1. La formulazione hamiltoniana del campo elettromagnetico in forma simplettica.

2. La Toda lattice come equazione integrabile.

3. La formulazione hamiltoniana-lagrangiana delle equazioni integrabili.

4. Punti di equilibrio e loro classificazione.

5. Il pendolo semplice come sistema dinamico.

6. Le equazioni di Lotka-Volterra come sistema dinamico.

7. Metodo di Newton-Raphson (sulla retta) come sistema dinamico.

8. Lo shift ternario

   $$\sigma(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 3x - 1, & \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 3x - 2, & \frac{2}{3} \leq x < 1, \end{cases}$$

   come sistema dinamico.

9. L'oscillatore di Lorenz come sistema dinamico.

10. L'equazione di Van der Pol come sistema dinamico.

11. Calcolo dettagliato della dimensione di Hausdorff di un frattale.

12. Coppia AKNS per l'equazione di Korteweg-de Vries modificata.

13. Risoluzione dell'equazione di Korteweg-de Vries sotto la condizione iniziale $u(x, 0) = e^{-2x} + e^{-3x}$.

14. Per una matrice reale A di ordine n si consideri il sistema dinamico

$$\vec{x}' = A\vec{x}.$$

Sia E una matrice reale e simmetrica di ordine n, cioè $E^T = E$. Mostrare che

$$e(\vec{x}) = \vec{x}^T E \vec{x}$$

è una costante del moto del sistema dinamico $\vec{x}' = A\vec{x}$ se e solo se

$$EA + A^T E = 0_{n\times n}.$$

15. Applicare il metodo di Liapunov per studiare la (in)stabilità del sistema dinamico

$$x' = y - x^3, \qquad y' = -x^5.$$

Perchè non ci sono orbite chiuse? Quale risultato si otterrebbe utilizzando il metodo di linearizzazione?

16. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} x' = x(2-2y), \\ y' = y(-1+5x+3y). \end{cases}$$

17. Determinare i punti di equilibrio del sistema di Lotka-Volterra modificato

$$\begin{cases} x' = x(2-2y-3x), \\ y' = y(-1+5x+3y). \end{cases}$$

Determinare la natura dei punti di equilibrio (impegnativo!).

18. Dimostrare che il sistema dinamico non autonomo

$$\begin{cases} x'(t) = -2t\,y(t), \\ y'(t) = 2t\,x(t), \end{cases}$$

ha orbite chiuse che non corrispondono a soluzioni periodiche.

19. Si consideri la relazione di ricorrenza

$$P_{n+2}(x) = \frac{2x}{n+2}P_{n+1}(x) - \frac{n+1}{n+2}P_n(x),$$

dove $-1 \leq x \leq +1$. Per quali valori di x ci sono p-cicli?

20. Per $\omega > 0$ si consideri l'equazione alle differenze

$$x_{n+2} = -\omega^2 x_n.$$

Trovare tutte le soluzioni e tutti i p-cicli? Studiarne la (in)stabilità. Che cosa cambierebbe se aggiungessimo un termine di attrito ($k > 0$):

$$x_{n+2} = -kx_{n+1} - \omega^2 x_n?$$

21. Per $h > 0$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ si consideri il sistema dinamico

$$y_{n+1} = y_n + hf'(y_n + hf'(y_n)),$$

il metodo predictor-corrector per risolvere l'equazione differenziale $y' = f(y)$ numericamente. Dimostrare la stabilità del punto di equilibrio $Y = 0$ nel caso $f(y) = -y^3$. Suggerimento: Partendo dal dato iniziale y_0 con $h[y_0]^2 < 1$, si dimostra che $0 < y_{n+1} < y_n$ oppure $0 > y_{n+1} > y_n$.