1. Il sistema dinamico discreto

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$$

è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno modulo < 1. Esso è stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno modulo ≤ 1 e la forma normale di Jordan corrispondente agli autovalori di modulo 1 è banale.

   a. Autovalori: 0 e $2c$. Stabilità asintotica: $|c| < \frac{1}{2}$. Stabilità: $|c| \leq \frac{1}{2}$. Si ha $A^{m+1} = (2c)^m A$. Inoltre,

   $$A^p \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = [(1 \pm i)c]^p \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$

   Quindi esistono p-cicli se e solo se $(1 \pm i)c$ è una radice dell'unità primitiva di ordine p.

   b. Autovalori: $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Stabilità. Esistono 6-cicli generati dagli autovettori.

   c. Autovalori: $\frac{5}{13}\frac{12}{13}i$. Stabilità. No p-cicli.

   d. Autovalori: $3c$ (doppio, forma di Jordan non banale). Stabilità asintotica: $|c| < \frac{1}{3}$. Stabilità: $|c| < \frac{1}{3}$. Esiste un p-ciclo se e solo se $3c$ è una radice dell'unità primitiva di ordine p.

   e. Autovalori $2c$ (doppio, forma di Jordan non banale per $c \neq 0$). Stabilità asintotica: $|c| < \frac{1}{2}$. Stabilità: $|c| < \frac{1}{2}$. Esiste un p-ciclo se e solo se $2c$ è una radice dell'unità primitiva di ordine p.

12. Il sistema dinamico discreto può essere scritto nella forma

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = (p + iq)(x_n + iy_n) + (r + is)(x_n - iy_n),$$

oppure

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+r & -q+s \\ q+s & p-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

oppure

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Se A ha soltante autovalori di modulo minore di 1, esiste un opportuno $m \in \mathbb{N}$ per cui $\|A^m\| < 1$. Siccome in tal caso $\|X_{n+m}\| < \|X_n\|$, la successione $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ può essere suddivisa in m sottosuccessioni, tutte di limite $(0,0)$. Quindi $\|X_n\| \to 0$. Se A ha un autovalore λ di modulo > 1 e Y è un corrispondente autovalore, allora per $X_0 = Y$ otteniamo $X_n = \lambda^n Y$ e quindi $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ tende all'infinito in norma. Se A ha un autovalore λ di modulo 1 e Y è un corrispondente autovettore, allore per $X_0 = Y$ si ha $X_n = \lambda^n Y$ e quindi $\|X_n\| = \|Y\| > 0$. CONCLUSIONE: $X = (0,0)$ è un punto fisso asintoticamente stabile se e solo se A ha soltanto autovalori di modulo < 1. In tal caso tutto lo spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ è il bacino di attrazione del punto fisso. EXTRA: Ci sono punti fissi diversi da $(0,0)$ se e solo se 1 è un autovalore di A; i punti fissi sono i corrispondenti autovettori più $(0,0)$. Ci sono p-cicli se e solo se esiste una radice dell'unità primitiva di ordine p che è autovalore di A. In tal caso i corrispondenti autovettori generano il p-ciclo.

16. Il sistema dinamico discreto può essere scritto nella forma

$$z_{n+1} = [z_n]^* |z_n|^2,$$

essendo z^* il complesso coniugato di z e $F(z) = z^*|z|^2$. Si vede subito che $|F(z)| < |z|$ per $0 < |z| < 1$, $F(z) = |z|$ per $z = 0$ e per $|z| = 1$, e $|F(z)| > |z|$ per $|z| > 1$. Quindi i punti fissi e i punti coinvolti nei p-cicli sono $z = 0$ oppure punti del cerchio unitario. Ovviamente $z = 0$ è un punto fisso. Gli altri punti fissi sono $z = \pm 1$. Per trovare i p-cicli si prenda $z_0 = e^{i\theta_0}$. In tal caso $z_{2k} = z_0$ e $z_{2k+1} = [z_0]^*$. Quindi $\{i, -i\}$ è un 2-ciclo. Non esistono p-cicli per $p \geq 3$. Per $0 < |z_0| < 1$ la successione $\{|z_n|\}_{n=0}^{\infty}$ è strettamente decrescente e quindi converge a zero (poichè $|z_{n+1}| = |z_n|^3$). Dunque $z_n \to 0$. Per $|z_0| > 1$ la successione $\{|z_n|\}_{n=0}^{\infty}$ tende a $+\infty$ (poichè $|z_{n+1}| = |z_n|^3$). CONCLUSIONE: $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ è un bacino di attrazione per il punto fisso $z = 0$. I punti di equilibrio $z = \pm 1$ di F sono instabili. I punti di equilibrio $z = \pm i$ di F^2 sono instabili.

17. Il sistema dinamica discreto può essere scritto nella forma

$$z_{n+1} = z_n(|z_n|^2 - 1),$$

essendo $z_n = x_n + iy_n$. Definendo $F(z) = z(|z|^2 - 1)$, i punti fissi di F sono $z = 0$ e i punti della circonferenza $|z| = \sqrt{2}$. Ponendo $z_n = |z_n|e^{i\theta_n}$ per $0 \neq z_n \in \mathbb{C}$, si vede che θ_n non dipende da n e $|z_{n+1}| = |z_n|\,||z_n|^2 - 1|$. Per $|z_0| < \sqrt{2}$ la successione $\{|z_n|\}_{n=0}^{\infty}$ è strettamente decrescente e quindi converge. Ma in tal caso $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto fisso di F, cioè a zero. Per $|z_n| > \sqrt{2}$ la successione $\{|z_n|\}_{n=0}^{\infty}$ è strettamente crescente e quindi converge a un numero maggiore di $\sqrt{2}$ oppure a $+\infty$. Nel primo caso la successione $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a un punto fisso di modulo $> \sqrt{2}$, un'impossibilità. Quindi $\{|z_n|\}_{n=0}^{\infty}$ tende all'infinito. CONCLUSIONE: $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt{2}\}$ è un bacino di attrazione per il punto fisso zero, mentre i punti di equilibrio sulla circonferenza $|z| = \sqrt{2}$ sono tutti instabili. Siccome $|F(z)| < |z|$ per $0 < |z| < \sqrt{2}$ e $|F(z)| > |z|$ per $|z| > \sqrt{2}$, non esistono p-cicli per $p \geq 2$. EXTRA: Il sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio $(x, y) = (0, 0)$ è $(x_{n+1}, y_{n+1}) = -(x_n, y_n)$, dove $A = -I_2$ ha soltanto autovalori negativi. Secondo il teorema di Perron l'origine è asintoticamente stabile.

19. Sia K l'insieme di tutti gli $x \in [0, 1]$ per cui lo sviluppo decimale contiene soltanto le cifre $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Si considerino le trasformazioni

$$\psi_j(x) = \begin{cases} (x/10) \simeq 0,0d_1d_2d_3\ldots, & j = 1, \\ 0,2 + (x/10) \simeq 0,2d_1d_2d_3\ldots, & j = 2, \\ 0,4 + (x/10) \simeq 0,4d_1d_2d_3\ldots, & j = 3, \\ 0,6 + (x/10) \simeq 0,6d_1d_2d_3\ldots, & j = 4, \\ 0,8 + (x/10) \simeq 0,8d_1d_2d_3\ldots, & j = 5, \end{cases}$$

essendo $x \simeq 0, d_1d_2d_3\ldots$ con $\{d_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \{0, 2, 4, 6, 8\}$. In tal caso le trasformazioni ψ_j sono tutte similarità con fattore $r_j = (1/10)$, mentre

$$K = \sum_{j=1}^{5} \psi_j[K].$$

Quindi la dimensione di Hausdorff d segue dall'equazione

$$5\left(\frac{1}{10}\right)^d = 1,$$

il che implica che $10^d = 5$ oppure $d = [\log(5)/\log(10)]$.