

Stato dell'arte (8000 caratteri)

Da ormai quasi cinquanta anni ricercatori operanti nei campi della matematica, della fisica, dell'ingegneria e della biologia hanno focalizzato le loro ricerche sulle cosiddette equazioni nonlineari di evoluzione di tipo integrabile (NIE). Questa massiccia attività di ricerca intorno alle NIE si giustifica facilmente in quanto esse si sono dimostrate adatte alla modellizzazione di rilevanti fenomeni quali la trasmissione di segnali nelle fibre ottiche, la propagazione di onde nell'oceano, la schematizzazione di campi gravitazionali, la propagazione di malformazioni lungo l'elica che rappresenta il DNA e la dinamica delle cosiddette superfici solitoniche.

Il metodo principale per ottenere soluzioni del problema a valori iniziali delle NIE è la Trasformata Inversa Spettrale (IST). La IST può, in modo del tutto equivalente, essere caratterizzata in uno dei seguenti modi: (a) esiste una trasformazione canonica che mappa le variabili fisiche del sistema Hamiltoniano originale in un sistema Hamiltoniano con variabili di tipo azione-angolo (e quindi integrabile); (b) esiste un problema agli autovalori tale che i corrispondenti problemi di scattering diretto e inverso forniscono la trasformazione canonica e la sua inversa.

L'idea base della IST è quella di determinare l'evoluzione temporale dei dati di scattering associati al problema agli autovalori corrispondente a una data NIE. Infatti, la conoscenza dei dati di scattering, consente di risolvere il problema a valori iniziali per la NIE utilizzando le tecniche di scattering diretto e inverso. In particolare, il problema di scattering diretto si basa sulla risoluzione di opportune equazioni integrali di Volterra e conduce alla determinazione dei dati di scattering. Tali dati sono formati da un numero finito di autovalori discreti (bound states) con associate certe costanti (costanti di normalizzazione) e una funzione continua (coefficiente di riflessione). Il problema di scattering inverso consente di ricostruire la soluzione della NIE usando le equazioni integrali di Marchenko. Il nucleo di tali equazioni codifica tutti i dati di scattering. Quindi la IST riconduce il problema iniziale (cioè la risoluzione del problema di Cauchy per una data NIE) in un altro

molto più semplice: quello dell'evoluzione dei dati di scattering (la soluzione del problema di scattering inverso conduce alla soluzione cercata della NIE se si utilizzano dati di scattering calcolati al generico istante temporale t).

Una formulazione alternativa consiste nell'utilizzo di soluzioni (note) della NIE per definire una superficie solitonica. Sfruttando l'equazione lineare che descrive il fibrato tangente si ricostruisce la NIE come condizione di compatibilità fra un problema agli autovalori e un problema che fornisce l'evoluzione temporale. Un aspetto importante di questa formulazione è la trasformazione di Darboux che lascia invariante la forma del problema agli autovalori generando per una nuova soluzione della NIE. In altre parole, tali trasformazioni consentono di costruire una nuova soluzione della NIE aggiungendo ai dati di scattering un autovalore discreto.

Poiché la IST esprime la soluzione del problema a valori iniziali della NIE in termini della soluzione delle equazioni di Marchenko, si pone, in modo naturale, il problema di studiare i casi in cui tali equazioni si possano risolvere esplicitamente. Per rispondere a tale quesito, si è sviluppato un metodo, basato sull'utilizzo di una tripletta di matrici, che ha consentito di trovare soluzioni in forma chiusa per diverse importanti NIE. In particolare, la formula risolutiva ottenuta contiene, come casi particolari, la quasi generalità delle soluzioni solitoniche per le NIE considerate e una classe completamente nuova di soluzioni (multipole soliton solutions). Occorre per rimarcare come tale metodo sia applicabile solo se il coefficiente di riflessione è identicamente uguale a zero e, in tal caso, le soluzioni sono necessariamente di tipo solitonico.

Inoltre, usando la teoria delle equazioni integrali, abbiamo costruito formule per la trasformata di Darboux molto più comode di quelle solitamente presentate in letteratura. Infatti, tali nuove formule consentono di aggiungere molti bound states simultaneamente, mentre quelle precedentemente note si basano solo sull'aggiunta di un solo autovalore per volta.

Proposta di ricerca (5000 caratteri)

In questo progetto proponiamo ricerche sulle seguenti NIE di tipo 1+1 (cio con una coordinata spaziale e una temporale): 1) Equazione nonlineare di Schrödinger (NLS) e equazione di Hirota (HI). La NLS deve la sua importanza sia al suo carattere universale (nel senso che quasi tutti i sistemi conservativi, debolmente nonlineari e dispersivi, si possono ricondurre a sistemi di tipo NLS) sia al fatto che essa consente di modellizzare alcuni importanti fenomeni fisici (propagazione di segnali nelle fibre ottiche e di onde in acque profonde). Per questo motivo la IST per la NLS è intensa-

mente studiata da ormai pi di quarant'anni. Nonostante ci ci sono ancora molti problemi aperti. Quelli che si intendono affrontare in questo progetto sono: (a) Sviluppo della IST per la NLS vettoriale con condizioni iniziali che non decadono a zero quando la variabile spaziale tende all'infinito (con t fissato). Fino a pochi anni fa su questo problema la letteratura era decisamente scarsa. Negli ultimi anni diversi autori si sono soffermati su tale tematica [??] limitandosi, comunque, al caso pi semplice in cui la funzione incognita scalare. Il motivo dell'aumento di interesse per questo modello va ricercato nella presenza in esso della "BenjaminFeir instability" il cui studio, in una prima fase, richiede la conoscenza di soluzioni di tipo solitonico (che si possono determinare applicando la IST). In particolare, si intendono generalizzare i risultati ottenuti in [??] al caso in cui il potenziale sia un vettore di funzioni, in modo da poter applicare la IST al sistemi di tipo NLS;

(b) Equazione di Hirota (HI). HI si presenta come una generalizzazione di NLS e la sua importanza legata [] al fatto che essa permette di modellizzare il moto di un fletto vorticoso per un fluido euleriano tridimensionale. Poich uno studio analitico di questo problema estremamente complicato, si rende necessaria qualche approssimazione per ottenere informazioni su questo importante fenomeno. L'approssimazione usualmente utilizzata a tal fine la "local induction approximation" (LIA). Restando all'interno della LIA, si ritiene che l'utilizzo simultaneo del metodo delle triplette e della formula di Sym-Pohlmeyer (usalmente utilizzata per definire superfici solitoniche) possa condurre a ottenere l'equazione del fletto vorticoso in forma chiusa sia per potenziali decadenti all'infinito sia per potenziali che invece non decadono all'infinito.

(c) Il problema della caratterizzazione dei dati di scattering per il sistema agli autovalori associato alla NLS (sistema di Zakharov-Shabat (ZS)). Tale problema pu essere descritto in questo modo: costruire una corrispondenza biunivoca fra la classe di dati iniziali per la NLS e i dati di scattering di ZS. Recentemente, stata trovata una parziale soluzione a questo problema [?]. La limitazione di questo lavoro che esso fornisce la caratterizzazione cercata senza tener conto dell'evoluzione temporale dei dati di scattering. Ci si propone di generalizzare tale risultato in modo da superare tale ostacolo.

2) Equazione di Landau-Lifshitz. I materiali magnetici danno origine a una gran variet di fenomeni in cui appaiono onde nonlineari. In particolare, sono state sperimentalmente osservate, sulla scala dei nanometri, strutture magnetiche coerenti e localizzate, i cosiddetti droplet magnetici. Una delle possibili applicazione dei droplet magnetici legata all'ideazione di dispositivi

di memorizzazione delle informazioni molto pi efficienti di quelli attualmente disponibili sul mercato. L'equazione che governa i fenomeni nonlineari in cui i droplet magnetici si manifestano l'equazione di Landau-Lifischitz (LL). E' noto che si pu applicare la IST a tale equazione [??] ma, a causa di difficulte tecniche nella formulazione del problema inverso, finora l'unica soluzione trovata la soluzione solitonica per un singolo droplet. Si ritiene che, applicando le tecniche introdotte in [???], si possa, con successo, determinare la soluzione N-droplet solitonica in forma chiusa per un sistema ferromagnetico (con un asse di simmetria). Tale risultato, non solo migliorerebbe la nostra conoscenza matematica sulla LL, ma ci permetterebbe di rafforzare, da un punto di vista fisico, le conoscenze sui fenomeni nonlineari magnetici nella scala dei nanometri.

3) Equazione di Ernst.