Matematica Applicata (LS) 09.02.11

(1) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 4u_x - u + x^2 + 1, & 0 \le x \le 4, \ t \ge 0 \\ u(0,t) = 1, \quad u(4,t) = 3 \\ u(x,0) = 1 + 2\cos \pi x \end{cases}$$

(2) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_{tt} = (1+x^2 t)u_{xx} + (xt)u_x + 2^{xt} u + \cos xt, & -2 \le x \le 3, \ 0 \le t \le 5 \\ u(-2,t) = f_1(t), \quad u(3,t) = f_2(t) \\ u(x,0) = g_1(x), \quad u_t(x,0) = g_2(x) \end{cases}$$

(3) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema debolmente nonlineare:

$$\begin{cases} (3+x^2)y'' + (x^2+1)y - (2+\sin x)y^3 = x\cos x, & -1 \le x \le 2 \\ y(-1) = 1, \quad y(2) = 3 \end{cases}$$

Valutazione: 13, 11, 6.

09.02.11

LM Ambientali, Recupero della 1ª prova parziale.
(Calcolo Numerico e Matematica Applicata)

(1) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema di tipo parabolico:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 4u_x - u + x^2 + 1, & 0 \le x \le 4, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = 1, \quad u(4,t) = 3 \\ u(x,0) = 1 + 2\cos \pi x \end{cases}$$

(2) Determinare lo spettro del seguente problema di Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} y'' + (2\pi) y' + (\lambda - 3) y = 0, & 0 \le x \le \pi \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

(3) Discretizzare il seguente problema ellittico e indicare un metodo per la risoluzione numerica del sistema lineare ottenuto, motivandone altresì la scelta.

$$\begin{cases} u_{xx} + (2 + \sin xy) u_{yy} + (x^2 y) u_x + (3^x y) u_y - u = \cos xy \\ -\pi \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le 2\pi \\ u(-\pi, y) = f_1(y), \quad u(\pi, y) = f_2(y) \\ u(x,0) = g_1(x), \quad u(x, 2\pi) = g_2(x) \end{cases}$$

Valutazione: 14, 8, 8.

LM Ambientali (Esame completo) 09.02.11

(Calcolo Numerico e Matematica Applicata)

(1) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 4u_x - u + x^2+1, & 0 \le x \le 4,\ t \ge 0 \\ u(0,t) = 1, \quad u(4,t) = 3 \\ u(x,0) = 1 + 2\cos \pi x \end{cases}$$

(2) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema differenziale:

$$u_{tt} = (1+x^2 t)u_{xx} + (xt)u_x + 2^{xt}u + \cos xt, \quad -2 \le x \le 3,\ 0 \le t \le 5$$

$$u(-2,t) = f_1(t),\ u(3,t) = f_2(t)$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad u_t(x,0) = g_2(x).$$

(3) Risolvere uno dei seguenti due problemi:

(a) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema debolmente nonlineare:

$$u_{xx} + u_{yy} + (x\cos y)u_x + (y\sin x)u_y - 3u^5 = 0, \quad -2 \le x, y \le 2$$

$$u(-2,y) = f_1(y), \quad u(2,y) = f_2(y)$$

$$u(x,-2) = g_1(x), \quad u(x,2) = g_2(x).$$

(b) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema, mediante il metodo degli elementi finiti:

$$-y'' + (x^2+\cos x)y' + (\sin x)y = x^2+1, \quad -1 \le x \le 1$$

$$y(-1) = y(1) = 0$$

Valutazione: 13, 11, 6, 6.

09.02.11

LM Ambientali, Recupero della 2ª prova parziale.
(Calcolo Numerico e Matematica Applicata)

(1) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema di tipo iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = (1+x^2 t)u_{xx} + (xt)u_x + 2^{xt}u + \cos xt, & -2 \le x \le 3, \quad 0 \le t \le 5 \\ u(-2,t) = f_1(t), \quad u(3,t) = f_2(t) \\ u(x,0) = g_1(x), \quad u_t(x,0) = g_2(x) \end{cases}$$

(2) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema debolmente nonlineare:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + (x\cos y)u_x + (y\sin x)u_y - 3u^5 = 0, & -2 \le x, y \le 2 \\ u(-2,y) = f_1(y), \quad u(2,y) = f_2(y) \\ u(x,-2) = g_1(x), \quad u(x,2) = g_2(x) \end{cases}$$

(3) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema differenziale, con il metodo degli elementi finiti:

$$\begin{cases} -y'' + (x^2+\cos x)y' + (\sin x)\, y = x^2+1, & -1 \le x \le 1 \\ y(-1) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Valutazione: 12, 9, 9.

09.02.2011

LM ambientali, Recupero 1ª prova intermedia

(1) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema di tipo parabolico

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 4u_x - u + x^2 + 1, & 0 \le x \le 4, \quad t \ge 0 \\ u(0,t) = 1, \ u(4,t) = 3 \\ u(x,0) = 1 + 2\cos \pi x \end{cases}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x) \qquad \begin{cases} 2\varphi'' + 4\varphi' - \varphi = x^2 + 1 \\ \varphi(0) = 1, \ \varphi(4) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_t = 2v_{xx} + 4v_x - v \\ v(0,t) = v(4,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - \varphi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi(x) = e^{-2x}\left(a e^{-\sqrt{6}x} + b e^{\sqrt{6}x}\right) + \psi(x) \\ \psi(x) = -x^2 + 8x - 29 \end{cases}$$

$$v(x,t) = X(x)T(t) \qquad XT' = 2X''T + 4X'T - XT$$

$$\frac{T'}{T} = 2\frac{X''}{X} + 4\frac{X'}{X} - 1 = -\lambda \qquad \boxed{T' + \lambda T = 0} \qquad \begin{cases} 2X'' + 4X' + (\lambda - 1)X = 0 \\ X(0) = X(4) = 0 \end{cases}$$

Esame

Svolgere gli esercizi n.1 e n.2 e, a scelta, l'esercizio n.3 oppure l'esercizio n.4

(2) Risolvere il seguente problema di Sturm-Liouville (Determinare lo spettro del)

$$\begin{cases} y'' + (2\pi) y' + (\lambda - 3) y = 0, \quad 0 \le x \le \pi \\ y(0) + y'(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

$y(x) = e^{\alpha x}$

$\alpha^2 + 2\pi\alpha + \lambda - 3 = 0 \qquad \alpha_{1,2} = -\pi \mp \sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}$

(1) $\lambda < \pi^2 + 3 \Rightarrow y(x) = e^{-\pi x}\left(a e^{-\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\, x} + b e^{\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\, x}\right), \quad y(0) = a + b$

$y'(x) = e^{-\pi x}\left\{ -a\pi e^{-\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\, x} - b\pi e^{\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\, x} - \sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\, a e^{-\sqrt{\ }\, x} + \sqrt{\ }\, b e^{\sqrt{\ }\, x} \right)$

$y'(0) = -a\pi - b\pi - \sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\, a + \sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\, b$

$$\begin{cases} \left(1 - \pi - \sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\right) a + \left(1 - \pi + \sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\right) b = 0 \\ e^{-\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\,\pi} a + e^{\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\,\pi} b = 0 \end{cases}$$

$\det = 0 \iff \left(1 - \pi + \sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\right) e^{-\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\,\pi} = \left(1 - \pi - \sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\right) e^{\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\,\pi}$

$\underbrace{(1-\pi)\left(e^{-\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\,\pi} - e^{\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\,\pi}\right)}_{+} = \underbrace{-\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\left(e^{\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\,\pi} + e^{-\sqrt{(\pi^2+3)-\lambda}\,\pi}\right)}_{-}$

impossibile

(2) $\lambda = \pi^2 + 3 \Rightarrow y(x) = e^{-\pi x}(a + bx)$

$y'(x) = e^{-\pi x}(-a - \pi b x + b)$

$y(0) + y'(0) = b = 0 \Rightarrow a = 0$

(3) $\lambda > \pi^2 + 3, \quad (\pi^2+3) - \lambda = -\beta^2, \quad \beta > 0$

$y(x) = e^{-\pi x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x), \quad y'(x) = e^{-\pi x}\left\{-\pi a\cos\beta x - \pi b\sin\beta x - a\beta\sin\beta x + b\beta\cos\beta x\right\}$

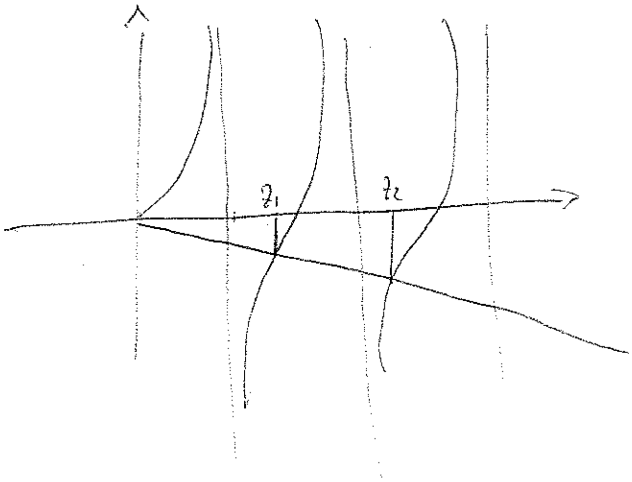
$y(0) + y'(0) = a - \pi a + b\beta$

$\cancel{\begin{cases} (1-\pi)a + \beta b = 0 \\ a + \pi b = 0 \end{cases}} \quad \cancel{\pi(1-\pi) = \beta}$

$$\begin{cases} (1-\pi)a + \beta b = 0 \\ (\cos \pi\beta)a + (\sin \pi\beta) b = 0 \end{cases}$$

$$(1-\pi)\sin \pi\beta = \beta \cos \pi\beta \qquad \cos \pi\beta \neq 0$$

$$\operatorname{tg}(\pi\beta) = \frac{\beta}{1-\pi} = \frac{1}{\pi(1-\pi)}(\pi\beta) \qquad \operatorname{tg} z = -\frac{1}{\pi(\pi-1)} z$$



$$\frac{\pi}{2} < z_1 < \pi$$

$$\frac{3}{2}\pi < z_2 < 2\pi$$

$$(2k-1)\frac{\pi}{2} < z_k < k\pi$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} z_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_k = (\pi^2+3) + \beta_k^2$$

$$y_k = e^{-\pi x}\left(\cos \beta_k x + \frac{\pi-1}{\beta_k}\sin \beta_k x\right)$$

$$b = \frac{\pi-1}{\beta} a$$

(3) Discretizzare il seguente problema ellittico e indicare un metodo per la risoluzione numerica del sistema lineare ottenuto, motivandone altresì le scelte.

$$\begin{cases} u_{xx} + (2+\sin xy)u_{yy} + (xy^2)u_x + (3^x y)u_y - u = \cos xy \\ -\pi \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le 2\pi \\ u(-\pi, y) = f_1(y), \quad u(\pi, y) = f_2(y) \\ u(x,0) = g_1(x), \quad u(x, 2\pi) = g_2(x) \end{cases}$$

LM ambientale (Recupero della II prova parziale)

(1) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema di tipo iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = (1+x^2 t)u_{xx} + (xt)u_x + 2^{xt}u + \cos xt, \quad -2 \le x \le 3, \quad 0 \le t \le 5 \\ u(-2,t) = f_1(t), \quad u(3,t) = f_2(t) \\ u(x,0) = g_1(x), \quad u_t(x,0) = g_2(x) \end{cases}$$

(2) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema debolmente nonlineare:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + (x\cos y)u_x + (y\sin x)u_y - 3u^5 = 0, \quad -2 \le x, y \le 2 \\ u(-2,y) = f_1(y), \quad u(2,y) = f_2(y) \\ u(x,-2) = g_1(x), \quad u(x,2) = g_2(x) \end{cases}$$

Discutere la risoluzione numerica, con il metodo degli elementi finiti, del seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} -y'' + (x^2+\cos x)y' + (\sin x)y = x^2+1, \quad -1 \le x \le 1 \\ y(-1) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Calcolo Numerico e Matematica Applicata

I prova completa (12.01.2011)

Svolgere l'esercizio n. 1 e altri 2 esercizi, scelti tra i restanti 3.

(1) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} 2u_t = 3u_{xx} + 4u_x + 5u, & 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0 \\ u(0,t) + u_x(0,t) = 0, & u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x \sin x \end{cases}$$

(2) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema di tipo ellittico:

$$\begin{cases} (2+\sin x)u_{xx} + (x^2+1)u_{yy} + (2^x\cos y)u_x + (2^y\cos x)u_y = x^2+y^2, & -2 \le x \le 2, \quad -3 \le y \le 4 \\ u(-2,y) = f_1(y), & u(2,y) = f_2(y) \\ u(x,-3) = g_1(x), & u(x,4) = g_2(x) \end{cases}$$

3) Discutere la risoluzione numerica del problema debolmente nonlineare

$$\begin{cases} 3y'' + (x^2+1)y' - (2+\cos x)y^5 = x \sin x, & -1 \le x \le 1 \\ y(-1) = 1, & y(1) = -1 \end{cases}$$

4) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema differenziale con il metodo degli elementi finiti:

$$\begin{cases} -y'' - (x \sin x)y' + (x^2+1)y = x \cos x^2, & 0 \le x \le 2 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Valutazione: 13, 11, 6, 6.

Matematica Applicata 01.12.2010

(LS Ambientali, 1ª prova intermedia)

(1) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema di tipo iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + 5u_x - 4u_t + \sin t, & 0 \le x \le 5,\ 0 \le t \\ u(0,t) = 1, \quad u(5,t) = 3 \\ u(x,0) = \cos\frac{2}{5}x, \quad u_t(x,0) = x^2+1 \end{cases}$$

(2) Risolvere il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} 2y'' + 3y' + (\lambda-2)y = 0, & 0 \le x \le 5 \\ 2y(0) + y'(0) = 0 \\ y(5) = 0. \end{cases}$$

(3) Discretizzare il seguente problema ellittico ed analizzare il sistema così ottenuto:

$$\begin{cases} 3u_{xx} + 5u_{yy} + 2^{x+y}u_x + (x^2+y^2)u_y - 7u = \sin xy \\ -3 \le x \le 3, \quad -2 \le y \le 4 \\ u(-3,y) = f_1(y), \quad u(3,y) = f_2(y) \\ u(x,-2) = g_1(x), \quad u(x,4) = g_2(x) \end{cases}$$

Valutazione: 14, 8, 8.

Calcolo Numerico e Matematica Applicata

II prova parziale (12.01.2011)

(1) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema di tipo ellittico:

$$\begin{cases} (2+\sin x)\,u_{xx} + (x^2+1)\,u_{yy} + (2^x\cos y)\,u_x + (2^y\cos x)\,u_y = x^2+y^2 \\ -2 \le x \le 2, \quad -3 \le y \le 4 \\ u(-2,y) = f_1(y), \quad u(2,y) = f_2(y) \\ u(x,-3) = f_1(x), \quad u(x,4) = f_2(x). \end{cases}$$

(2) Discutere la risoluzione numerica del problema debolmente nonlineare:

$$\begin{cases} 3y'' + (x^2+1)\,y' - (2+\cos x)\,y^5 = x\sin x, & -1 \le x \le 1 \\ y(-1) = 1, \quad y(1) = -1 \end{cases}$$

(3) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema differenziale con il metodo degli elementi finiti:

$$\begin{cases} -y'' - (x\sin x)\,y' + (x^2+1)\,y = x\cos x^2, & 0 \le x \le 2 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Valutazione: 12, 8, 10.

Matematica Applicata 1.12.2010

(LS ambientali, chimici e Meccanici fuori corso)

(1) Risolvere, mediante separazione delle variabili, il seguente problema di tipo iperbolico:

$$\begin{cases} u_{tt} = 3u_{xx} + 5u_x - 4u_t + u, & 0 \le x \le 5, \ 0 \le t \\ 2u(0,t) + u_x(0,t) = 0 \\ u(5) = 0 \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = x^2+1 \end{cases}$$

(2) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema ellittico:

$$\begin{cases} 3u_{xx} + 5u_{yy} + 2^{x+y}u_x + (x^2+y^2)u_y - 7u = \sin xy, & -3 \le x \le 3, \ -2 \le y \le 4 \\ u(-3,y) = f_1(y), \ u(3,y) = f_2(y) \\ u(x,-2) = g_1(x), \ u(x,4) = g_2(x) \end{cases}$$

(3) Discutere la risoluzione numerica del seguente problema debolmente nonlineare:

$$\begin{cases} (x+\sin x)y'' + (x\cos x)y' - (x+\cos x)y^3 = x\cos x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ y(0) = 1, \ y(\frac{\pi}{2}) = 3. \end{cases}$$

Valutazione: 14, 8, 8.