Definizione A.2.9. La funzione f è regolare a tratti in $[a, b]$ se valgono le seguenti proprietà:

1) esiste un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_n$, con $a < x_1 < \ldots < x_n < b$, tale che f è di classe C^1 negli intervalli $[a, x_1]$, $[x_j, x_{j+1}]$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ e $[x_n, b]$;

2) nei punti $x_1, \ldots, x_n$ esistono finite le derivate destra e sinistra;

3) nei punti $x_1, \ldots, x_n$ esistono finiti i limiti destro e sinistro.

Teorema A.2.10 (**Convergenza della serie di Fourier**) Sia f regolare a tratti in $[-L, L]$. Allora:

1) se la f è continua in $x_0 \in (-L, L)$, la serie di Fourier converge in x_0 al valore $f(x_0)$;

2) se $x_0 \in (-L, L)$ e la f è discontinua in x_0, la serie di Fourier converge a
$$\tfrac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)];$$

3) la serie di Fourier converge a
$$\tfrac{1}{2}[f((-L)^+) + f(L^-)]$$
sia in $-L$ che in L.

Teorema A.2.11 (**Lemma di Riemann-Lebesgue**) Sia f sommabile nel senso che esiste finito l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0,$$

che stabiliscono la convergenza a zero dei coefficienti della serie di Fourier.

Teorema A.2.12 (**Integrazione termine a termine**) Se la f è regolare a tratti in $[-L, L]$ e ivi sviluppabile in serie di Fourier, essa è integrabile secondo Riemann termine a termine, ossia

$$\int_{-L}^{x} f(t)\,dt = a_0(x+L) + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{a_n \sin\frac{n\pi x}{L} - b_n\left[\cos\frac{n\pi x}{L} - \cos n\pi\right]\right\}.$$

Teorema A.2.14 (**Differenziazione termine a termine**) Se la f è continua in $[-L, L]$ con $f(-L) = f(L)$ e la f' è regolare a tratti in $[-L, L]$, allora la serie di Fourier è derivabile termine a termine. Ossia, in ogni punto $x \in (-L, L)$ in cui la $f'(x)$ è continua,

$$f'(x) = \frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-na_n \sin\frac{n\pi x}{L} + nb_n \cos\frac{n\pi x}{L}\right].$$