a. Catene di Jordan. Sia A una trasformazione lineare in F^n, essendo $F = \mathbb{R}$ oppure $F = \mathbb{C}$. Allora lo string $\{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ si dice *catena di autovettori e autovettori generalizzati* (oppure: *catena di Jordan*) di A corrispondente all'autovalore λ se

$$x_0 \neq 0, \quad Ax_0 = \lambda x_0,\ Ax_1 = \lambda x_1 + x_0,\ \ldots, \quad Ax_{m-1} = \lambda x_{m-1} + x_{m-2}.$$

In tal caso i vettori $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ della catena di *lunghezza* m sono linearmente indipendenti.

Infatti, se esistessero scalari $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ tale che

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_{m-1} x_{m-1} = 0,$$

allora, applicando $A - \lambda I_n$ una, due, tre, fino ad $m-2$ volte, otteniamo

$$\begin{aligned}
c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \ldots + c_{m-2}x_{m-2} + c_{m-1}x_{m-1} &= 0,\\
c_1x_0 + c_2x_1 + c_3x_2 + c_4x_3 + \ldots + c_{m-2}x_{m-3} + c_{m-1}x_{m-2} &= 0,\\
c_2x_0 + c_3x_1 + c_4x_2 + \ldots + c_{m-2}x_{m-4} + c_{m-1}x_{m-3} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
c_{m-1}x_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Poichè $x_0 \neq 0$, si ha $c_{m-1} = 0$ e, quindi, $c_{m-2} = \ldots = c_1 = c_0 = 0$. Di conseguenza, i vettori della catena di Jordan $\{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ sono linearmente indipendenti.

Sia $\{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ una catena di Jordan corrispondente all'autovalore λ di A. Allora,

$$(A - \lambda I_n)x_0 = (A - \lambda I_n)^2 x_1 = \ldots = (A - \lambda I_n)^m x_{m-1} = 0.$$

Infatti, per $j = 0, 1, \ldots, m-1$ si ha:

$$x_j \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^{j+1}, \qquad x_j \notin \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)^j,$$

essendo $\mathrm{Ker}\, T = \{x \in F^n : Tx = 0\}$ il kernel della trasformazione lineare T.

Siano $\{x_0^s, x_1^s, \ldots, x_{m^s-1}^s\}$ alcune, r, catene di Jordan di A, di lunghezze $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_r$, tali che $x_0^1, \ldots, x_0^r$ sono linearmente indipendenti. Allora $\{x_j^s : j = 0, 1, \ldots, m_s - 2,\ s = 1, 2, \ldots, r\}$ è linearmente indipendente. Tali catene di Jordan si dicono *linearmente indipendenti*. Infatti, sia

$$\sum_{s=1}^{r} \sum_{j=0}^{m^s-1} c_{s,j} x_j^s = 0.$$

Applicando $A - \lambda I_n$ ripetutemente, otteniamo una combinazione lineare degli autovettori linearmente indipendenti x_0^s, e dunque i corrispondenti coefficienti si annullano. Arretrando lungo le successive combinazioni lineari ottenute applicando $A - \lambda I_n$, risultano nulli tutti gli altri coefficienti.

b. Forme normali di Jordan. Limitandoci all'autovalore λ di A, scegliamo una catena di Jordan $\{x_0^1, x_1^1, \ldots, x_{m^1-1}^1\}$di A di lunghezza massimale m_1. Tra gli autovettore di A corrispondenti all'autovalore λ e linearmente indipendenti da x_0^1, scegliamo uno, x_0^2, che il primo vettore di una catena di Jordan di A di lunghezza massimale m_2 ($\leq m_1$), ecc. Essendo $r = \dim \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ ladimensione dell'autospazio, troviamo r catene di Jordan di A di lunghezze $m_1 \geq \ldots m_r \geq 1$ tali che i loro primi vettori $x_0^1, \ldots, x_0^r$ costituiscono una base di $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$. In tal caso l'unione delle r catene costituisce una base di $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)^{m_1} = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)^N$ per ogni $N \geq m_1$. Quest'ultimo sottospazio di F^n ha dimensione $m_1 + \ldots + m_r (\leq n)$.

Facendo la stessa costruzione per tutti gli autovalori di A, troviamo infine r catene di Jordan, corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (tra cui si possono essere autovalori ripetuti) e di lunghezze $m - 1, \ldots, m_r$. Infatti, per $s = 1, 2, \ldots, r$ si ha:

$$x_0 \neq 0, \quad Ax_0^s = \lambda_s x_0^s,\ Ax_1^s = \lambda_s x_1^s + x_0^s,\ \ldots, \quad Ax_{m-1}^s = \lambda_s x_{m-1}^s + x_{m-2}^s.$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} Ax^s_{m^s-1} \\ Ax^s_{m-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ Ax^s_2 \\ Ax_1 \\ Ax^s_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_s & 1 & & & & & \\ & \lambda_s & 1 & & & & \\ & & \lambda_s & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_s & 1 & & \\ & & & & \lambda_s & 1 & \\ & & & & & \lambda_s & 1 \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}}_{=J_{m^s}(\lambda_s)} \begin{pmatrix} x^s_{m^s-1} \\ x^s_{m-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ x^s_2 \\ x_1 \\ x^s_0 \end{pmatrix}.$$

Riordinando le r catene in ordine decrescente, $x_{m^s-1}, \ldots, x^s_1, x^s_0$, otteniamo per la rappresentazione della trasformazione lineare A rispetto alla cosiddetta *basedi Jordan*:

$$A = \begin{pmatrix} J_{m^1}(\lambda_1) & & & & & & \\ & J_{m^2}(\lambda_2) & & & & & \\ & & J_{m^3}(\lambda_3) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J_{m^{m-2}}(\lambda_{r-2}) & & \\ & & & & & J_{m^{r-1}}(\lambda_{r-1}) & \\ & & & & & & J_{m^r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

where $J_m(\lambda)$ è la matrice di ordine m definita da

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & & \\ & & \lambda & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda & 1 & & \\ & & & & \lambda & 1 & \\ & & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$