{(1-z)/k} \\ &= \frac{e^{-\gamma}}{z(1-z)} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(k+z)(k+1-z)} e^{1/k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma}}{z(n+1-z)} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(k+z)(k-z)} e^{1/k} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(k+z)(k-z)} = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+z)(k-z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},
\end{aligned}$$

secondo la rappresentazione prodotto della funzione $\sin(\pi z)$. Quindi

$$\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}}, \tag{A.10}$$

valida per $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ per l'unicità delle estensioni analitiche.

Appendice B

ANALISI FUNZIONALE

In questo capitolo si introducono gli spazi di Banach e di Hilbert, gli operatori lineari e loro spettro. Inoltre si discutono gli operatori compatti su uno spazio di Hilbert.

1 Spazi di Banach

Consideriamo noto il concetto di spazio vettoriale X rispetto ad un campo di scalari \mathbb{F} che supponiamo uguale a \mathbb{R} (numeri reali) oppure a \mathbb{C} (numeri complessi). Quindi in X sono state definite l'addizione $X \times X \mapsto X$ e la moltiplicazione scalare $\mathbb{F} \times X \mapsto X$ con le solite proprietà aritmetiche.

Uno *spazio normato* X è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- a. $\|\varphi\| \geq 0$ per ogni $\varphi \in X$; (positività)
- b. $\|\varphi\| = 0$ se e solo se $\varphi = 0$; (definitezza)
- c. $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \|\varphi\|$ per $\alpha \in \mathbb{F}$ e $\varphi \in X$; (omogeneità)
- d. $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$. (disuguaglianza triangolare)

Dalle (c)-(d) segue subito che

- e. $|\|\varphi\| - \|\psi\|| \leq \|\varphi - \psi\|$ per $\varphi, \psi \in X$.

Per *distanza* tra φ e ψ si intende la $\|\varphi - \psi\|$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di X è detta *convergente* al vettore $\varphi \in X$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, ossia se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ per ogni $n > n(\varepsilon)$.

Una successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ di elementi di uno spazio normato X si dice *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $n(\varepsilon)$ tale che $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \varepsilon$ per $n, m > n(\varepsilon)$, ossia se $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$. La norma in X si dice *completa* se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X . Uno spazio normato con norma completa si dice *spazio di Banach*.

Siano X e Y due spazi normati, $U \subset X$ e $f : U \rightarrow Y$. Allora f si dice *continua* in $\psi \in U$ se $\{f(\varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ converge a $f(\varphi)$ in Y per ogni successione $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ in U che converge a φ . La funzione f si dice *continua* se è continua in ogni punto $\varphi \in U$.

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Banach, trascurando la dimostrazione della completezza della norma.

1. Per ogni sottoinsieme chiuso e limitato Ω di \mathbb{R}^n , sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni scalari (reali o complesse) continue in Ω . Allora la funzione $\|\cdot\|_\infty : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|f\|_\infty = \max_{z \in \Omega} |f(z)|,$$

introduce una norma completa in $C(\Omega)$. Si verifica che $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ se e solo se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente in $x \in \Omega$.

2. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in \mathbb{R}^n . Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω , dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate "uguali". Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

è una norma completa in $L^2(\Omega)$.

3. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $\|\cdot\|_2 : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|\{x_n\}_{n=1}^\infty\|_2 = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \right)^{1/2},$$

è una norma completa in ℓ^2 .

4. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in \mathbb{R}^n . Con $L^1(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω ,

dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate "uguali". Allora la funzione $\|\cdot\|_1 : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)| dx,$$

è una norma completa in $L^1(\Omega)$.

Per un elemento φ di uno spazio normato X e $r > 0$, l'insieme

$$B(\varphi; r) = \{\psi \in X : \|\varphi - \psi\| < r\}$$

è definito la *sfera aperta* di raggio r e centro φ . Un sottoinsieme U si dice *aperto* se per ogni $\varphi \in U$ esiste $r > 0$ (che dipende da φ) tale che $B(\varphi; r) \subset U$. Dato il sottoinsieme U di X , la *parte interna* U^0 di U è l'insieme aperto più grande di X contenuto in U .

Un sottoinsieme U di X si dice *chiuso* se esso contiene tutti i limiti di tutte le successioni con termini in U e limiti in X . Dato il sottoinsieme U di X , la sua *chiusura* \bar{U} è il sottoinsieme chiuso più piccolo di X che contiene U .

Dato il sottoinsieme U di X , la *frontiera* ∂U di U è l'insieme dei punti di X che possono essere il limite sia di una successione in U sia di una successione in $X \setminus U$. Si dimostra facilmente che

$$\partial U = \bar{U} \cap \overline{(X \setminus U)}.$$

Un sottoinsieme U di X si dice *limitato* se il diametro

$$\text{diam}(U) = \sup\{\|\varphi - \psi\| : \varphi, \psi \in U\}$$

è finito. In tal caso esiste $r > 0$ (con $r > \frac{1}{2}\text{diam}(U)$) tale che $U \subset B(\varphi; r)$ per ogni vettore $\varphi \in U$.

Un sottoinsieme D di X si dice *denso* in X se ogni vettore $\varphi \in X$ è il limite di una successione con termini in D . Uno spazio di Banach si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso infinito numerabile.

2 Spazi di Hilbert

Sia X uno spazio vettoriale reale o complesso (cioè, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Allora una funzione $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- a. $(\varphi, \varphi) \geq 0$, (positività)
- b. $(\varphi, \varphi) = 0$ se e solo se $\varphi = 0$, (definitezza)

c. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$ per ogni $\varphi, \psi \in X$, (simmetria)

d. $(\alpha\varphi + \beta\psi, \chi) = \alpha(\varphi, \chi) + \beta(\psi, \chi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$, (linearità)

è definita *prodotto scalare* (oppure *prodotto interna*, oppure, nel caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, *prodotto sesquilineare*). Nella (c) il soprascritto indica il coniugato complesso se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Dalle (c)-(d) segue subito che

e. $(\chi, \alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}(\chi, \varphi) + \overline{\beta}(\chi, \psi)$ per $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $\varphi, \psi, \chi \in X$.

Ogni prodotto scalare induce la cosiddetta *norma indotta*

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}.$$

Inoltre vale la *disuguaglianza di Schwartz*¹

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\| \quad \text{per } \varphi, \psi \in X,$$

che è un'uguaglianza se e solo se φ e ψ sono proporzionali. La disuguaglianza di Schwartz implica la disuguaglianza triangolare²

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|, \quad \varphi, \psi \in X.$$

Uno spazio vettoriale con prodotto scalare si chiama *spazio pre-Hilbert*. Uno spazio pre-Hilbert con norma indotta completa si dice *spazio di Hilbert*.

Uno spazio di Hilbert soddisfa l'*identità del parallelogramma*³

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2).$$

Vice versa, se la norma di uno spazio di Banach soddisfa l'identità del parallelogramma, essa è la norma indotta di uno spazio di Hilbert.

Il prodotto scalare può essere espresso nella norma tramite la cosiddetta *formula di polarizzazione*:

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4}(\|\varphi + \psi\|^2 - \|\varphi - \psi\|^2 + i\|\varphi + i\psi\|^2 - i\|\varphi - i\psi\|^2), & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Tali formule si dimostrano facilmente sviluppando le norme al quadrato.

¹Dim: Sia ξ un numero complesso di modulo 1 tale che $\xi(\varphi, \psi) = |(\varphi, \psi)|$ e sia $\chi = \xi\psi$. In tal caso $\|\chi\| = \|\psi\|$, mentre per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq \|\varphi + t\chi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2t(\varphi, \chi) + t^2\|\chi\|^2$. Quindi il discriminante di questo polinomio reale quadrato è non positivo. Dunque $4|(\varphi, \chi)|^2 - 4\|\varphi\|^2\|\chi\|^2 \leq 0$ e quindi $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|\|\psi\|$.

²Dim: $\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\text{Re}(\varphi, \psi) \leq \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\|\varphi\|\|\psi\| = (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2$.

³Dim: $\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\text{Re}(\varphi, \psi) + \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 - 2\text{Re}(\varphi, \psi) = 2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2)$.

Discutiamo ora alcuni esempi di spazi di Hilbert.

1. Sia Ω un sottoinsieme misurabile in \mathbb{R}^n . Con $L^2(\Omega)$ si indica lo spazio vettoriale di tutte le funzioni al quadrato sommabili (nel senso di Lebesgue) in Ω , dove due funzioni per cui i valori sono diversi soltanto in un sottoinsieme di Ω di misura zero, vengono considerate "uguali". Allora la funzione $(\cdot, \cdot) : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(f, g) = \left(\int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \right)^{1/2},$$

è un prodotto scalare in $L^2(\Omega)$ che induce la solita norma.

2. Sia ℓ^2 lo spazio vettoriale di tutte le successioni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ scalari (reali o complesse) per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ è convergente. Allora la funzione $(\cdot, \cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \right)^{1/2},$$

è un prodotto scalare in ℓ^2 che induce la solita norma.

3 Basi ortonormali in spazi di Hilbert

Consideriamo prima uno spazio vettoriale di dimensione N con prodotto scalare. Tale spazio ha una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ di vettori di lunghezza 1 ortogonali tra loro. Partendo da una base (i.e., un sistema linearmente indipendente massimale) $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ qualsiasi, si può costruire una base ortonormale utilizzando il *processo di Gram-Schmidt*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|} \\ \varphi_2 = \frac{\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|\psi_2 - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1\|} \\ \varphi_3 = \frac{\psi_3 - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2}{\|\psi_3 - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1 - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2\|} \\ \vdots \\ \varphi_N = \frac{\psi_N - (\psi_N, \varphi_1)\varphi_1 - \dots - (\psi_N, \varphi_{N-1})\varphi_{N-1}}{\|\psi_N - (\psi_N, \varphi_1)\varphi_1 - \dots - (\psi_N, \varphi_{N-1})\varphi_{N-1}\|}. \end{array} \right.$$

È facile controllare induttivamente che φ_j è ortogonale ai vettori $\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}$ e ha norma 1 ($j = 1, 2, \dots, N$).

Appena trovata una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, si ottengono subito le cosiddette *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^N |(\varphi, \varphi_n)|^2,$$

$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^N (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Consideriamo ora uno spazio di Hilbert **separabile** X a dimensione infinita. Estraeendo da un sottoinsieme denso e infinito numerabile D un sistema di vettori linearmente indipendente massimale e applicando il processo di Gram-Schmidt senza fermarsi ad un indice superiore N , si ottiene una base ortonormale **e infinita numerabile** $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. D'altra parte, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di una base ortonormale infinita numerabile di X è denso in X . Concludiamo dunque che uno spazio di Hilbert separabile a dimensione infinita viene caratterizzato dall'esistenza di una base ortonormale infinita numerabile.

Data una base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ in X , risultano le *identità di Parseval*:

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2,$$

$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)(\varphi_n, \psi).$$

Inoltre, vale lo sviluppo

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \varphi - \sum_{n=1}^N (\varphi, \varphi_n)\varphi_n \right\| = 0.$$

Introducendo la successione crescente di sottospazi

$$E_N = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$$

di dimensione N , si può leggere quest'ultima relazione limite nella seguente maniera: La distanza (ortogonale) tra φ e il sottospazio E_N tende a zero se

$N \rightarrow \infty$.⁴ Quindi

$$\varphi \mapsto \sum_{n=1}^N (\varphi, \lambda_n) \lambda_n$$

definisce la *proiezione ortogonale* di φ in E_N .

Dato lo spazio di Hilbert separabile X con base ortonormale $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, si definisce la trasformazione lineare $U : X \rightarrow \ell^2$ da

$$U\varphi = \{(\varphi, \varphi_n)\}_{n=1}^{\infty},$$

ossia $U\varphi$ è la successione dei coefficienti (φ, φ_n) vista come vettore in ℓ^2 . Allora, applicando la definizione della norma in ℓ^2 ,

$$\|U\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 = \|\varphi\|^2,$$

secondo l'identità di Parseval. Si verifica facilmente che U definisce una corrispondenza biunivoca tra X e ℓ^2 . Costruendo la U per $X = \ell^2$ e la sua base ortonormale canonica, si vede subito che U coincide con la trasformazione identità in ℓ^2 . Concludiamo che, tranne per una trasformazione unitaria della base ortonormale, esiste un singolo spazio di Hilbert separabile.

4 Applicazioni all'Analisi di Fourier

1. In $X = L^2(-\pi, \pi)$ le funzioni

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

si vede subito che $c_n = (2\pi)^{1/2}(\varphi, \varphi_n)$ per $n \in \mathbb{Z}$. Secondo l'identità di Parseval segue

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

⁴Sia $\sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n$ un vettore arbitrario in E_N e $F(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \left\| \varphi - \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n \right\|^2$ la distanza tra φ e E_N al quadrato. Si può dimostrare che il minimo viene assunto per $\lambda_n = (\varphi, \varphi_n)$ ($n = 1, \dots, N$).

ossia

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n e^{inx} \right|^2 dx = 0.$$

2. In $X = L^2(-\pi, \pi)$ le funzioni

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n^c(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_n^s(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

formano una base ortonormale. Data una funzione $f \in L^2(-\pi, \pi)$ e introducendo i suoi coefficienti di Fourier

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, & n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

si applichi l'identità di Parseval per trovare l'uguaglianza

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Inoltre, vale la convergenza della sua serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right|^2 dx = 0.$$

5 Operatori lineari

Siano X e Y due spazi di Banach. Un'applicazione $T : X \rightarrow Y$ si dice operatore lineare se

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2), \quad x_1, x_2 \in X, \lambda_1, \lambda_2 \in F,$$

dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$. Molto spesso scriviamo Tx invece di $T(x)$. Gli esempi principali degli operatori lineari sono le matrici $n \times m$ (come rappresentazioni degli operatori lineari da F^m in F^n) e gli operatori differenziali lineari. L'immagine di tale T è l'insieme $\text{Im}(T) = \{Tx : x \in X\}$; quest'insieme è un sottospazio lineare di Y . Il kernel di T è il sottospazio lineare di X definito da $\text{Ker } T = \{x \in X : Tx = 0\}$.

5.1 Proprietà generali

Un operatore lineare $T : X \rightarrow Y$ si dice *invertibile* se è una corrispondenza biunivoca tra X e Y . Un operatore lineare $T : X \rightarrow Y$ è invertibile se e solo se $\text{Im } T = Y$ e $\text{Ker } T = \{0\}$.

Siano X e Y spazi di Banach. Un operatore lineare $T : X \rightarrow Y$ si dice *limitato* se $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$. In tal caso il numero

$$\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

si dice *norma* di T . Se $X = F^n$ (dove $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$) ha dimensione finita, ogni operatore lineare $T : X \rightarrow Y$ è limitato.

- a. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di F^n . Allora ogni operatore limitato $T : F^n \rightarrow Y$ può essere rappresentato come

$$T \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i T e_i.$$

Se si applica ad una matrice, la norma si chiama *norma spettrale*.⁵ Utilizzando questa rappresentazione, si dimostri la limitatezza di T .

- b. Siano X, Y, Z tre spazi di Banach e siano $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow Z$ due operatori lineari limitati. Allora $ST : X \rightarrow Z$ è un operatore lineare limitato e $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

⁵La norma spettrale di una matrice è uguale al suo numero singolare più grande.

Proposizione B.2 *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- a. T è un operatore limitato.
- b. $T : X \rightarrow Y$ è una funzione uniformemente continua.
- c. $T : X \rightarrow Y$ è una funzione continua.
- d. $T : X \rightarrow Y$ è continua in 0.

Dimostrazione. [(a) \implies (b)] Per $x_1, x_2 \in X$ si ha grazie alla limitatezza di T : $\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \|T\|\|x_1 - x_2\|$. Quindi, se $\|x_1 - x_2\| < (\varepsilon/\|T\|)$, allora $\|Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon$. Allora T è uniformemente continuo.

[(b) \implies (c) \implies (d)] Ovvio.

[(d) \implies (a)] Sia T continuo in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\|x\| < \delta$ implica $\|Tx\| < 1$. Quindi per qualsiasi $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ha $\|(\delta/2)x\| < \delta$ e dunque $(\delta/2)\|Tx\| = \|T(\delta/2)x\| < 1$. Allora $\|x\| = 1$ implica $\|Tx\| < (2/\delta)$. Di conseguenza T è limitato con norma $\leq (2/\delta)$. \square

Consideriamo adesso lo spazio di Banach $\mathcal{L}(X, Y)$ di tutti gli operatori lineari e limitati da X in Y , dove X e Y sono spazi di Banach. Scriviamo $\mathcal{L}(X)$ se $X = Y$. Per $X = F^m$ e $Y = F^n$ (per $F = \mathbb{R}$ o $F = \mathbb{C}$) lo spazio $\mathcal{L}(X, Y)$ coincide con quello delle matrici $n \times m$.

Teorema B.3 (Teorema dell'Operatore Inverso) ⁶ *Siano X e Y spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ invertibile. Allora l'operatore inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Teorema B.4 *Siano $T, S \in \mathcal{L}(X)$, e sia T invertibile. Allora S è invertibile se $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. In particolare, S è invertibile se $\|I - S\| < 1$.*

Dimostrazione. L'equazione $Sx = y$ può essere scritta nella forma equivalente $x = F(x)$, dove

$$F(x) = T^{-1}y + T^{-1}(T - S)x.$$

Siccome

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \|T^{-1}\| \|T - S\| \|x_1 - x_2\|, \quad (\text{B.2})$$

⁶Una dimostrazione, basata sul Teorema di Banach-Steinhaus, si trova in [20]. La sua dimostrazione non è facile e si basa sul fatto che l'intersezione di una successione di aperti densi in uno spazio metrico completo è alla sua volta densa [Teorema di Baire].

dove $\|T^{-1}\| \|T - S\| < 1$, si può risolvere l'equazione $x = F(x)$ per iterazione, secondo il cosiddetto Teorema delle Contrazioni. Infatti, sia $x_0 \in X$ un vettore iniziale e poniamo $x_{n+1} = F(x_n)$ per $n = 0, 1, 2, \dots$. Allora

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &= \|F(x_1) - F(x_0)\| \leq \|T^{-1}\| \|T - S\| \|x_1 - x_0\|, \\ \|x_3 - x_2\| &= \|F(x_2) - F(x_1)\| \leq \|T^{-1}\| \|T - S\| \|x_2 - x_1\| \\ &\leq [\|T^{-1}\| \|T - S\|]^2 \|x_1 - x_0\|, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \|x_{n+1} - x_n\| &= \|F(x_n) - F(x_{n-1})\| \leq \|T^{-1}\| \|T - S\| \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq [\|T^{-1}\| \|T - S\|]^n \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_{n+1}\| &\leq \sum_{j=0}^{p-1} \|x_{n+j+1} - x_{n+j}\| \leq \|x_1 - x_0\| \sum_{j=0}^{p-1} [\|T^{-1}\| \|T - S\|]^{n+j} \\ &\leq \|x_1 - x_0\| \sum_{j=0}^{\infty} [\|T^{-1}\| \|T - S\|]^{n+j} \\ &= \|x_1 - x_0\| \frac{[\|T^{-1}\| \|T - S\|]^n}{1 - \|T^{-1}\| \|T - S\|}. \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione tende a zero se $n \rightarrow \infty$. Dunque $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in X e quindi ha limite $x \in X$. Utilizzando la continuità della $F : X \rightarrow X$ [vedi la (B.2)], otteniamo

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = F(x).$$

L'unicità della soluzione è immediata. □

5.2 Proprietà spettrali

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ consideriamo gli operatori lineari $\lambda - T$ (cioè, $\lambda I_X - T$ scritto male). Studiamo l'invertibilità di $\lambda - T$ al variare di λ .

Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice *autovalore* di T se esiste $0 \neq x \in X$ tale che $(\lambda - T)x = 0$ (cioè, tale che $Tx = \lambda x$). Il vettore x si chiama un corrispondente *autovettore*. In tal caso $\text{Ker}(\lambda - T) = \{x \in X : (\lambda - T)x = 0\}$ è l'insieme di tutti gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ , più il vettore zero. La definizione generalizza quella per le matrici quadrate. Infatti, come per le matrici quadrate l'esistenza dell'autovettore $0 \neq x \in X$ tale che $Tx = \lambda x$

implica che $\lambda - T$ non è invertibile. Per le matrici quadrate T basta risolvere l'equazione $\det(\lambda - T) = 0$ per trovare tutti gli autovalori di T . Nel caso di uno spazio X a dimensione infinita la situazione è molto più complicata.

Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Il numero complesso λ appartiene allo spettro di T , $\sigma(T)$, se $\lambda - T$ NON è invertibile. Quindi tutti gli autovalori di T appartengono allo spettro di T . Il numero complesso λ appartiene al risolvente di T , $\rho(T)$, se $\lambda - T$ è invertibile. Dunque $\rho(T)$ è il complementare di $\sigma(T)$ nel piano complesso.

Teorema B.5 Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Allora lo spettro $\sigma(T)$ di T è un sottoinsieme chiuso, limitato e non vuoto di \mathbb{C} , mentre il risolvente $\rho(T)$ di T è un aperto.

Dimostrazione. Se $|\lambda| > \|T\|$, $\|\lambda^{-1}T\| < 1$ implica l'invertibilità dell'operatore $\lambda - T = \lambda(I_X - \lambda^{-1}T)$. Inoltre

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{\lambda^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{\lambda^{j+1}}, \quad (\text{B.3})$$

dove la serie è convergente nella norma di $\mathcal{L}(X)$. Quindi lo spettro è contenuto nella palla di centro zero e raggio $\|T\|$.

Inoltre, se $\lambda \in \rho(T)$ e $|\mu - \lambda| < \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$, allora $\|(\lambda - T) - (\mu - T)\| < \|(\lambda - T)^{-1}\|^{-1}$ e quindi $\mu \in \rho(T)$, dove abbiamo applicato il Teorema B.4. Di conseguenza, $\rho(T)$ è aperto e quindi il suo complementare $\sigma(T)$ è chiuso.

Infine, se $\sigma(T) = \emptyset$ e quindi $\rho(T) = \mathbb{C}$, per ogni $x, y \in X$ la funzione $((\lambda - T)^{-1}x, y)$ è analitica nell'intero piano complesso e tende a zero se $|\lambda| \rightarrow \infty$.⁷ Secondo il Teorema di Liouville,⁸ segue che $((\lambda - T)^{-1}x, y) = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x, y \in X$. Di conseguenza, $(\lambda - T)^{-1} = 0$, un'impossibilità per un operatore invertibile. Quindi $\sigma(T) \neq \emptyset$. \square

Sia $r(T)$, il raggio spettrale di T , il minimo di tutti gli r per cui la serie (B.3) è assolutamente convergente per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > r$. Allora $r(T) \leq \|T\|$ e $\sigma(T)$ è contenuto nel disco di centro 0 e raggio $r(T)$. Infatti quel disco è il disco di centro 0 più piccolo che contiene lo spettro di T . Utilizzando l'espressione per il raggio di convergenza di una serie di potenze, troviamo

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Sia $T \in \mathcal{L}(X)$. La formula $\mathbb{C} = \sigma(T) \cup \rho(T)$ rappresenta una partizione del piano complesso in due insiemi disgiunti. Adesso discutiamo un'ulteriore suddivisione di \mathbb{C} in quattro insiemi due a due disgiunti.

⁷In modo implicito abbiamo supposto che X sia uno spazio di Hilbert. La dimostrazione si adatta facilmente al caso di uno spazio di Banach generale.

⁸Una funzione analitica e limitata in tutto il piano complesso è necessariamente costante.

- a. Se $\lambda - T$ è invertibile, $\lambda \in \rho(T)$. Altrimenti, $\lambda \in \sigma(T)$.
- b. Se $\text{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$, $\text{Im}(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare denso in X e $\text{Im}(\lambda - T) \neq X$, si ha $\lambda \in \sigma_c(T)$. Tali punti λ appartengono allo *spettro continuo* di T . In tal caso ogni $x \in X$ si può approssimare da vettori $(\lambda - T)z$ per qualche $z \in X$. Purtroppo esistono $x \in X$ tale che l'equazione $(\lambda - T)z = x$ non ha nessuna soluzione $z \in X$.
- c. Se $\text{Ker}(\lambda - T) = \{0\}$ e $\text{Im}(\lambda - T)$ è un sottospazio NON denso in X , si ha $\lambda \in \sigma_r(T)$ [lo *spettro residuo* di T].
- d. Se $\text{Ker}(\lambda - T) \neq \{0\}$, λ è un autovalore di T . L'insieme degli autovalori si scrive come $\sigma_p(T)$ [inglese: point spectrum]. Gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ sono tutti i vettori in $\text{Ker}(\lambda - T) \setminus \{0\}$.

Abbiamo ottenuto la partizione

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \underbrace{\sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)}_{\sigma(T)}$$

del piano complesso in quattro insiemi due a due disgiunti.

5.3 Operatori autoaggiunti e unitari

Discutiamo ora gli operatori lineari su uno spazio di Hilbert. Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Si definisce l'operator aggiunto T^* dall'uguaglianza

$$(T^*x, y) = (x, Ty), \quad x, y \in X.$$

Si dimostra facilmente che

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T^*x\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(T^*x, y)| \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(x, Ty)| = \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| = \|T\|. \end{aligned}$$

Quindi $T^* \in \mathcal{L}(X)$ e $\|T^*\| = \|T\|$. Valgono le seguenti proprietà: $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$ [(λT) * = λT^* in uno spazio di Hilbert reale], $(T+S)^* = T^*+S^*$, $(TS)^* = S^*T^*$, $(T^*)^* = T$.

Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in \mathcal{L}(X)$. Introduciamo le seguenti classi di operatori lineari:

- a. Gli operatori *autoaggiunti*: $T^* = T$.
- b. Gli operatori *unitari*: T invertibile e $T^{-1} = T^*$.

In uno spazio di Hilbert *complesso* T un operatore $T \in \mathcal{L}(X)$ è autoaggiunto se e solo se (Tx, x) è un numero reale per ogni $x \in X$.

Teorema B.6 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora*

$$\sigma(T) \subset \underbrace{\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}}_{\text{"numerical range"}} \subset \mathbb{R}.$$

Inoltre, $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Dimostrazione. Prima dimostriamo che $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$. Infatti se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $0 \neq x \in X$ è il corrispondente autovettore tale che $Tx = \lambda x$, allora $\lambda\|x\|^2 = \lambda(x, x) = (Tx, x) \in \mathbb{R}$ e dunque $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sia $\lambda \in \sigma_r(T)$. Siccome $\text{Im}(\lambda - T)$ è un sottospazio lineare non denso in X , esiste $0 \neq x \in X$ tale che $((\lambda - T)z, x) = 0$ per ogni $z \in X$. In tal caso ne segue, per $z = x$,

$$\lambda = \frac{(Tx, x)}{(x, x)} \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\sigma_r(T) \subset \mathbb{R}$. Da questo fatto si trova per ogni $z \in X$

$$0 = ((\lambda - T)z, x) = (z, (\bar{\lambda} - T)x),$$

e quindi $(\bar{\lambda} - T)x = 0$ mentre $x \neq 0$. Risulta che $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T)$. Siccome $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, si ha $\lambda \in \sigma_p(T)$. Contraddizione. Ne segue allora che $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Sia $\lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$. Allora esiste una successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X tale che $\|x_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) e $\|(\lambda - T)x_n\| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$.⁹ Allora la stima $\|((\lambda - T)x_n, x_n)\| \leq \|(\lambda - T)x_n\| \|x_n\|$ con $\|x_n\| = 1$ implica che

$$\lambda - (Tx_n, x_n) = ((\lambda - T)x_n, x_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{B.4})$$

Siccome $(Tx_n, x_n) \in \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$, ne segue $\lambda \in \mathbb{R}$. Dunque $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$.

Infine, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ e la relazione (B.4) [dove $\|x_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$] implicano che lo spettro di T è contenuto nell'intervallo chiuso e limitato più piccolo che contiene l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$. Infatti, sia $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset [m, M]$. Allora

$$m\|x\|^2 \leq (Tx, x) \leq M\|x\|^2, \quad x \in X.$$

⁹Se non esistesse, avremmo $\|(\lambda - T)x\| \geq \varepsilon > 0$ per ogni vettore x di norma 1, il che esclude $\lambda \in \sigma_p(T)$ e implica la limitatezza di $(\lambda - T)^{-1}$. Siccome $\sigma_r(T) = \emptyset$ implica che $(\lambda - T)^{-1}$ può essere definito su uno sottospazio denso, la sua definizione si estende a tutto lo spazio X e quindi $\lambda \in \rho(T)$.

Dunque per ogni $x \in X$

$$\begin{cases} \lambda > M : & (\lambda - M)\|x\|^2 \geq ((\lambda - T)x, x) \geq (\lambda - m)\|x\|^2 \\ \lambda < m : & (m - \lambda)\|x\|^2 \leq ((T - \lambda)x, x) \leq (M - \lambda)\|x\|^2. \end{cases}$$

Di conseguenza, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$, non esiste nessuna successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che $\|x_n\| = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) e $\|(\lambda - T)x_n\| \rightarrow 0$. Quindi $\sigma(T) \subset [m, M]$. \square

Si può infatti dimostrare che per un operatore lineare autoaggiunto l'insieme $\{(Tx, x) : \|x\| = 1\}$ è l'intervallo chiuso e limitato reale più piccolo che contiene lo spettro di T . In particolare, gli estremi di quell'intervallo appartengono a $\sigma(T)$. Purtroppo la dimostrazione non è elementare.

Teorema B.7 *Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ un operatore autoaggiunto. Allora il suo raggio spettrale coincide con la sua norma: $r(T) = \|T\|$.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{L}(X)$ autoaggiunto. Allora

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^2x, x) \leq \|T^2x\|\|x\|, \quad x \in X,$$

dove è stata applicata la disuguaglianza di Schwartz. Passando all'estremo superiore per gli $x \in X$ con $\|x\| = 1$ si ottiene $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ e dunque

$$\|T^2\| = \|T\|^2.$$

Questo implica

$$\|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite se $n \rightarrow \infty$ si trova $r(T) = \|T\|$. \square

Passiamo ora agli operatori unitari. Utilizzando la formula di polarizzazione si può dimostrare che un'isometria (cioè, un operatore lineare U su uno spazio di Hilbert X tale che $\|U\varphi\| = \|\varphi\|$ per ogni $\varphi \in X$) ha la proprietà

$$(U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in X,$$

e quindi la proprietà

$$(U^*U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in X.$$

Quest'ultimo implica che U è un'isometria in X se e solo se $U^*U = I_X$. Nella stessa maniera si vede che un operatore U ha la proprietà che U^* è un'isometria se e solo se $UU^* = I_X$. Conclusione: U è un operatore unitario se e solo se U e U^* sono ambedue isometrie se e solo se U è un'isometria invertibile. Siccome

in tal caso anche U^n e $U^{-n} = (U^{-1})^n$ sono isometrie ($n = 1, 2, 3, \dots$) se U è unitario, risulta

$$\|U^n\| = \|U^{-n}\| = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Di conseguenza,

$$r(U) = r(U^{-1}) \leq 1,$$

e quindi $\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

5.4 Operatori autoaggiunti non limitati

Ci vuole una teoria degli operatori lineari autoaggiunti non limitati in uno spazio di Hilbert. Siano H uno spazio di Hilbert complesso e T un operatore lineare con dominio $\mathcal{D}(T)$ denso in H . Allora T si dice *hermitiano* [oppure *simmetrico*] se

$$(Tx, y) = (x, Ty), \quad x, y \in \mathcal{D}(T).$$

Per un operatore hermitiano T , definiamo l'operatore T^* da

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T^*) = \left\{ y \in H : \begin{array}{l} \exists c = c(y) > 0 : \\ |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, \quad x \in \mathcal{D}(T) \end{array} \right\}, \\ \text{In tal caso } \exists! z \in H : (Tx, y) = (x, z); \text{ Poniamo } T^*y = z. \end{array} \right.$$

Ovviamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*), \\ T^*x = Tx, \quad x \in \mathcal{D}(T), \end{array} \right.$$

cioè T^* estende T (scritto: $T \subset T^*$).

Un operatore lineare T si dice *autoaggiunto* se $\mathcal{D}(T)$ è denso in H , T è hermitiano e $T^* = T$. Quindi T è autoaggiunto se T è hermitiano e il suo dominio è denso e soddisfa

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ y \in H : \begin{array}{l} \exists c = c(y) > 0 : \\ |(Tx, y)| \leq c(y)\|x\|, \quad x \in \mathcal{D}(T) \end{array} \right\}.$$

In tal caso l'insieme risolvente $\rho(T)$ di tutti i punti $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda - T)[\mathcal{D}(T)] = H, \\ \text{Ker}(\lambda - T) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = \lambda x\} = \{0\}, \\ \exists c(\lambda) > 0 : \|(\lambda - T)^{-1}x\| \leq c(\lambda)\|x\| \text{ per } x \in H, \end{array} \right.$$

contiene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Quindi il suo complementare, lo spettro $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$, è un sottoinsieme chiuso (ma non necessariamente limitato¹⁰) della retta reale. Inoltre, lo spettro residuo $\sigma_r(T)$ è vuoto.

Non tutti gli operatori simmetrici hanno un'estensione autoaggiunta. Inoltre, se esiste, ne esistono molte. Senza dimostrazione enunciamo il seguente risultato.

Teorema B.8 (Friedrichs) *Sia T un operatore hermitiano in H tale che per un'opportuna costante q*

$$(Tx, x) \geq q\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{D}(T).$$

Allora esiste un'unica estensione autoaggiunta \bar{T} di T , la cosiddetta estensione di Friedrichs, tale che

$$(\bar{T}x, x) \geq q\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{D}(\bar{T}).$$

Sotto le ipotesi del Teorema B.8 potrebbero esistere moltissime estensioni autoaggiunte di T , ma soltanto quella di Friedrichs ha la proprietà di essere limitata inferiormente.¹¹

Nei Cap. IV e V discuteremo l'estensione autoaggiunta \bar{L} di un operatore di Sturm-Liouville L . Essendo q_{\min} il minimo del coefficiente $q(x)$ dell'operatore differenziale, quest'operatore L è simmetrico nel senso che $(Lf, g) = (f, Lg)$ per f, g nel dominio \mathcal{M}_L di L e soddisfa $(Lf, f) \geq q_{\min}\|f\|_2^2$ per $f \in \mathcal{M}_L$. In tal caso un'estensione \bar{L} definita in un dominio denso $\mathcal{D}(\bar{L})$ tale che $\bar{L}[\mathcal{D}(\bar{L})] = L^2(\Omega)$ e $G \stackrel{\text{def}}{=} \bar{L}^{-1}$ è un operatore integrale con nucleo hermitiano continuo $\mathcal{G}(x, y)$, la cosiddetta funzione di Green, tutto quanto sotto l'ipotesi che $\lambda = 0$ non sia autovalore del problema di Sturm-Liouville. Nel caso unidimensionale abbiamo infatti dimostrato tutti i passaggi. L'abbiamo lasciato in sospeso nel caso multidimensionale.

¹⁰Infatti $\sigma(T)$ è limitato se e solo se $\mathcal{D}(T) = H$ se e solo se T è limitato.

¹¹La dimostrazione è come segue. Sia $[x, y] = \frac{1}{q}(Tx, y)$ per $x, y \in \mathcal{D}(T)$. Allora $[x, x] \geq \|x\|^2$ per $x \in \mathcal{D}(T)$. In tal caso, essendo H_1 lo spazio di Hilbert più piccolo (tranne per l'applicazione di una trasformazione unitaria) il cui prodotto scalare estende il prodotto scalare $[\cdot, \cdot]$ non completo di $\mathcal{D}(T)$, allora la mappa di inclusione da $\mathcal{D}(T)$ in H può essere estesa univocamente ad una trasformazione lineare continua da H_1 in H . Ciò rende possibile considerare H_1 univocamente come un insieme "intermedio" tale che $\mathcal{D}(T) \subset H_1 \subset H$. Sia ora

$$\mathcal{D}(\bar{T}) = \{x \in H_1 : y \mapsto [x, y] \text{ è un funzionale } H_1\text{-limitato}\}.$$

Secondo il teorema di rappresentazione di Riesz [Riesz representation theorem], esiste un unico vettore $\bar{T}x \in H$ tale che $[x, y] = (\bar{T}x, y)$ per $x, y \in H_1$. In tal caso $\frac{1}{q}(\bar{T}x, x) \geq \|x\|^2$ per ogni $x \in \mathcal{D}(\bar{T})$. È inoltre facile dimostrare che \bar{T} ammette un operatore inverso limitato \bar{T}^{-1} definito su H che è limitato e simmetrico e quindi autoaggiunto. Di conseguenza, \bar{T} è autoaggiunto.

Appendice C

INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE

L'integrale di Riemann non basta per studiare la fisica matematica, grazie alle sue pessime proprietà di convergenza. D'altra parte, l'integrale di Lebesgue copre tutte le applicazioni di fisica matematica ma non è facile da introdurre in poco tempo. Fortunatamente lo studio degli insiemi di Borel e delle funzioni misurabili secondo Borel ci permette a generalizzare il concetto di integrale abbastanza e a farlo in tempi ragionevoli.

1 Insiemi di Borel

Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è detto *insieme di Borel* se appartiene alla famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n più piccola ottenuta dagli insiemi aperti applicando le seguenti operazioni: 1) unione finita o numerabile, 2) intersezione finita o numerabile, e 3) complementazione [cioè l'operazione $B \mapsto \mathbb{R}^n \setminus B$]. È chiaro che tutti i sottoinsiemi aperti e chiusi di \mathbb{R}^n sono di Borel. Per $n = 1$ gli intervalli $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$ e $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n})$ sono di Borel.

Siano $a, b \in \mathbb{R}^n$, dove $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$. Allora

$$m([a, b]) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

è la *misura* del pluriintervallo $[a, b)$. Per un'unione finita o numerabile E di pluriintervalli due a due disgiunti si definisce la sua misura $m(E)$ come la somma delle misure dei pluriintervalli, possibilmente con $m(E) = +\infty$. Allora $m([a, \infty)) = +\infty$, dove $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > a_1, \dots, x_n > a_n\}$. Siccome tutte le palle $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < \varepsilon\}$ sono unioni numerabili due a due disgiunti di pluriintervalli, anche la misura di $B_\varepsilon(a)$ si può calcolare.

Osservando ora che tutti gli aperti sono unioni finite o numerabili di palle, si può estendere la misura a qualsiasi sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n .

Sia Σ la cosiddetta σ -algebra degli insiemi di Borel in \mathbb{R}^n , dove σ -algebra vuol dire una famiglia di sottoinsiemi chiusa rispetto all'unione finita e numerabile, all'intersezione finita e numerabile e alla complementazione che contiene l'insieme vuoto e \mathbb{R}^n stesso, insieme con la misura di Borel. Questa misura ha le seguenti proprietà:

1. $m(\emptyset) = 0$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$,
2. Se $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi di Borel due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ è un insieme di Borel e

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

Di conseguenza, se $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente di insiemi di Borel, allora

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(C_n).$$

Purtroppo la σ -algebra degli insiemi di Borel ha la proprietà che non tutti i sottoinsiemi degli insiemi di Borel di misura zero sono di Borel. Per questo motivo la σ -algebra di Borel viene estesa a quella di Lebesgue: Un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice *misurabile (secondo Lebesgue)* se esiste un insieme di Borel B tale che la cosiddetta differenza simmetrica $A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è un sottoinsieme di un insieme di Borel di misura zero. In tal caso si definisce come la misura $m(A)$ quella dell'insieme di Borel B . Si può dimostrare che gli insiemi misurabili secondo Lebesgue costituiscono una σ -algebra con le seguenti proprietà:

1. $m(\emptyset) = 0$ e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$,
2. Se $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili due a due disgiunti, allora $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ è un insieme misurabile e

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

Di conseguenza, se $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente di insiemi misurabili, allora

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(C_n).$$

È molto difficile individuare un sottoinsieme di \mathbb{R}^n che non è misurabile. Dall'assioma di scelta segue la sua esistenza.¹

2 Integrale di Lebesgue

Si dice *funzione semplice* una funzione complessa φ definita in \mathbb{R}^n che ha soltanto un numero finito di valori e per cui tutti gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = c \neq 0\}$$

sono misurabili di misura finita. Essendo $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ i valori diversi della funzione semplici φ , si ha

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \chi_{E_j} = \begin{cases} \lambda_j, & x \in E_j, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_{j=1}^m E_j, \end{cases}$$

dove E_1, \dots, E_m sono insiemi misurabili di misura finita disgiunti due a due e χ_E è la funzione caratteristica di E (cioè, $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$, e $\chi_E(x) = 0$ se $x \notin E$). Come *integrale di Lebesgue* si definisce²

$$\int \varphi(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m \lambda_j m(E_j).$$

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ si dice misurabile se per ogni insieme di Borel E in \mathbb{C} l'immagine inversa

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in E\}$$

è misurabile. In particolare, le funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sono misurabili.

Le funzioni misurabili hanno le seguenti proprietà:

1. Se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sono misurabili, allora $f + g$ e $f - g$ sono misurabili.

¹Dim: La relazione $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ è una relazione di equivalenza in $[0, 1)$ che suddivide $[0, 1)$ in classi di equivalenza. Applicando l'Assioma di Scelta, sia E un sottoinsieme di $[0, 1)$ che contiene esattamente un elemento di ogni classe di equivalenza.

Allora, per ogni $q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$, $E_q \stackrel{\text{def}}{=} [(q + E) \cap [0, 1)] \cup [(q - 1 + E) \cap [0, 1)]$ è un sottoinsieme di $[0, 1)$ che contiene esattamente un elemento di ogni classe di equivalenza. Se E fosse misurabile, lo sarebbe anche E_q per ogni $q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$. In tal caso la misura di E_q non dipenderebbe da q , mentre $\cup_{q \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}} E_q = [0, 1)$. Quindi sia l'ipotesi $m(E) = 0$ che quella $m(E) > 0$ condurrebbe alla contraddizione che $m([0, 1)) \in \{0, +\infty\}$. Di conseguenza, E non può essere misurabile.

²Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1$ per gli irrazionali x in $[0, 1]$ e $f(x) = 0$ altrove. Poichè $m([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = m([0, 1]) - m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1$, si ha: $\int f(x) dx = 1$.

2. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile e $\lambda \in \mathbb{C}$, allora λf è misurabile.
3. Se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sono misurabili, allora fg è misurabile.
4. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sono misurabili, allora il prodotto di composizione $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile.
5. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile, allora $|f| = \max(f, -f)$, $f_+ = \max(f, 0)$ e $f_- = \max(-f, 0)$ sono misurabili.
6. Se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili, allora $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ sono misurabili.
7. Se f_1, f_2, \dots sono misurabili e $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, allora f è misurabile.

Definiamo ora l'integrale di Lebesgue per le funzioni misurabili non negative. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ misurabile e non negativa. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici non negative $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tali che $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (tranne in un sottoinsieme di misura zero). In tal caso la successione degli integrali di Lebesgue $\int f_n(x) dx$ è crescente e il suo limite (che potrebbe essere uguale a $+\infty$) si definisce come l'integrale di Lebesgue della f :

$$\int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx.$$

Nel seguente teorema i valori degli integrali possono essere uguali a $+\infty$.

Teorema C.1 (Beppo-Levi) *Sia $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una successione crescente di funzioni misurabili non negative. Sia $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx.$$

Passiamo ora all'integrazione delle funzioni a valori reali. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile. Poniamo $f_\pm = \max(\pm f, 0)$. Allora $f_\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ sono misurabili e non negative e $f_+ - f_- = f$. Poniamo ora

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int f_+(x) dx - \int f_-(x) dx & \text{se ambedue gli integrali sono finiti,} \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x) dx = +\infty \text{ e } \int f_-(x) dx < +\infty, \\ -\infty & \text{se } \int f_+(x) dx < +\infty \text{ e } \int f_-(x) dx = +\infty, \\ \text{non esistente} & \text{se } \int f_+(x) dx = \int f_-(x) dx = +\infty. \end{cases}$$

Inoltre,

$$\int |f(x)| dx \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int f_+(x) dx + \int f_-(x) dx & \text{se ambedue gli integrali sono finiti,} \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x) dx = +\infty \text{ e } \int f_-(x) dx < +\infty, \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x) dx < +\infty \text{ e } \int f_-(x) dx = +\infty, \\ +\infty & \text{se } \int f_+(x) dx = \int f_-(x) dx = +\infty. \end{cases}$$

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *sommabile* se ambedue gli integrali $\int f_{\pm}(x) dx$ sono finiti.

Per definire gli integrali delle funzioni misurabili $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, si osservi prima che $\text{Re } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\text{Im } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili. In tal caso, se sono definiti ambedue gli integrali $\int \text{Re } f(x) dx$ e $\int \text{Im } f(x) dx$, allora

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int \text{Re } f(x) dx + i \int \text{Im } f(x) dx.$$

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *sommabile* se è finito l'integrale della funzione $|f| = \sqrt{(\text{Re } f)^2 + (\text{Im } f)^2}$.

L'integrale di Lebesgue ha le seguenti proprietà:

1. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$
2. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx,$
3. $|\int f(x) dx| \leq \int |f(x)| dx.$
4. Se $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ ha misura zero, allora $\int f(x) dx = \int g(x) dx.$

L'ultima proprietà è di estrema importanza per capire l'integrale di Lebesgue: Il suo valore non cambia se la funzione viene modificata su un insieme di misura zero. Due funzione f, g come nella proprietà 4 si dicono *quasi uguali*. Oppure: Si dice che $f(x) = g(x)$ *quasi ovunque*.

Infine, se E è un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n , una funzione $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ si dice misurabile se la sua estensione $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus E, \end{cases}$$

è misurabile. In tal caso

$$\int_E f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int \tilde{f}(x) \chi_E(x) dx,$$

dove $\chi_E(x) = 1$ per $x \in E$ e $\chi_E(x) = 0$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Discutiamo ora il seguente esempio illustrativo.

Esempio C.2 Sia $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Allora la f è continua per $x \geq 0$ e quindi misurabile. Vale l'integrale di Riemann generalizzata

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Purtroppo questo integrale non è un integrale di Lebesgue. Infatti,

$$f_+(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & 2(n-1)\pi \leq x \leq (2n-1)\pi, \\ 0, & \text{altrove;} \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -\frac{\sin(x)}{x}, & (2n-1)\pi \leq x \leq 2n\pi, \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$. Osservando che

$$\int_{2(n-1)\pi}^{(2n-1)\pi} \sin(x) dx = - \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \sin(x) dx = 1,$$

si vede facilmente che

$$\int f_+(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\pi} = +\infty,$$

$$\int f_-(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} = +\infty.$$

Quindi $\int f(x) dx$ non esiste nel senso di Lebesgue.

3 Alcuni Teoremi Importanti

Il seguente risultato riguarda lo scambio tra limite e integrazione.

Teorema C.3 (della convergenza dominata, di Lebesgue) Sia $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una successione di funzioni misurabili tali che

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ per quasi ogni x ,

b. per $n = 1, 2, 3, \dots$ si ha $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi ogni x , dove g è sommabile.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \int f(x) dx.$$

Secondo il suddetto teorema, si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

La seconda condizione è assolutamente necessaria.

Esempio C.4 Sia $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^\infty \phi(x) dx = 1.$$

Ponendo $f_n(x) = \phi(x - n)$, si vede facilmente che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int f_n(x) dx}_{\text{sempre uguale ad 1}} = 1, \quad \int \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{\text{uguale a 0 q.o.}} dx = 0.$$

Dunque non è consentita l'applicazione del Teorema della Convergenza Dominata.

Esempio C.5 Sia $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione continua e non negativa tale che

$$\phi(0) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x\phi(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^\infty \phi(x) dx = 1.$$

Ponendo $f_n(x) = n\phi(nx)$, si vede subito che $f_n(x) \rightarrow 0$ per $x \neq 0$ e $f_n(0) \rightarrow +\infty$. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int f_n(x) dx}_{\text{sempre uguale ad 1}} = 1, \quad \int \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{\text{uguale a 0 q.o.}} dx = 0.$$

Dunque non è consentita l'applicazione del Teorema della Convergenza Dominata.

Il Teorema della Convergenza Dominata è fondamentale e ha molti corollari di importanza. Per esempio, sia $f(\cdot, \xi) : \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione sommabile che dipende in modo continuo dal parametro $\xi \in \Omega$. Allora $\int f(x, \xi) dx$ dipende in modo continuo da $\xi \in \Omega$ **se esiste una funzione sommabile** $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ **tale che** $|f(x, \xi)| \leq g(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\xi \in \Omega$. Infatti, scegliendo $\eta \in \Omega$, basterebbe considerare una successione in $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ in Ω convergente ad η e la successione di funzioni $f_n(x) = f(x, \eta_n)$ per $n = 1, 2, 3, \dots$ per dimostrare il corollario.

L'ultimo risultato riguarda il cambio dell'ordine di integrazione.

Teorema C.6 (Fubini) *Sia $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}$, scritta come funzione di $z = (x, y)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $z \in \mathbb{R}^{n+m}$, misurabile e non negativa, oppure sommabile. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy. \quad (\text{C.1})$$

In particolare, la (C.1) vale nei seguenti casi:

1. almeno uno degli integrali $\int \int |f(x, y)| dy dx$ e $\int \int |f(x, y)| dx dy$ è finito.
2. La f è non negativa quasi ovunque.

Appendice D

DISTRIBUZIONI E SPAZI DI SOBOLEV

In questo documento discuteremo due argomenti di importanza:

- a) le distribuzioni, le funzioni test e loro applicazioni principali,
- b) gli spazi di Sobolev e loro applicazioni principali.

Il motivo principale per introdurre le distribuzioni nella seconda metà degli anni 40 è stata la giustificazione rigorosa della funzione delta di Dirac utilizzata in fisica teorica. Secondo i libri di testo in fisica la funzione $\delta(x - x_0)$ è una funzione con valori uguali a zero per $x \neq x_0$, con il valore $+\infty$ per $x = x_0$ e tale che l'integrale $\int \delta(x - x_0) dx = 1$. Una tale "funzione" non si può inquadrare nell'ambito delle funzioni misurabili, poichè essa si annulla quasi ovunque ma il suo integrale è uguale a 1. D'altra parte, se $f(x)$ è una funzione, si ha

$$\int f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0).$$

Quindi si potrebbe invece inquadrare la funzione delta di Dirac come il funzionale lineare $f \mapsto f(x_0)$ applicato ad un'opportuna classe di cosiddette funzioni test f . Siccome deve avere senso il valore della f nel punto x_0 , la f deve essere almeno continua.

Una possibile descrizione della funzione delta è la sua rappresentazione come caso limite di una successione $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni δ_n abbastanza regolari tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x)\delta_n(x - x_0) dx = f(x_0)$$

per un'opportuna classe di funzioni test f . Per esempio, se il dominio della funzione delta fosse la retta reale, ci sarebbero le seguenti possibilità:

- a. $\delta_n(x) = n$ per $|x| < \frac{1}{2n}$ e $\delta_n(x) = 0$ per $|x| > \frac{1}{2n}$;
- b. $\delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 x^2}$;
- c. $\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$;
- d. $\delta_n(x) = -n$ per $|x| < \frac{1}{2n}$, $\delta_n(x) = 2n$ per $\frac{1}{2n} \leq |x| \leq \frac{1}{n}$ e $\delta_n(x) = 0$ per $|x| > \frac{1}{n}$.

Osserviamo che 1) $\delta_n(x - x_0)$ ha una "peak" per $x = x_0$, 2) tende all'infinito se $x = x_0$, 3) tende a zero se $x \neq x_0$, e 4) verifica $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1$. In questo documento introduciamo la "funzione" delta di Dirac come distribuzione [cioè, come funzionale lineare applicato ad opportune "funzioni test" di classe C^∞].

Il motivo principale per introdurre gli spazi di Sobolev negli anni 40 è stato di far appartenere le soluzioni delle equazioni differenziali alle derivate parziali ad opportuni spazi di Hilbert. In tal caso il problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

viene prima convertito nel seguente problema variazionale:

Cercare, per ogni $t > 0$, $u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$ tale che per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx &= - \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla v(x) dx, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx &= \int_{\Omega} u_0(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

Lo spazio di Sobolev $H_0^1(\Omega)$ consiste in tutte le funzioni $u \in L^2(\Omega)$ le cui derivate parziali prime appartengono a $L^2(\Omega)$ [con la definizione di tali derivate da precisare].

In generale, gli spazi di Sobolev consistono nelle funzioni L^2 le cui derivate parziali fino all'ordine $s \geq 0$ appartengono ad L^2 . In tal modo, le distribuzioni possono essere descritte come membri di un opportuno spazio di Sobolev (di ordine $s < 0$).

La maggiore applicazione degli spazi di Sobolev riguarda il metodo degli elementi finiti per risolvere numericamente le equazioni differenziali alle derivate parziali.

1 Funzionali lineari

Sia X uno spazio di Banach reale o complesso (cioè $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Un'applicazione lineare $\Phi : X \rightarrow \mathbb{F}$ tale che

$$|\Phi\varphi| \leq \text{cost} \cdot \|\varphi\|, \quad \varphi \in X,$$

si dice *funzionale lineare continuo* in X . Utilizzando

$$\|\Phi\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|\Phi\varphi\|$$

per normalizzare i funzionali lineari continui, si ottiene uno spazio di Banach X^* , il cosiddetto *spazio duale*.

Se $X = \mathbb{F}^n$ ha dimensione finita n , esiste una corrispondenza biunivoca tra i funzionali lineari (continui) e i vettori $\psi \in \mathbb{F}^n$, dove

$$\Phi\varphi = (\varphi, \psi) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \varphi_k \psi_k, & \mathbb{F} = \mathbb{R}, \\ \sum_{k=1}^n \varphi_k \overline{\psi_k}, & \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

per $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ e $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Inoltre, se la norma è quella euclidea, si ha $\|\Phi\| = \|\psi\|$. Di conseguenza, X^* ha la stessa struttura di X .

Se X è uno spazio di Hilbert, esiste un'analogia corrispondenza biunivoca tra i funzionali lineari continui Φ in X e i vettori di X . Secondo il Teorema di Rappresentazione di Riesz,¹ per ogni $\Phi \in X^*$ esiste $\psi \in X$ tale che

$$\Phi\varphi = (\varphi, \psi), \quad \varphi \in X.$$

Inoltre, $\|\Phi\| = \|\psi\|$.

2 Funzioni Test

Sia $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano fuori di un insieme limitato. Allora gli elementi di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si chiamano *funzioni test*. Per esempio,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - a^2}\right), & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases}$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si vede facilmente che

¹Frigyes Riesz [1880-1956], tra i fondatori dell'analisi funzionale, dimostrò il suo teorema di rappresentazione nel 1909.

- a. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale;
 b. Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

appartiene a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Si dice che una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se esiste un insieme limitato K tale che $\varphi_m(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ (qualunque sia m) e se $D^\alpha \varphi_m(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente in $x \in K$, qualunque sia il multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Spesso la terminologia “funzione test” viene utilizzata per gli elementi di uno spazio vettoriale $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ più esteso di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Poniamo

$$(1 + |x|)^\beta = (1 + |x_1|)^{\beta_1} \cdots (1 + |x_n|)^{\beta_n}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Allora una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ appartiene ad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se essa è di classe C^∞ e $(1 + |x|)^\beta (D^\alpha \varphi)(x)$ tende a zero se $|x| \rightarrow \infty$, qualunque siano i multiindici α, β . Si vede facilmente che

- a. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale;
 b. Se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si dice che una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, per ogni insieme limitato K , $(1 + |x|)^\beta (D^\alpha \varphi_m)(x) \rightarrow (1 + |x|)^\beta (D^\alpha \varphi)(x)$ uniformemente in $x \in K$, qualunque siano i multiindici $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

È chiaro che

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n).$$

La vera sorpresa è che $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sia un sottospazio lineare denso in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3 Distribuzioni

Una funzione misurabile $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *localmente sommabile* se converge finito l'integrale $\int_E |f(x)| dx$ per ogni regione limitata E in \mathbb{R}^n . L'insieme di tutte le funzioni localmente sommabili è uno spazio vettoriale: $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Essenzialmente una distribuzione è un funzionale lineare: Per una distribuzione f e una funzione test φ si consideri il prodotto scalare (inglese: “pairing”)

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx.$$

Invece di considerare due funzioni $f, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si prendano una distribuzione f in uno spazio vettoriale più esteso e una funzione test φ in uno spazio vettoriale più ristretto tali che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ che converge a φ .

Più precisamente, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme di tutti i funzionali lineari f in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ che converge a φ . Identificando $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ con il funzionale lineare

$$\varphi \mapsto (f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx = \int_K f(x)\varphi(x) dx,$$

dove K è una regione limitato K fuori della quale si annulla la φ , si vede facilmente che

$$L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Ovviamente $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale.

In modo analogo si definisce $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ come l'insieme di tutti i funzionali f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f, \varphi_m) = (f, \varphi)$$

per ogni successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ che converge a φ . Ovviamente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale tale che

$$L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Purtroppo esistono funzioni localmente sommabili non contenute in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Per esempio, $e^{|x|}$ appartiene ad $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ma non appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Fortunatamente le distribuzioni che importano alle applicazioni principali, appartengono a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$).

Una successione $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) converge a φ se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f_m, \varphi) = (f, \varphi)$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (risp., per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$).

Discutiamo ora alcuni esempi.

a. Dato il punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il funzionale

$$\varphi \mapsto \varphi(x_0)$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$), poichè per una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ convergente a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\varphi_m(x_0) \rightarrow \varphi(x_0)$. Questa distribuzione si chiama la distribuzione delta di Dirac:

$$(\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0).$$

b. Dato il punto $x_0 \in \mathbb{R}$, il funzionale

$$\varphi \mapsto \int_{x_0}^\infty \varphi(x) dx$$

appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (e quindi a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$), poichè per una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ convergente a φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$\int_{x_0}^\infty \varphi_m(x) dx \rightarrow \int_{x_0}^\infty \varphi(x) dx.$$

Questa distribuzione si chiama la “funzione” di Heaviside:

$$(H_{x_0}, \varphi) = \int_{x_0}^\infty \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^\infty H(x - x_0) \varphi(x) dx.$$

Si vede facilmente che $H(\cdot - x_0) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Per due funzioni $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè per due funzioni $f, \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano rapidamente se $|x| \rightarrow \infty$, abbiamo

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi),$$

qualunque sia il multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e per $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Infatti, per dimostrarlo si facciano α_1 integrazioni per parti rispetto alla variabile x_1 , α_2 integrazioni per parti rispetto alla variabile x_2 , ecc. Ad ogni integrazione per parti si guadagna un meno e ci sono $|\alpha|$ integrazioni per parti in tutto. Tale formula si può ora utilizzare per definire $D^\alpha f$ per $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ [oppure: per $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$]. La derivazione $D^\alpha f$, detta *derivazione debole*, non è quella classica.² La derivazione debole è una trasformazione lineare continua nel seguente senso: Se $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ è una successione che converge

²Tecnicamente i due “pairing” $(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ e $(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ conducono a due derivazioni deboli diversi, ma in pratica non c'è alcuna differenza, poichè le nostre distribuzioni appartengono a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

a $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., a $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$), allora $\{D^\alpha f_m\}_{m=1}^\infty$ converge a $D^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (risp., a $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). Ciò è chiaro, poichè

$$(D^\alpha f_m, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f_m, D^\alpha \varphi) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha f, \varphi),$$

qualunque sia la funzione test φ .

Esempio D.1 Calcoliamo ora la derivata debole H'_{x_0} della funzione di Heaviside H_{x_0} , dove $x_0 \in \mathbb{R}$. Infatti, per $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha:

$$(H'_{x_0}, \varphi) = -(H_{x_0}, \varphi') = - \int_{x_0}^{\infty} \varphi'(x) dx = - [\varphi(x)]_{x=x_0}^{\infty} = \varphi(x_0) = (\delta_{x_0}, \varphi),$$

e quindi

$$H'_{x_0} = \delta_{x_0},$$

essendo la distribuzione delta di Dirac. Purtroppo, non vale la relazione

$$\frac{d}{dx} H(x - x_0) = \delta(x - x_0)$$

in modo classico, poichè la derivata classica non esiste per $x = x_0$.

Esempio D.2 Dati i nodi $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} = b$ (non necessariamente equidistanti), definiamo gli splines lineari ϕ_1, \dots, ϕ_m nel seguente modo:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove $j = 1, \dots, m$. Allora la sua derivata debole vale

$$\phi'_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1} < x < x_j, \\ \frac{-1}{x_{j+1}-x_j}, & x_j < x < x_{j+1}, \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

Allora per $v \in C^1[a, b]$ si ha:

$$\begin{aligned} (\phi'_j, v) &= -(\phi_j, v') = - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} v'(x) dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} v'(x) dx \\ &\quad - \left[\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} v(x) \right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \left[\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} v(x) \right]_{x_j}^{x_{j+1}} \\ &\quad + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{v(x)}{x_j-x_{j-1}} dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{v(x)}{x_{j+1}-x_j} dx \\ &= -v(x_j) + v(x_j) + \int_a^b \phi'_j(x) v(x) dx = (\phi'_j, v); \end{aligned}$$

quindi v'_j è la derivata debole di ϕ_j .

4 Trasformata di Fourier

4.1 Trasformata di Fourier negli spazi L^1 e L^2

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione sommabile. Allora l'integrale (di Lebesgue)

$$\hat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} F[f](\xi) = \int f(x)e^{-i(\xi,x)} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

è assolutamente convergente e $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$, dove $\|f\|_1 = \int |f(x)| dx$ è la norma L^1 di f . In tal caso si definisce una funzione

$$\xi \xrightarrow{\hat{f}} F[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$$

su \mathbb{R}^n che si chiama la *trasformata di Fourier* della f . Segue che $\hat{f}(\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposizione D.3 *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $\hat{f}(\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$ e tende a zero se $|\xi| \rightarrow +\infty$.*³

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $\hat{f}, \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. In tal caso risulta per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (\hat{f}, g) &= \int \left[\int f(x)e^{-i(x,\xi)} dx \right] g(\xi) d\xi \\ &= \int f(x) \left[\int g(\xi)e^{-i(\xi,x)} d\xi \right] dx = (f, \hat{g}); \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} (\hat{f}, g)_c &= \int \left[\int f(x)e^{-i(x,\xi)} dx \right] \overline{g(\xi)} d\xi \\ &= \int f(x) \left[\int g(\xi)e^{i(\xi,x)} d\xi \right] dx = (f, \hat{g}(-\xi))_c. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Inoltre, $(\cdot, \cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso di $L^2(\mathbb{R}^n)$, mentre (\cdot, \cdot) è quello reale.

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y) dy = \int f(x-y)g(y) dy$$

conduce ad una funzione $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Segue che

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h),$$

³La seconda parte si chiama il Lemma di Riemann-Lebesgue.

dove $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Applicando la trasformazione $z = x - y$ con y fissato si ha

$$\begin{aligned} F[f * g](\xi) &= \int \left(\int f(y)g(x-y) dy \right) e^{-i(x,\xi)} dx \\ &= \int \left(\int f(y)e^{-i(y,\xi)}g(z)e^{-i(z,\xi)} dy \right) dz = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

In altre parole, la trasformata di Fourier manda $L^1(\mathbb{R}^n)$ con il prodotto di convoluzione in $C(\mathbb{R}^n)$ con il prodotto algebrico usuale.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier su $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema D.4 (di Plancherel). *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int |f(x)|^2 dx. \quad (\text{D.4})$$

Inoltre, F ammette un'estensione lineare ad $L^2(\mathbb{R}^n)$ che soddisfa (D.4) per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ed è un operatore invertibile su $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Prima diamo la dimostrazione per $n = 1$.

Sia f una funzione continua e regolare a tratti con supporto in $(-\pi, \pi)$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

dove $c_n = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = (2\pi)^{-1} \hat{f}(n)$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2. \end{aligned}$$

Siccome $c_n[e^{-ixt}f] = (2\pi)^{-1} \hat{f}(n+t)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ e $|f(x)|^2 = |e^{-ixt}f(x)|^2$, risulta

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\hat{f}(n+t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Se f ha supporto compatto in \mathbb{R} , si scelga $c > 0$ tale che $g(x) = c^{1/2}f(cx)$ ha supporto in $(-\pi, \pi)$. In tal caso

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, approssimiamo f da funzioni continue e regolari a tratti con supporto compatto e troviamo la stessa relazione.

L'equazione (D.4) dimostra che F può essere estesa ad un operatore lineare F da $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ che soddisfa (D.4). Infine, siccome F manda il sottospazio denso $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ di $L^2(\mathbb{R})$ nel sottospazio denso $C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ di $L^2(\mathbb{R})$ e l'immagine di F è chiuso, F è un operatore invertibile su $L^2(\mathbb{R})$.

La generalizzazione ad $n \in \mathbb{N}$ segue applicando n trasformazioni di Fourier unidimensionali in seguito. \square

Corollario D.5 *Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora l'operatore inverso ha la forma*

$$F^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f](-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{-i(x,\xi)} dx. \quad (\text{D.5})$$

Dimostrazione. Si ricordi che $(\cdot, \cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora per $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ segue

$$(F[f], g)_c = (F[f], \bar{g}) = (f, F[\bar{g}]) = (f, F[g](-\xi))_c,$$

e questa relazione si generalizza per $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dalla (D.4) segue che

$$(f, g)_c = (2\pi)^{-n} (F[f], F[g])_c = (2\pi)^{-n} (f, F[F[g]](-\xi))_c,$$

dove $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Siccome f, g sono arbitrarie, è valida la (D.5). \square

Dal Corollario D.5 si vede subito che $(2\pi)^{-n/2}F$ è un operatore lineare unitario sullo spazio di Hilbert complesso $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'applicazione dell'operatore lineare $(2\pi)^{-n/2}F$ ad una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ non ne cambia la norma L^2 .

4.2 Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

La proprietà rimarchevole della classe $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ consiste nel fatto che l'operazione di trasformazione di Fourier non porta fuori dai confini di questa classe. La classe $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ non ha una tale proprietà.

4.2.a Trasformazione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Visto che le funzioni appartenenti a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sono sommabili in \mathbb{R}^n , su queste funzioni è definita l'operazione F di trasformazione di Fourier

$$\hat{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{-i(\xi, x)} dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

In questo caso la funzione $F[\varphi](\xi)$ la quale rappresenta la *trasformata di Fourier* della funzione φ , è limitata e continua in \mathbb{R}^n . La funzione φ decresce all'infinito più rapidamente di qualunque potenza positiva di $1/|x|$ e perciò la sua trasformata di Fourier può essere derivata sotto il segno d'integrale un numero di volte arbitrario:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (-ix)^\alpha \varphi(x) e^{-i(\xi, x)} dx = F[(-ix)^\alpha \varphi](\xi), \quad (\text{D.6})$$

da cui segue che $\hat{f} = F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, possiede le stesse proprietà ogni derivata $D^\beta \varphi$ e quindi

$$\begin{aligned} F[D^\beta \varphi](\xi) &= \int (D^\beta \varphi(x)) e^{-i(\xi, x)} dx = (-1)^{|\beta|} \int \varphi(x) (D^\beta e^{-i(\xi, x)}) dx \\ &= (-1)^{|\beta|} (-i\xi)^\beta \int \varphi(x) e^{-i(\xi, x)} dx = (i\xi)^\beta \int \varphi(x) e^{-i(\xi, x)} dx. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Infine, dalle formule (D.6) e (D.7) si ottiene

$$\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\beta|} (i\xi)^\beta F[(-ix)^\alpha \varphi](\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta (x^\alpha \varphi)](\xi). \quad (\text{D.8})$$

Dall'uguaglianza (D.8) segue che per tutti gli α, β i valori di $\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)$ sono uniformemente limitati rispetto a $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leq \int |D^\beta (x^\alpha \varphi)| dx. \quad (\text{D.9})$$

Ciò vuol dire che $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dunque, la trasformata di Fourier trasforma lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in se stesso.

Visto che la trasformata di Fourier $F[\varphi]$ di una funzione φ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è una funzione sommabile e continuamente derivabile su \mathbb{R}^n , allora, siccome $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la funzione φ è espressa in termini della sua trasformata di Fourier $F[\varphi]$ mediante l'operazione di trasformazione inversa di Fourier F^{-1} :

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \quad (\text{D.10})$$

dove

$$\begin{aligned} F^{-1}[\psi](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(\xi) e^{i(\xi, x)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi](-x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \psi(-\xi) e^{-i(\xi, x)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)](x). \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Dalle formule (D.10) e (D.11) deriva che ogni funzione φ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è la trasformata di Fourier della funzione $\psi = F^{-1}[\varphi]$ appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, con $\varphi = F[\psi]$, e se $F[\varphi] = 0$, anche $\varphi = 0$. Ciò vuol dire che la trasformazione di Fourier F trasforma $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre in modo univoco.

Lemma D.6 *La trasformazione di Fourier F è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora, applicando la (D.9) alle funzioni φ_k , si ottiene per tutti gli α, β

$$\begin{aligned} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| &\leq \int |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)| dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha \varphi_k)| (1 + |x|)^{n+1} \int \frac{dy}{(1 + |y|)^{n+1}}, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| = 0,$$

cioè $F[\varphi_k] \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il lemma è dimostrato. \square

La trasformazione inversa di Fourier F^{-1} possiede proprietà analoghe.

4.2.b Trasformazione di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Assumiamo l'uguaglianza (D.1) come definizione di trasformata di Fourier $F[f]$ di qualunque distribuzione $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (\text{D.12})$$

Verifichiamo che il secondo membro di quest'uguaglianza definisce un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cioè che $F[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Infatti, visto che $F[\varphi] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Supponiamo che $\varphi_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per il Lemma 3.1, $F[\varphi_k] \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi, in virtù del fatto che f appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha $(f, F[\varphi_k]) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, di modo che il funzionale $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dunque, l'operazione di trasformazione di Fourier F porta lo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Inoltre, F è un'operazione lineare e continua da $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La linearità di F è evidente. Dimostriamo la sua continuità. Supponiamo che $f_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. In questo caso, in base alla (D.12), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Ciò significa che $F[f_k] \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, cioè l'operazione F è continua da $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Introduciamo in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ancora un'operazione di trasformazione di Fourier che denotiamo con F^{-1} :

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (\text{D.13})$$

Dimostriamo che l'operazione F^{-1} è un'operazione inversa di F , cioè

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f, \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (\text{D.14})$$

Infatti, dalle (D.10)-(D.13) per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, si ottengono le uguaglianze

$$\begin{aligned} (F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[F[f](-\xi)], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f](-\xi), F[\varphi]) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} (F[f], F[\varphi](-\xi)) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) \\ &= (f, \varphi) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F[F^{-1}[f]], \varphi), \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le corrispondenti proprietà in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ al sesto ed al settimo passaggio.⁴ Ora seguono le formule (D.14).

Dalle formule (D.14) deriva che ogni distribuzione f appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è la trasformata di Fourier della distribuzione $g = F^{-1}[f]$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, con $f = F[g]$, e se $F[f] = 0$, si ha anche $f = 0$. Abbiamo, quindi, dimostrato che le trasformazioni di Fourier F e F^{-1} trasformano $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ in modo biunivoco e continuo.

Supponiamo che $f = f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ dove $x \in \mathbb{R}^n$ ed $y \in \mathbb{R}^m$. Introduciamo la trasformata di Fourier $F_x[f]$ rispetto alle variabili $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ponendo per qualunque $\varphi = \varphi(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_\xi[\varphi]). \quad (\text{D.15})$$

Come nel Lemma 3.1, si stabilisce che

$$F_\xi[\varphi](x, y) = \int \varphi(\xi, y) e^{i(\xi, x)} d\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$$

⁴Si noti che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$.

e l'operazione $F_\xi[\varphi]$ è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, di modo che la formula (D.15) definisce realmente una distribuzione $F_x[f](\xi, y)$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Esempio. Dimostriamo che

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{-i(\xi, x_0)}. \quad (\text{D.16})$$

Infatti,

$$\begin{aligned} (F[\delta(x - x_0)], \varphi) &= (\delta(x - x_0), F[\varphi]) = F[\varphi](x_0) \\ &= \int \varphi(\xi) e^{-i(\xi, x_0)} d\xi = (e^{-i(\xi, x_0)}, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Ponendo nella (D.16) $x_0 = 0$, si ottiene

$$F[\delta] = 1, \quad (\text{D.17})$$

da cui

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

di modo che

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi). \quad (\text{D.18})$$

4.2.c Proprietà della trasformazione di Fourier

(a) **Derivazione della trasformata di Fourier.** Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$D^\alpha F[f] = F[(-ix)^\alpha f]. \quad (\text{D.19})$$

Infatti, utilizzando la (D.7), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (D^\alpha F[f], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (F[f], D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, F[D^\alpha \varphi]) \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f, (ix)^\alpha F[\varphi]) = ((-ix)^\alpha f, F[\varphi]) = (F[(ix)^\alpha f], \varphi), \end{aligned}$$

da cui segue la formula (D.19). In particolare, ponendo nella (D.19) $f = 1$ ed utilizzando la formula (D.18), abbiamo

$$F[x^\alpha](\xi) = i^{|\alpha|} D^\alpha F[1](\xi) = (2\pi)^n i^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi). \quad (\text{D.20})$$

(b) **Trasformata di Fourier della derivata.** Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[D^\beta f] = (i\xi)^\beta F[f]. \quad (\text{D.21})$$

Infatti, utilizzando la formula (D.6), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (F[D^\beta f], \varphi) &= (D^\beta f, F[\varphi]) = (-1)^{|\beta|} (f, D^\beta F[\varphi]) \\ &= (-1)^{|\beta|} (f, F[(-i\xi)^\beta \varphi]) = (-1)^{|\beta|} (F[f], (-i\xi)^\beta \varphi) = ((i\xi)^\beta F[f], \varphi), \end{aligned}$$

da cui segue la formula (D.21).

(c) **Trasformata di Fourier di una traslazione.** Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[f(x - x_0)] = e^{-i(x_0, x)} F[f]. \quad (\text{D.22})$$

Infatti, abbiamo per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (F[f(x - x_0)], \varphi) &= (f(x - x_0), F[\varphi]) = (f, F[\varphi](x + x_0)) \\ &= (f, F[\varphi e^{-i(x_0, \xi)}]) = (F[f], e^{-i(x_0, \xi)} \varphi) = (e^{-i(x_0, \xi)} F[f], \varphi), \end{aligned}$$

da cui segue la formula (D.22).

(d) **Traslazione della trasformata di Fourier.** Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0, x)} f](\xi). \quad (\text{D.23})$$

Infatti, utilizzando la formula (D.22), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} F[f](\xi + \xi_0, \varphi) &= (F[f], \varphi(\xi - \xi_0)) = (f, F[\varphi(\xi - \xi_0)]) \\ &= (f, e^{i(\xi_0, x)} F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0, x)} f, F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0, x)} f], \varphi), \end{aligned}$$

da cui segue la formula (D.23).

(e) **Trasformata di Fourier di rescaling.** Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, per tutti i valori reali di $c \neq 0$ si ha

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f] \left(\frac{\xi}{c} \right), \quad (\text{D.24})$$

poichè per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ abbiamo

$$\begin{aligned} (F[f(cx)], \varphi) &= (f(cx), F[\varphi]) = \frac{1}{|c|^n} \left(f, F[\varphi] \left(\frac{x}{c} \right) \right) \\ &= \frac{1}{|c|^n} \left(f, \int \varphi(\xi) e^{-i(\frac{x}{c}, \xi)} d\xi \right) = \left(f, \int \varphi(c\xi') e^{-i(x, \xi')} d\xi' \right) = (f, F[\varphi(c\xi)]) \\ &= (F[f], \varphi(c\xi)) = \frac{1}{|c|^n} \left(F[f] \left(\frac{\xi}{c} \right), \varphi \right). \end{aligned}$$

5 Distribuzione in un Dominio

Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n . Allora $\mathcal{D}(\Omega)$ sarà lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^∞ che si annullano fuori di un sottoinsieme chiuso e limitato di Ω . Una successione $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ è detta di convergere a φ se esiste un sottoinsieme chiuso e limitato K di Ω fuori del quale si annullano tutte le funzioni φ_m e tale che $(D^\alpha \varphi_m)(x)$ tende a $(D^\alpha \varphi)(x)$ uniformemente in $x \in K$. Osserviamo che per $\Omega = \mathbb{R}^n$ la definizione di convergenza coincide con quella precedente. Evidentemente ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ può essere estesa ad una funzione test in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definendola uguale a zero fuori del dominio Ω . Di conseguenza, la distribuzioni appartenenti a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si possono applicare all (estensioni delle) funzioni test in $\mathcal{D}(\Omega)$. Ora definiamo $\mathcal{D}'(\Omega)$ come lo spazio vettoriale di tutti i funzionali lineari f in $\mathcal{D}(\Omega)$ che sono continui nel seguente senso: Se $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ converge a φ in $\mathcal{D}(\Omega)$, allora $(f, \varphi_m) \rightarrow (f, \varphi)$. In particolare, se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ si annulla fuori di Ω quasi ovunque, allora $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Più precisamente,

$$(f, \varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Le derivazioni deboli si definiscono ora in $\mathcal{D}'(\Omega)$ in modo naturale:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad f \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

qualunque sia il multiindice α .

6 Spazi di Sobolev

Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n . Allora lo *spazio di Sobolev*⁵ $H^s(\Omega)$ di ordine $s = 1, 2, 3, \dots$ consiste in tutte le funzioni $f \in L^2(\Omega)$ per cui tutte le derivate parziali deboli $D^\alpha f$ di ordine $|\alpha| \leq s$ appartengono a $L^2(\Omega)$. Il prodotto scalare di $H^s(\Omega)$ è dato da:⁶

$$(f, g)_{s, \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} (D^\alpha f)(x)(D^\alpha g)(x)^* dx, \quad (\text{D.25})$$

dove l'asterisco indica il complesso coniugato. In particolare,

$$(f, g)_{1, \Omega} = \int_{\Omega} (f(x)g(x)^* + \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)^*) dx.$$

⁵Sergei Sobolev [1908-1989] introdusse le distribuzioni nel 1935.

⁶Nella letteratura si trovano diverse norme equivalenti di $H^s(\Omega)$. Un trattamento dettagliato degli spazi di Sobolev si trova nel libro di Adams [2].

È evidente che, per un dominio limitato Ω , $\mathcal{D}(\Omega)$ non è denso in $H^s(\Omega)$.⁷ Intuitivamente la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^s(\Omega)$, detta $H_0^s(\Omega)$, consiste in funzioni che si annullano “vicino” alla frontiera di Ω . Secondo la disuguaglianza di Poincaré [2], se Ω è un aperto di misura finita, la seguente espressione presenta un prodotto scalare dello spazio $H_0^1(\Omega)$:

$$(f, g)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)^* dx.$$

Nel caso unidimensionale [$\Omega = (a, b)$ limitata], tutte le funzioni nello spazio $H^1(a, b)$ sono continue sull'intervallo $[a, b]$. Ciò segue direttamente dal Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. In tal caso,

$$H_0^1(a, b) = H^1(a, b) \cap C_0[a, b].$$

Nel caso multidimensionale lo spazio $H^1(\Omega)$ non è contenuto in $C(\bar{\Omega})$.

Esempio D.7 Consideriamo gli splines lineari ϕ_1, \dots, ϕ_m dell'esempio D.2. Tali splines appartengono a $H_0^1(a, b)$. Inoltre, per ogni $f \in H_0^1(a, b)$ [che è continua in $[a, b]$ e verifica $f(a) = f(b) = 0$], si definisce la sua approssimazione lineare a tratti

$$(Pf)(x) = \sum_{j=1}^m f(x_j) \phi_j(x).$$

In tal caso si ha per $j = 1, 2, \dots, m, m + 1$:

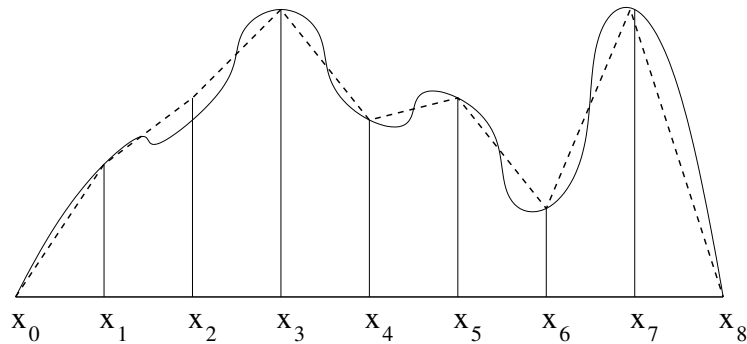


Figura D.1: Approssimazione di una funzione continua che si annulla negli estremi dell'intervallo, da una combinazione lineare di splines lineari.

$$(Pf)'(x) = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}, \quad x_{j-1} < x < x_j.$$

⁷Se Ω è un aperto limitato, la funzione costante 1 appartiene ad $H^s(\Omega)$ ma non è il limite di una funzione $f \in H^s(\Omega)$ di supporto compatto in Ω .

Utilizzando la disuguaglianza di Schwartz, si dimostra facilmente che

$$\begin{aligned} \|(Pf)'\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{m+1} \frac{|f(x_j) - f(x_{j-1})|^2}{x_j - x_{j-1}} \leq \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} 1 \cdot |f'(x)| dx\right)^2}{x_j - x_{j-1}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(x_j - x_{j-1}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f'(x)|^2 dx}{x_j - x_{j-1}} = \|f'\|_2^2, \end{aligned}$$

cioè, P è un operatore limitato su $H_0^1(a, b)$ di norma uguale ad 1.⁸

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ è l'intero spazio, è abbastanza facile descrivere gli spazi di Sobolev. In tal caso,

$$H^s(\mathbb{R}^n) = H_0^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} F[f](\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

dove

$$(f, g)_{s, \mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)^* d\xi$$

è un prodotto scalare di $H^s(\mathbb{R}^n)$ equivalente a (D.25). In altre parole,

$$F[H^s(\mathbb{R}^n)] = L^2(\mathbb{R}^n; (1 + |\xi|^2)^s d\xi).$$

⁸Abbiamo utilizzato la norma equivalente $\|f'\|_2$ per una funzione $f \in H_0^1(a, b)$.

Appendice E

PROPRIETÀ ASINTOTICHE

1 Rappresentazioni integrali delle funzioni di MacDonal

Sia

$$\phi_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt,$$

dove $z > 0$ e $\nu \in \mathbb{R}$. Allora

$$\phi'_\nu(z) = - \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) \cosh t dt,$$

$$\phi''_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) \cosh^2 t dt.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} z^2 \phi''_\nu(z) + z \phi'_\nu(z) - (z^2 + \nu^2) \phi_\nu(z) &= z^2 \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) \underbrace{[\cosh^2 t - 1]}_{=\sinh^2 t} dt \\ &\quad - z \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) \cosh t dt - \nu^2 \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt \\ &= [-z e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) \sinh t]_0^\infty \\ &\quad + z \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \{ \nu \sinh(\nu t) \sinh t + \cosh(\nu t) \cosh t \} dt \\ &\quad - z \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) \cosh t dt - \nu^2 \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt \\ &= [-e^{-z \cosh t} \nu \sinh(\nu t)]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \nu^2 \cosh(\nu t) dt \\ &\quad - \nu^2 \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt = 0. \end{aligned}$$

Quindi $\phi_\nu(z)$ è una soluzione dell'equazione di Bessel immaginaria (II.57). Inoltre, siccome $\phi_\nu(z) \rightarrow +\infty$ se $z \rightarrow 0^+$ (divergenza dell'integrale per $z = 0$) e $\phi_\nu(z) \rightarrow 0$ se $z \rightarrow +\infty$, esiste una costante positive c_ν tale che $\phi_\nu(z) = c_\nu K_\nu(z)$, la funzione di MacDonald (vedi la (II.56)).

Inoltre, abbiamo

$$\begin{aligned}\sqrt{z} e^z \phi_\nu(z) &= \sqrt{z} \int_0^\infty e^{-2z \sinh^2(t/2)} \cosh(\nu t) dt \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-2z \sinh^2 \frac{\tau}{2\sqrt{z}}\right) \cosh\left(\frac{\nu\tau}{2\sqrt{z}}\right) d\tau.\end{aligned}$$

Siccome $f(x) = \sinh(x)/x$ è crescente per $x \geq 0$ e $f(0^+) = 1$,¹ si può stimare la funzione sotto il segno dell'ultimo integrale da $e^{-\tau^2/2} \cosh(\nu\tau/\sqrt{z})$ per giustificare l'applicazione del Teorema delle Convergenza Dominata (cioè, lo scambio limite-integrale, vedi l'appendice D), risultando in

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \sqrt{z} e^z \phi_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-\tau^2/2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Di conseguenza, $\phi_\nu(z) = K_\nu(z)$:

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt, \quad z > 0, \nu \in \mathbb{R}. \quad (\text{E.1})$$

Sostituendo $u = e^{-t}$ nella (E.1) e poi $v = 1/u$ si ottiene per $z > 0$

$$\begin{aligned}K_\nu(z) &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{-\nu} \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} u^\nu \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{-\nu} \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-\frac{z}{2}(v+\frac{1}{v})} u^{-\nu} \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{-\nu} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} u^{-\nu-1} du.\end{aligned}$$

Utilizzando la definizione della funzione Gamma e cambiando l'ordine di integrazione otteniamo per $z > 0$ e $\text{Re } \nu > -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}K_\nu(z) &= \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}(u+\frac{1}{u})} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-ux} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx \right) \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty x^{\nu-\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty e^{-u(x+\frac{z}{2})-\frac{z}{2u}} \frac{du}{\sqrt{u}} \right) dx.\end{aligned}$$

¹Si ha $f'(x) = \frac{\cosh(x)}{x^2}(x - \tanh x) = \frac{\cosh(x)}{x^2} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 y}\right) dy > 0$ per $x > 0$.

Sostituendo $w = u\sqrt{(2x+z)/z}$ [dunque: $\frac{dw}{\sqrt{w}} = (z/(2x+z))^{1/4} \frac{dw}{\sqrt{w}}$] e ponendo $A = \sqrt{z(2x+z)}$, arriviamo all'integrale doppio

$$K_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty x^{\nu - \frac{1}{2}} \left(\frac{z}{2x+z} \right)^{1/4} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{A}{2}(w + \frac{1}{w})} w^{-1/2} dw}_{K_{-1/2}(A) = K_{1/2}(A) = \sqrt{\frac{\pi}{2A}} e^{-A}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty x^{\nu - \frac{1}{2}} \frac{e^{-\sqrt{z(2x+z)}}}{2\sqrt{2x+z}} dx.$$

Sostituendo $\tau = \sqrt{(2x+z)/z}$, otteniamo le rappresentazioni integrali

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \int_1^\infty (\tau^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-\tau z} d\tau \quad (\text{E.2})$$

$$\stackrel{\tau=1+2t}{=} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} (2z)^\nu e^{-z} \int_0^\infty e^{-2zt} t^{\nu - \frac{1}{2}} (t+1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt. \quad (\text{E.3})$$

2 Sviluppo asintotico delle funzioni di Bessel

Introduciamo prima il cosiddetto *simbolo di Hankel*

$$(\alpha, n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2^{-2n}}{n!} \{(4\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 3) \dots (4\alpha^2 - (2n - 1)^2)\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \alpha + n)}{n! \Gamma(\frac{1}{2} + \alpha - n)}, \quad (\text{E.4})$$

mentre $(\alpha, 0) = 1$. Questo simbolo viene utilizzato per abbreviare gli sviluppi asintotici delle varie funzioni di Bessel se $z \rightarrow \infty$ e ν è fisso.

Sostituendo la serie di Taylor

$$(1+t)^\alpha = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s! \Gamma(\alpha+1-s)} t^s, \quad |t| < 1,$$

nella (E.3) e utilizzando la (A.1) risulta lo sviluppo asintotico (per $z \rightarrow \infty$)

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\nu, s)}{(2z)^s}, \quad |\arg z| < \frac{3}{2}\pi. \quad (\text{E.5})$$

Introducendo le funzioni $P(\nu, z)$ e $Q(\nu, z)$ tali che

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \{P(\nu, z) + iQ(\nu, z)\} e^{i\chi}, \quad -\pi < \arg z < 2\pi,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \{P(\nu, z) - iQ(\nu, z)\} e^{-i\chi}, \quad -2\pi < \arg z < \pi,$$

dove $\chi = z - (\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4})\pi$, otteniamo dalla (E.5) e dalla seconda equazione (II.51)

$$P(\nu, z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(\nu, 2s)}{(2z)^{2s}} \sim 1 - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)(4\nu^2 - 49)}{4!(8z)^4} - \dots, \quad (\text{E.6a})$$

$$Q(\nu, z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(\nu, 2s+1)}{(2z)^{2s+1}} \sim \frac{4\nu^2 - 1}{8z} - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)}{3!(8z)^3} + \dots. \quad (\text{E.6b})$$

Gli sviluppi asintoti per $J_\nu(z)$ e $Y_\nu(z)$ (per $-\pi < \arg z < \pi$) seguono da

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} [P(\nu, z) \cos \chi - Q(\nu, z) \sin \chi], \quad (\text{E.7a})$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} [P(\nu, z) \sin \chi + Q(\nu, z) \cos \chi], \quad (\text{E.7b})$$

dove abbiamo utilizzato (II.49) e (II.50). Per la funzione di Bessel immaginaria segue dalla prima equazione (II.51)

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(\nu, s)}{(2z)^s}, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \quad (\text{E.8})$$

Limitiamoci ai primi termini degli sviluppi asintoti e all'andamento asintotico se $z \rightarrow +\infty$. Allora arriviamo alle seguenti espressioni asintotiche (vedi (II.48), (II.52), (II.53), (II.54), (II.55) e (II.56)):

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty, \quad (\text{E.9a})$$

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty, \quad (\text{E.9b})$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(e^{i(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)} + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty, \quad (\text{E.9c})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(e^{-i(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)} + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty, \quad (\text{E.9d})$$

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty, \quad (\text{E.9e})$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty. \quad (\text{E.9f})$$

Appendice F

APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE E TRIGONOMETRICA

In questa appendice dimostriamo che i polinomi (trigonometrici) costituiscono un sottospazio lineare denso di alcuni spazi di Banach. Tali risultati si basano sul teorema di Stone-Weierstrass sull'approssimazione uniforme delle funzioni continue da polinomi.

1 Teorema di approssimazione di Weierstrass

Il teorema origina da Weierstrass.¹ La costruzione esplicita dei polinomi approssimanti si deve a Bernstein.²

Teorema F.1 (Weierstrass) *Sia $f \in C[a, b]$. Allora esiste una successione $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ di polinomi tali che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| = 0.$$

Dimostrazione. Consideriamo i polinomi di base di Bernstein

$$b_{m,n}(x) = \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

¹Karl Weierstrass [1815-1897], spesso chiamato il padre dell'analisi matematica moderna, dimostrò il teorema nel 1885.

²Sergei Natanovich Bernstein [1880-1968] pubblicò la costruzione esplicita degli approssimanti polinomiali nel 1912.

di grado n . Dal binomio di Newton segue che

$$\sum_{m=0}^n b_{m,n}(x) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

Per $f \in C[0, 1]$ poniamo

$$B_n(f; x) = \sum_{m=0}^n f\left(\frac{m}{n}\right) b_{m,n}(x). \quad (\text{F.1})$$

Allora:

$$B_n(1; x) = \sum_{m=0}^n b_{m,n}(x) = 1; \quad (\text{F.2a})$$

$$B_n(x; x) = \sum_{m=0}^n \frac{m}{n} b_{m,n}(x) = \sum_{m=1}^n \frac{m}{n} b_{m,n}(x) = x \sum_{m=1}^n b_{m-1,n-1}(x) = x; \quad (\text{F.2b})$$

$$\begin{aligned} B_n(x^2; x) &= \sum_{m=0}^n \left(\frac{m}{n}\right)^2 b_{m,n}(x) = \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{n-1}{n} \frac{m(m-1)}{n(n-1)} + \frac{1}{n} \frac{m}{n} \right\} b_{m,n}(x) \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{m=2}^n b_{m-2,n-2}(x) + \frac{1}{n} x \sum_{m=1}^n b_{m-1,n-1}(x) \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x. \end{aligned} \quad (\text{F.2c})$$

Poiché la f è uniformemente continua in $x \in [0, 1]$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ se $|x - y| < \delta$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(f; x)| = 0, \quad (\text{F.3})$$

dove $B_n(f; x)$ è stata definita in (F.1). Infatti, ponendo

$$\begin{aligned} I(x) &= \left\{ m \in \{0, 1, \dots, n\} : \left| x - \frac{m}{n} \right| < \delta \right\}, \\ J(x) &= \left\{ m \in \{0, 1, \dots, n\} : \left| x - \frac{m}{n} \right| \geq \delta \right\}, \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \|f - B_n(f; x)\|_\infty &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} \left(\sum_{m \in I(x)} + \sum_{m \in J(x)} \right) \left| f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right| b_{m,n}(x) \\ &\leq \varepsilon \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{m \in I(x)} b_{m,n}(x) + \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{m \in J(x)} \left| f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right| b_{m,n}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{m \in J(x)} b_{m,n}(x) \\
&\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{m \in J(x)} \left(x - \frac{m}{n}\right)^2 b_{m,n}(x) \\
&\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \max_{0 \leq x \leq 1} \sum_{m=0}^n \left(x^2 - \frac{2mx}{n} + \frac{m^2}{n^2}\right) b_{m,n}(x) \\
&\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \max_{0 \leq x \leq 1} \{x^2 B_n(1; x) - 2xB_n(x; x) + B_n(x^2; x)\} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \max_{0 \leq x \leq 1} \left\{x^2 - 2x^2 + \left(\frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x\right)\right\} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x(1-x)}{n} = \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le (F.2) al penultimo passaggio. Di conseguenza,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - B_n(f; x)| \leq \varepsilon,$$

qualunque sia $\varepsilon > 0$. Quindi $B_n(f; x) \rightarrow f(x)$, uniformemente in $x \in [0, 1]$.

Supponiamo ora che $f \in C[a, b]$. Considerando la funzione $g \in C[0, 1]$ definita da $g(t) = f(a + (b-a)t)$, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - B_n\left(g; \frac{x-a}{b-a}\right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq 1} |g(t) - B_n(g; t)| = 0,$$

il che conclude la dimostrazione. \square

Di conseguenza, per ogni $f \in C[a, b]$ i polinomi

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{(n-k)a + kb}{n}\right) \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-k}$$

convergono alla funzione f uniformemente in $x \in [a, b]$.

Corollario F.2 *Sia $w \in L^1(a, b)$ una funzione peso che è positiva quasi ovunque sull'intervallo limitato (a, b) . Allora ogni funzione $f \in L^2((a, b); w(x)dx)$ può essere approssimata da polinomi nella norma di $L^2((a, b); w(x)dx)$.*

Dimostrazione. I polinomi costituiscono un sottospazio lineare denso in $C[a, b]$. D'altra parte, $C[a, b]$ costituisce un sottospazio lineare denso nello spazio $L^2((a, b); w(x)dx)$. \square

Di conseguenza, i polinomi di Legendre costituiscono una base ortogonale in $L^2(-1, 1)$, mentre quelli di Chebyshev di prima specie e quelli di Chebyshev di seconda specie costituiscono una base ortogonale in $L^2((-1, 1); (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx)$ e $L^2((-1, 1); (1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx)$, rispettivamente.

2 Teorema di Stone-Weierstrass

Una famiglia \mathcal{A} di funzioni complesse definite su un insieme E si dice *algebra* se (i) $f + g \in \mathcal{A}$, (ii) $fg \in \mathcal{A}$, e (iii) $\lambda f \in \mathcal{A}$ per ogni $f, g \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. In tal caso l'insieme di tutti i limiti di funzioni in \mathcal{A} uniformemente convergenti in $x \in E$ si chiama la *chiusura uniforme* di \mathcal{A} . Per esempio, la chiusura uniforme di tutti i polinomi definiti sull'intervallo $[a, b]$ è lo spazio $C[a, b]$, secondo il teorema di approssimazione di Weierstrass.

Il teorema di approssimazione di Weierstrass si generalizzò sostanzialmente da Stone³ nel 1937. Lui semplificò la sua dimostrazione in modo notevole nel 1948. Noi seguiamo la presentazione di Rudin [15].

Teorema F.3 (Stone-Weierstrass) *Sia \mathcal{A} un'algebra di funzioni complesse definite su un compatto di Hausdorff K . Supponiamo che siano soddisfatti le seguenti condizioni:*

- a. \mathcal{A} separa i punti di K , cioè, per ogni coppia di due punti diversi $x_1, x_2 \in K$ esiste $f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- b. non esiste nessun punto di K in cui tutte le funzioni di \mathcal{A} assumono il valore zero;
- c. \mathcal{A} contiene la complessa coniugata \bar{f} di ciascuna funzione $f \in \mathcal{A}$.

Allora la chiusura uniforme di \mathcal{A} consiste in tutte le funzioni complesse continue su K .

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema prima per un'algebra di funzioni reali che soddisfano le prime due condizioni.

1. Sia \mathcal{B} la chiusura di \mathcal{A} in $C(K)_R$, lo spazio delle funzioni reali in $C(K)$. Dimostriamo che $|f| \in \mathcal{B}$ per ogni $f \in \mathcal{B}$. Infatti, per $f \in \mathcal{A}$ sia

$$a = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Grazie al Teorema F.1 esistono costanti reali c_1, \dots, c_n tali che

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon, \quad -a \leq y \leq a.$$

Siccome \mathcal{B} è un'algebra reale, la funzione $\sum_{i=1}^n c_i f^i \in \mathcal{B}$ e

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i f(x)^i - |f(x)| \right| < \varepsilon, \quad x \in K.$$

³Marshall H. Stone [1903-1989]

Poiché è uniformemente chiusa l'algebra \mathcal{B} , si ha: $|f| \in \mathcal{B}$.

2. Le identità

$$\max(f, g) = \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2}, \quad \min(f, g) = \frac{f + g}{2} - \frac{|f - g|}{2},$$

implicano che $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ appartengono a \mathcal{B} se $f, g \in \mathcal{B}$ (grazie al punto a.). Di conseguenza, il massimo e il minimo di un numero finito di funzioni in \mathcal{B} appartengono a \mathcal{B} .

3. Per $f \in C(K)_R$, $x \in K$ e $\varepsilon > 0$ esiste $g_x \in \mathcal{B}$ tale che $g_x(x) = f(x)$ e $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$ per ogni $t \in K$. Infatti, per ogni $y \in K$ esiste $h_y \in \mathcal{A}$ tale che $h_y(x) = f(x)$ e $h_y(y) = f(y)$ [poiché la \mathcal{A} separa i punti di K]. Siccome h_y è continua, esiste un intorno J_y di y tale che

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon, \quad t \in J_y.$$

Per la compattezza di K esistono $y_1, \dots, y_n \in K$ tali che

$$K = \bigcup_{j=1}^n J_{y_j}.$$

Poniamo $g_x = \max(h_{y_1}, \dots, h_{y_n})$ la quale appartiene a \mathcal{B} (per il punto b.). Di conseguenza,

$$g_x(t) \geq h_{y_j}(t) > f(t) - \varepsilon, \quad t \in J_{y_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

4. Per $f \in C(K)_R$ e $\varepsilon > 0$, esiste $h \in \mathcal{B}$ tale che

$$|f(x) - h(x)| < \varepsilon, \quad x \in K.$$

Infatti, poiché è continua la funzione g_x costruita nella parte 2, esiste un intorno V_x di x tale che

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon, \quad t \in V_x.$$

La compattezza di K implica l'esistenza di finiti punti $x_1, \dots, x_m \in K$ tali che

$$K = \bigcup_{j=1}^m V_{x_j}.$$

Poiché $h = \min(g_{x_1}, \dots, g_{x_m}) \in \mathcal{B}$ [parte 2], si ha:

$$f(t) - \varepsilon < h(t) < f(t) + \varepsilon, \quad t \in K,$$

dove la prima disuguaglianza segue dalla parte 3.

5. Sia \mathcal{A}_R l'insieme di tutte le funzioni reali in \mathcal{A} . Allora per ogni $f \in \mathcal{A}$ la funzione $u = \operatorname{Re} f = \frac{1}{2}[f + \bar{f}] \in \mathcal{A}$ (grazie alla condizione c.). Per i punti distinti $x_1, x_2 \in K$ esiste $f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x_1) = 1$ e $f(x_2) = 0$; quindi $u(x_1) \neq u(x_2)$, cioè \mathcal{A}_R separa i punti di K . In altre parole l'algebra reale \mathcal{A}_R soddisfa le condizioni (i) e (ii) del teorema.

Sia $f = u + iv \in C(K)$. Allora $u, v \in C(K)_R$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $p, q \in \mathcal{A}_R$ tali che

$$\|u - p\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \|v - q\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Di conseguenza, esiste $p + iq \in \mathcal{A}$ per cui

$$\|f - (p + iq)\|_\infty \leq \|u - p\|_\infty + \|v - q\|_\infty < \varepsilon.$$

□

Il Teorema F.3 può essere utilizzato per dimostrare che i polinomi trigonometrici di periodo T costituiscono un sottospazio lineare di $C[0, T]$. Infatti, ponendo $\omega = (2\pi/T)$ e $z = e^{i\omega x}$ per $0 \leq x \leq T$, si vede che l'algebra delle combinazioni lineari finite di $\{z^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ costituisce un'algebra che soddisfa le condizioni del Teorema F.3. Di conseguenza, i polinomi trigonometrici di periodo $T = (2\pi/\omega)$ costituiscono un sottospazio lineare denso di $C(\mathbb{T})$, essendo \mathbb{T} il cerchio unitario nel piano complesso. Di conseguenza, i polinomi trigonometrici di periodo $T = (2\pi/\omega)$ costituiscono un sottospazio denso di $L^2(0, T)$.

Bibliografia

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publ., New York, 1964.
- [2] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [3] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, San Diego etc., 2001.
- [4] G. Barton, *Elements of Green's Functions and Propagation*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1989.
- [5] R. Beals and R. Wong, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [6] James Ward Brown and Ruel V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York, 1959
- [7] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Vol. I, Springer, Berlin, 1967.
- [8] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Vol. II, Springer, Berlin, 1967.
- [9] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Corrected and Enlarged Edition, Academic Press, New York, 1980.
- [10] S. Hassani, *Mathematical Physics. A Modern Introduction to its Foundations*, Third ed., Springer, New York, 2002. Hilger,
- [11] N.N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Dover Publ., New York, 1965.
- [12] A.I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vols. 1-3, Chelsea Publ., New York, 1965.

- [13] R.G. Newton, *Scattering of Waves and Particles*, Springer, New York, 1982; Dover, New York, 2002.
- [14] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, and Ch.W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [15] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third ed., McGraw-Hill, New York, 2015.
- [16] S. Seatzu, C. van der Mee, and P. Contu, *Matematica Applicata. Un Secondo Corso*, SIMAI e-Lecture Notes, SIMAI, 2017 (In preparation). Anche: S. Seatzu e P. Contu, *Equazioni alle Derivate Parziali*, Pitagora Editrice, Bologna, 2012.
- [17] I.N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1956.
- [18] Murray R. Spiegel, *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York 1959 (traduzione italiana: *Analisi Vettoriale*).
- [19] Gabor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **23**, 1939; Reprinted 1991.
- [20] A.E. Taylor and D.C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, Second edition, John Wiley, New York, 1980.
- [21] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, and V.K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific, Singapore, 1988; also: Nauka, Leningrad, 1975 (in Russian).
- [22] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second Ed., Cambridge University Press, London, 1962.
- [23] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Fourth ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.