1 Spazi di Hilbert

Uno *spazio di Hilbert complesso* è uno spazio vettoriale complesso in cui viene definito una forma sesquilineare $(\cdot,\cdot) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, il cosiddetto prodotto scalare, con le seguenti proprietà:

1) Per $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $x, y, z \in \mathcal{H}$ si ha

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z).$$

2) Per $x, y \in \mathcal{H}$ si ha

$$(y, x) = \overline{(x, y)}.$$

Di conseguenza, per $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $x, y, z \in \mathcal{H}$ si ha

$$(z, \lambda x + \mu y) = \overline{\lambda}(z, x) + \overline{\mu}(z, y).$$

3) Per $x \in \mathcal{H}$ si ha $(x, x) \geq 0$. Inoltre, $(x, x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

4) Definendo la distanza tra due punti $x, y \in \mathcal{H}$ da

$$\mathrm{dist}(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)},$$

si ottiene una metrica completa di $\mathcal{H}$.

Dalle proprietà $1) - 3)$ seguono le seguenti proprietà:

5) La cosiddetta *disuguaglianza di Schwarz*:

$$|(x, y)| \leq \|x\|\,\|y\|, \qquad x, y \in \mathcal{H},$$

essendo $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ la norma di $\mathcal{H}$. Per $x, y \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, il rapporto $(x, y)/(\|x\|\,\|y\|)$ si dice coseno tra i vettori $x, y \in \mathcal{H}$.

6) La norma $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ ha le seguenti proprietà: a) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$, b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ per $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathcal{H}$, c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ per $x, y \in \mathcal{H}$, la cosidetta *disuguaglianza triangolare*, d) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ per $x, y \in \mathcal{H}$.

Discutiamo ora alcuni esempi:

1. ℓ^2, l'insieme di tutte le successioni complesse $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tali che $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converge. In tal caso ℓ^2 è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$

dove $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\boldsymbol{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. $L^2(E, d\mu)$, essendo E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ o di $\mathbb{C}^n$ e μ una misura σ-finita definita sull'algebra dei sottoinsiemi misurabili di E. In tal caso $L^2(E, d\mu)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(f, g) = \int_E f(t) \overline{g(t)} \, d\mu(t),$$

dove due funzioni μ-misurabili f_1, f_2 definite su E vengono identificate se $\mu(\{t \in E : f_1(t) \neq f_2(t)\}) = 0$.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert complesso. Un sottoinsieme $\{e_j : j \in J\}$ di $\mathcal{H}$, non necessariamente finito o infinito numerabile, si dice *ortonormale* se

$$(e_j, e_l) = \begin{cases} 1, & j = l, \\ 0, & j \neq l. \end{cases}$$

Un sottoinsieme ortonormale di $\mathcal{H}$, che non si può estendere ad un sottoinsieme ortonormale più grande di $\mathcal{H}$, si dice *base ortonormale* di $\mathcal{H}$. Due basi ortonormali dello stesso spazio di Hilbert complesso hanno la stessa cardinalità. Tale cardinalità si chiama *dimensione* di $\mathcal{H}$. Se essa è infinita numerabile, lo spazio $\mathcal{H}$ si dice *separabile*.

Sia $\{e_j : j \in J\}$ una base ortonormale di $\mathcal{H}$. Per ciascun $x \in \mathcal{H}$, l'insieme $\{j \in J : (x, e_j) \neq 0\}$ è finito o infinito numerabile, mentre

$$\|x\|^2 = \sum_{j \in J} |(x, e_j)|^2,$$

dove la somma ha senso. Tale identità si dice *identità di Parseval.* Una base ortonormale di ℓ^2 è la successione $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$, dove $(\boldsymbol{e}_n)_m = 1$ per $n = m$ e $(\boldsymbol{e}_n)_m = 0$ per $n \neq m$; di conseguenza, ℓ^2 è uno spazio di Hilbert separabile.

2 Serie di Fourier

Una funzione $f(x)$ definita per $-L \leq x \leq L$ può essere sviluppata nella serie di Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\},$$

dove

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \end{aligned}$$

sono i coefficienti di Fourier della f. Se $f \in L^2(-L, L)$, la successione dei suoi coefficienti di Fourier appartiene ad ℓ^2. Infatti,

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)|^2\, dx = 2|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |a_n|^2 + |b_n|^2 \right\}.$$

D'altra parte, se i numeri complessi a_0 e a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sono i termini di una successione appartenente ad ℓ^2, allora esiste un'unica funzione $f \in L^2(-L, L)$ che ha a_0 e a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ come i suoi coefficienti di Fourier. Inoltre, scrivendo i coefficienti di Fourier come funzione di f, risulta

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}\, dx = 2a_0(f)\overline{a_0(g)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n(f)\overline{a_n(g)} + b_n(f)\overline{b_n(g)} \right\}.$$

Sia $\mathcal{S}_N$ lo spazio vettoriale, di dimensione $2N + 1$, di tutti i polinomi trigonometrici

$$\tilde{f}_N(x) = \tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{N} \left\{ \tilde{a}_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \tilde{b}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\},$$

essendo $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{a}_N, \tilde{b}_N \in \mathbb{C}$. Data $f \in L^2(-L, L)$ con coefficienti di Fourier $a_0, a_1, b_1, \ldots$, abbiamo

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x) - \tilde{f}_N(x)|^2 \, dx = 2|a_0 - \tilde{a}_0|^2 + \sum_{n=1}^{N} \left\{ |a_n - \tilde{a}_n|^2 + |b_n - \tilde{b}_n|^2 \right\}$$
$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ |a_n|^2 + |b_n|^2 \right\}.$$

Quindi il polinomio trigonometrico $\tilde{f}_N(x)$ più vicino alla f nella norma di $L^2(-L, L)$ è la seguente "sezione"

$$f_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}$$

della sua serie di Fourier. In tal caso

$$\frac{1}{L}[\mathrm{dist}(f, \mathcal{S}_N)]^2 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |f(x) - f_N(x)|^2 \, dx = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ |a_n|^2 + |b_n|^2 \right\}.$$

Di conseguenza, $\|f - f_N\|_2 \to 0$ se $N \to +\infty$.

Abbiamo la seguente base ortonormale di $L^2(-L, L)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Inoltre, la trasformazione lineare $\mathcal{F} : L^2(-L, L) \to \ell^2$ definita da

$$(\mathcal{F}f)_n = \begin{cases} a_0(f)\sqrt{2L}, & n = 1, \\ a_k(f)\sqrt{L}, & n = 2k \geq 2, \\ b_k(f)\sqrt{L}, & n = 2k+1 \geq 3, \end{cases}$$

è un'isometria nel senso che

$$\|\mathcal{F}f\|^2 = 2L|a_0(f)|^2 + L\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right) = \|f\|_2^2.$$

La cosiddetta *trasformata di Fourier discreta* $\mathcal{F}$ trasforma la base ortonormale trigonometrica di $L^2(-L, L)$ nella base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ di ℓ^2.

Correzioni

Definizione A.2.9. La funzione f è regolare a tratti in $[a, b]$ se valgono le seguenti proprietà:

1) esiste un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_n$, con $a < x_1 < \ldots < x_n < b$, tale che f è di classe C^1 negli intervalli $[a, x_1]$, $[x_j, x_{j+1}]$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ e $[x_n, b]$;

2) nei punti $x_1, \ldots, x_n$ esistono finite le derivate destra e sinistra;

3) nei punti $x_1, \ldots, x_n$ esistono finiti i limiti destro e sinistro.

Teorema A.2.10 (**Convergenza della serie di Fourier**) Sia f regolare a tratti in $[-L, L]$. Allora:

1) se la f è continua in $x_0 \in (-L, L)$, la serie di Fourier converge in x_0 al valore $f(x_0)$;

2) se $x_0 \in (-L, L)$ e la f è discontinua in x_0, la serie di Fourier converge a
$$\tfrac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)];$$

3) la serie di Fourier converge a
$$\tfrac{1}{2}[f((-L)^+) + f(L^-)]$$
sia in $-L$ che in L.

Teorema A.2.11 (**Lemma di Riemann-Lebesgue**) Sia f sommabile nel senso che esiste finito l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$. Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = 0,$$

che stabiliscono la convergenza a zero dei coefficienti della serie di Fourier.

Teorema A.2.12 (**Integrazione termine a termine**) Se la f è regolare a tratti in $[-L, L]$ e ivi sviluppabile in serie di Fourier, essa è integrabile secondo Riemann termine a termine, ossia

$$\int_{-L}^{x} f(t)\, dt = a_0(x + L) + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ a_n \sin\frac{n\pi x}{L} - b_n \left[\cos\frac{n\pi x}{L} - \cos n\pi \right] \right\}.$$

Teorema A.2.14 (**Differenziazione termine a termine**) Se la f è continua in $[-L, L]$ con $f(-L) = f(L)$ e la f' è regolare a tratti in $[-L, L]$, allora la serie di Fourier è derivabile termine a termine. Ossia, in ogni punto $x \in (-L, L)$ in cui la $f'(x)$ è continua,

$$f'(x) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-n a_n \sin \frac{n\pi x}{L} + n b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right].$$