50 Equazione generale delle coniche

Le curve piane studiate nel paragrafo precedente (la circonferenza, l'ellisse, l'iperbole, la parabola) hanno in comune la proprietà di essere rappresentate da equazioni algebriche di secondo grado. Le loro equazioni sono casi particolari della più generale equazione di secondo grado in x e y:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{50.1}$$

Le curve piane, rappresentabili da equazioni di secondo grado in x, y del tipo di (50.1), sono dette *coniche*.

Alla conica (50.1) è associata la matrice quadrata (simmetrica)

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{50.2}$$

La conica è detta *singolare* se il determinante della matrice M è nullo; altrimenti la conica è detta *non singolare*.

È possibile eseguire la *classificazione metrica delle coniche* utilizzando anche la matrice M_{33} (ottenuta dalla matrice M cancellando la terza riga e la terza colonna, in accordo con le notazioni del paragrafo 29):

$$M_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{50.3}$$

Si dimostra che vale il seguente schema di classificazione delle coniche in ellissi, iperboli o parabole, nel senso che è possibile determinare un sistema cartesiano ortogonale rispetto al quale la curva (50.1) assuma una forma canonica (come quelle indicate nel paragrafo 49) del tipo di:

Ia. un'ellisse, se $\det M_{33} > 0$ e $(a_{11} + a_{22}) \det M < 0$.

Ib. un singolo punto, se $\det M_{33} > 0$ e $(a_{11} + a_{22}) \det M = 0$.

Ic. l'insieme vuoto, se $\det M_{33} > 0$ e $(a_{11} + a_{22}) \det M > 0$.

IIa. un'iperbole, se $\det M_{33} < 0$ e $\det M \neq 0$.

IIb. due rette non parallelle, se $\det M_{33} < 0$ e $\det M = 0$.

IIIa. una parabola, se $\det M_{33} = 0$ e $\det M \neq 0$.

IIIb. una singola retta, se $\det M_{33} = \det M = 0$ e la caratteristica della matrice M è uguale a 1.

IIIcd. due rette parallelle oppure l'insieme vuoto, se $\det M_{33} = \det M = 0$ e la caratteristica della matrice M è uguale a 2. La distinzione tra questi due casi richiede un'ulteriore analisi [vedi la (50.27) e la (50.28)].

I casi (Ia), (IIa) e (IIIa) corrispondono alle cosiddette *coniche non degeneri*, cioè coniche che non si riducono ad una retta, due rette, un singolo punto o l'insieme vuoto. Ciò ultimo accade ad esempio per l'equazione di secondo grado

$$x^2 + y^2 + 1 = 0, \tag{50.4}$$

che, essendo $x^2 + y^2 + 1 > 0$, non è soddisfatta da alcuna coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; cioè corrisponde all'insieme vuoto. Questo è un caso in cui vale la (Ic). Infatti,

$$\begin{cases} \det M_{33} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0, \\ (a_{11} + a_{22}) \det M = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0. \end{cases} \tag{50.5}$$

Dimostriamo ora la suddetta classificazione delle coniche interamente. L'idea principale è di ricondurre l'equazione generale (50.1) ad una forma canonica indicata nel paragrafo 49 tramite un'opportuna rotazione seguita da un'opportuna traslazione.

Cominciamo a trasformare l'equazione (50.1) con una rotazione del tipo

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases} \tag{50.6}$$

Il primo membro di (50.1) diviene

$$\begin{aligned} & a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = \\ & = [a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{22}\operatorname{sen}^2\alpha]x'^2 + \\ & + 2[a_{12}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (a_{22} - a_{11})\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha]x'y' + \\ & + [a_{11}\operatorname{sen}^2\alpha - 2a_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha]y'^2 + \\ & + 2[a_{13}\cos\alpha + a_{23}\operatorname{sen}\alpha]x' + 2[-a_{13}\operatorname{sen}\alpha + a_{23}\cos\alpha]y' + a_{33}. \end{aligned} \tag{50.7}$$

L'equazione nelle variabili x', y' diviene di tipo

$$k_1 x'^2 + k_2 y'^2 + 2\hat{a}_{13}x' + 2\hat{a}_{23}y' + a_{33} = 0, \tag{50.8}$$

dove

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \tag{50.9}$$

purchè il coefficiente del coefficiente $x'y'$ sia nullo, cioè purchè

$$a_{12}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (a_{22} - a_{11})\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0. \tag{50.10}$$

Dividendo per $\cos^2\alpha$ abbiamo l'equazione di secondo grado in $\operatorname{tg}\alpha$:

$$a_{12} + (a_{22} - a_{11})\operatorname{tg}\alpha - a_{12}\operatorname{tg}^2\alpha = 0; \tag{50.11}$$

è possibile impostare la risoluzione di tale equazione rispetto a $\operatorname{tg}\alpha$ (per poi ricavare α) soltanto se il discriminante dell'equazione è non negativo:

$$\Delta = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0. \tag{50.12}$$

Ovviamente la condizione (50.12) è sempre soddisfatta, perché il Δ risulta somma di due quadrati. Perciò è sempre possibile ricavare $\operatorname{tg}\alpha$ in modo che valga la (50.11) e, in definitiva, in modo da trasformare l'equazione nella forma (50.8).

Osserviamo ora che risulta $\Delta = 0$ in (50.12) se e solo se

$$a_{11} = a_{22}, \qquad a_{12} = 0, \tag{50.13}$$

che corrisponde al caso della circonferenza (si confronti con le (49.3); naturalmente deve essere soddisfatta la condizione (49.6)). In tal caso il coefficiente del termine $x'y'$, indicato nella (50.10), è nullo qualunque sia il valore dell'angolo di rotazione α, concordemente con l'evidente fatto geometrico che, nel caso di una circonferenza con centro nell'origine degli assi, l'equazione resta canonica (il luogo geometrico rimane invariato rispetto agli assi) qualunque sia la rotazione.

Per ridurre la (50.8) ad una forma canonica senza termini proporzionali a x', y' bisogna richiedere che k_1 e k_2 siano ambedue diversi da zero. Completando i quadrati otteniamo

$$k_1\left(x' + \frac{\hat{a}_{13}}{k_1}\right)^2 + k_2\left(y' + \frac{\hat{a}_{23}}{k_2}\right)^2 = \frac{\hat{a}_{13}^2}{k_1} + \frac{\hat{a}_{23}^2}{k_2} - a_{33}. \tag{50.14}$$

Abbiamo i sequenti casi:

a. k_1, k_2 hanno segni diversi e la parte a destra nella (50.14) non si annulla. In tal caso risulta un'iperbole. Se $k_1 = -k_2$, questa iperbole è rettangolare.

b. k_1, k_2 hanno segni diversi e la parte a destra nella (50.14) si annulla. In tal caso risultano due rette non parallelle. Queste rette sono gli asintoti dell'iperbole descritta nella parte (a).

c. k_1, k_2 hanno lo stesso segno, la parte a destra nella (50.14) non si annulla e ha lo stesso segno. In tal caso risulta un'ellisse con l'intersezione degli assi nel punto di coordinate $x_0 = -\frac{\hat{a}_{13}}{k_1}$, $y_0 = -\frac{\hat{a}_{23}}{k_2}$). Per $k_1 = k_2$ risulta una circumferenza.

d. k_1, k_2 hanno lo stesso segno e la parte a destra nella (50.14) si annulla. In tal caso risulta il singolo punto di coordinate $x_0 = -\frac{\hat{a}_{13}}{k_1}$, $y_0 = -\frac{\hat{a}_{23}}{k_2}$).

e. k_1, k_2 hanno lo stesso segno, la parte a destra nella (50.14) non si annulla e ha il segno opposto. In tal caso risulta l'insieme vuoto, siccome la (50.14) non può essere soddisfatta.

Nei casi (a)-(e) lo spostamento dell'origine al suddetto punto (x_0, y_0), cioè la traslazione delle coordinate

$$\hat{x} = x' + \frac{\hat{a}_{13}}{k_1}, \qquad \hat{y} = y' + \frac{\hat{a}_{23}}{k_2}, \tag{50.15}$$

conduce alla forma canonica

$$k_1 \hat{x}^2 + k_2 \hat{y}^2 = k_3, \tag{50.16}$$

dove k_1, k_2 non si annullano.

Quando una delle costanti k_1, k_2 si annulla,[1] risulta una parabola, un caso degenere della parabola o l'insieme vuoto. Per $k_2 = 0$ e $k_1 \neq 0$ risulta l'equazione

$$\hat{x}^2 + 2\frac{\hat{a}_{23}}{k_1} y' = \frac{\hat{a}_{13}^2 - k_1 a_{33}}{k_1^2}. \tag{50.17}$$

In tal caso abbiamo una parabola se $\hat{a}_{23} \neq 0$, due rette paralelle se $\hat{a}_{23} = 0$ e $\hat{a}_{13}^2 > k_1 a_{33}$, una singola retta se $\hat{a}_{23} = 0$ e $\hat{a}_{13}^2 = k_1 a_{33}$, e l'insieme vuoto se $\hat{a}_{23} = 0$ e $\hat{a}_{13}^2 < k_1 a_{33}$. D'altra parte, se $k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$ e quindi risulta l'equazione

$$\hat{y}^2 + 2\frac{\hat{a}_{13}}{k_2} x' = \frac{\hat{a}_{23}^2 - k_2 a_{33}}{k_2^2}, \tag{50.18}$$

abbiamo una parabola se $\hat{a}_{13} \neq 0$, due rette paralelle se $\hat{a}_{13} = 0$ e $\hat{a}_{23}^2 > k_2 a_{33}$, una singola retta se $\hat{a}_{13} = 0$ e $\hat{a}_{23}^2 = k_2 a_{33}$, e l'insieme vuoto se $\hat{a}_{13} = 0$ e $\hat{a}_{23}^2 < k_2 a_{33}$.

Infine, osserviamo che

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M_{33} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{50.19}$$

dove M_{33} è la matrice (50.3). Scrivendo la trasformazione (50.6) in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\alpha) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \qquad R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{50.20}$$

otteniamo

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = k_1 {x'}^2 + k_2 {y'}^2, \tag{50.21}$$

dove

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = R(-\alpha) M_{33} R(\alpha). \tag{50.22}$$

Siccome i determinanti delle matrici di rotazione $R(-\alpha)$ e $R(\alpha)$ sono uguali ad 1, risulta dalla (50.22)

$$k_1 k_2 = \det M_{33}. \tag{50.23}$$

[1] Non si annullano tutti e due, poichè avremmo per la (50.1) l'equazione lineare $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

In altre parole, il determinante della M_{33} è uguale al prodotto $k_1 k_2$ delle costanti k_1, k_2. Inoltre, si vede facilmente che

$$k_1 + k_2 = a_{11} + a_{22}. \tag{50.24}$$

Dalla (50.9) e dalla (50.22) si ottiene facilmente l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \hat{a}_{13} \\ 0 & k_2 & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{13} & \hat{a}_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{50.25}$$

dove M è la matrice (50.2). Siccome i determinanti delle due matrici di rotazione (intorno all'asse z) sono uguali ad 1, risulta

$$\det M = k_1 k_2 a_{33} - k_2 \hat{a}_{13}^2 - k_1 \hat{a}_{23}^2, \tag{50.26}$$

che è il determinante della matrice della parte a destra della (50.25).

Ritorniamo alla classificazione nel caso $k_1 k_2 \neq 0$ dopo la (50.14). Prima vediamo che la parte a destra della (50.14) vale $-\det M/(k_1 k_2)$. Con l'aiuto delle (50.23) e (50.24) dimostriamo i casi (Ia)-(Ic) e (IIa)-(IIb) della classificazione delle coniche.

Se $k_1 \neq 0$ e $k_2 = 0$, allora $\det M = -k_1 \hat{a}_{23}^2$ [vedi la (50.26)]. In tal caso la matrice nella parte a destra della (50.25) si riduce ad una matrice di ordine 3 con la seconda riga e la seconda colonna nulle; cancellando questa riga e questa colonna si ottiene la matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} k_1 & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{13} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{50.27}$$

Dall'altra parte, se $k_1 = 0$ e $k_2 \neq 0$, allora $\det M = -k_2 \hat{a}_{13}^2$ [vedi la (50.26)]. In tal caso la matrice nella parte a destra della (50.25) si riduce ad una matrice di ordine 3 con la prima riga e la prima colonna nulle; cancellando questa riga e questa colonna si ottiene la matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} k_2 & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{50.28}$$

Ora si vede facilmente che la conica consiste in due rette parallelle se il determinante della (50.27) o della (50.28) è negativo, in una singola retta se questo determinante si annulla, e nell'insieme vuoto se questo determinante è positivo. Quindi abbiamo ottenuto i casi (IIIa)-(IIId) della classificazione delle coniche.

Esempi. Classifichiamo le seguenti coniche:

1. $x^2 + 4y^2 - 4x + 24y + 31 = 0$ [ellisse, caso Ia]; $(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 9$.
2. $x^2 + 4y^2 - 4x + 24y + 40 = 0$ [singolo punto, caso Ib]; $(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 0$.
3. $x^2 + 4y^2 - 4x + 24y + 49 = 0$ [l'insieme vuoto, caso Ic]; $(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = -9$.
4. $9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 76 = 0$ [iperbole, caso IIa]; $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 1$.
5. $9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 77 = 0$ [2 rette non parallelle, caso IIb]; $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 0$.
6. $x^2 - 10x - y + 44 = 0$ [parabola, caso IIIa]; $(x-5)^2 = y + 3$.
7. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ [singola retta, caso IIIb]; $(x + 2y + 1)^2 = 0$.
8. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$ [due rette parallelle, caso IIIc]; $(x + 2y + 1)^2 = 4$.
9. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$ [l'insieme vuoto, caso IIId]; $(x + 2y + 1)^2 = -4$.

La seguente tabella contiene i valori di $\det M_{33}$, di $\det M$ e della caratteristica di M per i nove esempi.

Esempio	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\det M_{33}$	4	4	4	-36	-36	0	0	0	0
$\det M$	-36	0	36	-144	0	$-1/4$	0	0	0
$\operatorname{car} M$	3	2	3	3	2	3	1	2	2