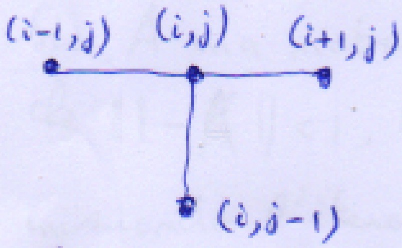
① 

schema a 4 punti

$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 2$

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$

$h = \frac{2}{n+1}$, $k = \frac{T}{m+1}$, $x_i - x_{i-1} = h$, $t_j - t_{j-1} = k$

$x_i = ih$, $t_j = jk$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + 3(1+x_i)^2 u_{i,j} + \sin^2(\pi x_i)$$

$u_{0,j} = u_{n+1,j} = 0$, $u_{i,0} = \frac{1}{4} x_i^2$ $\qquad i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m+1$

$A \underline{u}^{[j]} = \underline{b}^{[j]}$, dove $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + \frac{1}{k} - 3(1+x_1)^2 & -\frac{1}{h^2} & & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + \frac{1}{k} - 3(1+x_n)^2 \end{pmatrix}$

$j = 1, \dots, m+1$

A è strettamente diagonalmente dominante se

$$\frac{2}{h^2} < \frac{2}{h^2} + \frac{1}{k} - 3(1+x_i)^2, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{k} > 3(1+x_i)^2, \quad i = 1, \dots, n$$

$\hookrightarrow$ **se** $0 < k < \frac{1}{27}$ (utilizzando che $(1+x_i)^2 \le 9$)

Quindi il sistema $A \underline{u}^{[j]} = \underline{b}^{[j]}$ ha la soluzione unica, essendo $\underline{u}^{[j]} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{n,j} \end{pmatrix}$, $b_i^{[j]} = \frac{u_{i,j-1}}{k} + \sin^2(\pi x_i) - \frac{1}{h^2} \underbrace{\left[u_{0,j} \delta_{i,1} + u_{n+1,j} \delta_{n,i} \right]}_{=0}$

② $$\left.\begin{aligned} -(x^2u')' + (x^2+1)\,u &= x \sin(\pi x) \\ u(-1)=-1\,,\ u(1)&=1 \end{aligned}\right\}$$

Poniamo $u(x) = x + v(x)$

$$-(x^2v')' + (x^2+1)v = x\sin(\pi x) - 2x + (x^2+1)x$$

Per ogni $\varphi \in H_0^1(-1,1)$ si ha:

$$\int_{-1}^{+1} \{-(x^2v')' + (x^2+1)v\}\,\varphi\,dx = \int_{-1}^{+1} [x\sin(\pi x) - 2x + (x^2+1)x]\,\varphi(x)\,dx$$

$$\|$$

$$\int_{-1}^{+1} \{x^2 v'\varphi' + (x^2+1)v\varphi\}\,dx - \underbrace{\cancel{\left[x^2 v'\varphi\right]_{-1}^{+1}}}_{\text{ZERO}}$$

$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1\,,\quad h = x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n+1}\,,\ x_i = -1 + ih$

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\,\phi\left(\frac{x-x_j}{h}\right), \text{ essendo } \phi(x) = \begin{cases} 1-|x|\,, & -1\le x\le +1 \\ 0\,, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Scegliendo $\varphi(x) = \phi\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$, si ha:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_{-1}^{+1} \left\{ x^2 \phi'\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\phi'\left(\frac{x-x_j}{h}\right) + (x^2+1)\phi\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\phi\left(\frac{x-x_j}{h}\right)\right\}dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} [x\sin(\pi x) - 2x + (x^2+1)x]\,\phi\left(\frac{x-x_i}{h}\right)dx\,,$$

oppure

$$A\,\underline{c} = \underline{b}\,.$$

A è la matrice di Gram delle funzioni linearmente indipendenti $\left\{\phi\left(\frac{x-x_i}{h}\right)\right\}_{i=1}^{n}$ rispetto al prodotto scalare

$$[f,g] = \int_{-1}^{+1} \{(x^2+1)\,f(x)\,\overline{g(x)} + x^2 f'(x)\,\overline{g'(x)}\}\,dx\,.$$

Si ha

$$\|f\|_2^2 \le [f,f] \le 2\left(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2\right)$$

Tale matrice è invertibile

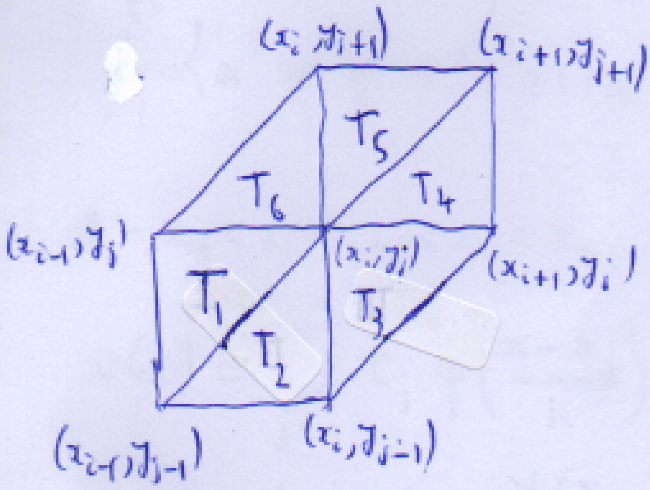
(3) Trovare $u \in H^1_0(\Omega)$ tale che per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ si ha:

$$\iint_\Omega \left[xy \nabla u \cdot \nabla \varphi + (x^2+y^2) u \varphi \right] dx\, dy = \iint_\Omega f \varphi \, dx\, dy,$$

essendo $\Omega = (0,3) \times (0,4)$.

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = 3, \quad h = x_i - x_{i-1} = \frac{3}{n+1}, \quad x_i = ih$$

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{m+1} = 4, \quad k = y_j - y_{j-1} = \frac{4}{m+1}, \quad y_j = jk$$



$$\phi_{i,j}(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x - x_i}{h} & \text{in } T_1 \\ 1 + \dfrac{y - y_j}{k} & \text{in } T_2 \\ 1 - \dfrac{x - x_i}{h} + \dfrac{y - y_j}{k} & \text{in } T_3 \\ 1 - \dfrac{x - x_i}{h} & \text{in } T_4 \\ 1 - \dfrac{y - y_j}{k} & \text{in } T_5 \\ 1 + \dfrac{x - x_i}{h} - \dfrac{y - y_j}{k} & \text{in } T_6 \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n; \; j = 1, \dots, m$

$$u = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} c_{\ell,r} \phi_{\ell,r}, \quad \varphi = \phi_{i,j}$$

conduce al sistema $A \underline{u} = \underline{b}$,

essendo

$$A_{(i,j),(\ell,r)} = \iint_\Omega \left[x y \nabla \phi_{i,j} \cdot \nabla \phi_{\ell,r} + (x^2+y^2) \phi_{i,j} \phi_{\ell,r} \right] dx\, dy$$

$$b_{(i,j)} = \iint_\Omega f \phi_{i,j} \, dx\, dy.$$

A è la matrice di Gram delle funzioni linearmente indipendenti $\{\phi_{i,j} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ rispetto al prodotto scalare

$$[f, g] = \iint_\Omega \left\{ (x^2+y^2) f(x) \overline{g(x)} + xy \nabla f \cdot \nabla \overline{g} \right\} dx\, dy$$

Se $A \underline{d} = \underline{0}$, allora $A \underline{d}, \underline{d}$

$$0 = (A \underline{d}, \underline{d}) = [f, f] = \iint_\Omega \left\{ (x^2+y^2) |f(x)|^2 + x^2 \|\nabla f\|_2^2 \right\} dx\, dy \quad \text{per } f = \sum_{i,j} d_{i,j} \phi_{i,j} \rightsquigarrow f(x) \equiv 0 \to d_{i,j} \equiv 0.$$

④ Sia A una matrice reale $n \times n$. Risolvere, sotto l'ipotesi che $\|I - A\| < 1$, l'equazione $Y = \frac{1}{2}(I + Y^2 - A)$ per iterazione, iniziando l'iterazione all'interno dell'insieme $\mathcal{L} = \{Y : \|Y\| \leq M\}$ per $M = 1 - \sqrt{1 - \|I - A\|}$.

- Dimostrare che $F(Y) = \frac{1}{2}(I + Y^2 - A) \in \mathcal{L}$ se $Y \in \mathcal{L}$.

$\|F(Y)\| \leq \frac{1}{2}\{\|Y\|^2 + \|I - A\|\} \leq \frac{1}{2}M^2 + \|I - A\|$

Risulta $\frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{2}\|I - A\| \leq M$ sse $(M-1)^2 \leq 1 - \|I - A\|$

Quindi: se $M = 1 - \sqrt{1 - \|I - A\|} > 0$, allora $\frac{1}{2}M^2 + \|I - A\| \leq M$, dunque $F(Y) \in \mathcal{L}$.

- Dimostrare che F è una contrazione in $\mathcal{L}$.

$$\|F(Y) - F(Z)\| = \|\tfrac{1}{2}(Y^2 - Z^2)\|$$
$$= \|\tfrac{1}{2}(Y - Z)Y + Z(Y - Z)\|$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\max(\|Y\|, \|Z\|)\,\|Y - Z\| \leq \tfrac{1}{2}M\,\|Y - Z\|,$$

dove $\frac{1}{2}M = \frac{1}{2}\{1 - \sqrt{1 - \|I - A\|}\} < 1$. Siccome $\mathcal{L}$ è chiuso (e quindi uno spazio metrico completo), per $Y_0 \in \mathcal{L}$ la successione degli iterati $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ definiti da

$$Y_{n+1} = \tfrac{1}{2}(I + Y_n^2 - A)$$

converge all'unica soluzione Y dell'equazione $Y = \frac{1}{2}(I + Y^2 - A)$ che appartiene a $\mathcal{L}$.

5) Trovare lo zero $\xi = \ln(1+\sqrt{2})$ dell'equazione $\sinh(x) = 1$ mediante il metodo di Newton.

Sia $f(x) = \sinh(x) - 1$. Allora $f'(x) = \cosh(x)$ (sempre >0), $f''(x) = \sinh(x)$ (cambia segno in $x=0$), $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(x) \to +\infty \text{ se } x \to +\infty \end{cases}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)-1}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sinh(x_n)-1}{\cosh(x_n)}$$

Scegliendo $x_0 \in (0,+\infty)$ (dove $f' \cdot f'' > 0$), la successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to \xi$. Siccome $f'(\xi) = \cosh[\ln(1+\sqrt{2})] = \frac{1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2} \neq 0$, lo zero ξ è semplice, quindi convergenza di ordine 2.

2 extra) Se $\sum_{i=1}^{n} d_i \phi\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \equiv 0$, allora

$$(A\underline{c}, \underline{c}) = \sum_{i,j=1}^{n} d_i d_j \int_{-1}^{+1} \left\{ x^2 \phi'\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \phi'\left(\frac{x-x_j}{h}\right) + (x^2+1) \phi\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \phi\left(\frac{x-x_j}{h}\right) \right\} dx = 0,$$

e quindi

$$[f,f] = \int_{-1}^{+1} \left\{ x^2 |f'(x)|^2 + (x^2+1) |f(x)|^2 \right\} = 0$$

per $f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j \phi\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$. Dunque, utilizzando che $0 \leq \|f\|_2^2 \leq [f,f]$, si ottiene $f(x) \equiv 0$ e quindi $d_i \equiv 0$.