II. ALCUNE EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA

1. Classificazione delle equazioni alle derivate parziali

Consideriamo un'equazione differenziale quasi-lineare (lineare in tutte le sue derivate di ordine superiore) del secondo ordine

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \tag{1.1}$$

a coefficienti continui $a_{ij}(x)$ definiti su un aperto $G \subset \mathbf{R}^n$. L'equazione (1.1) soddisfa la condizione di simmetria

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \text{ reale}, \qquad x \in G. \tag{1.2}$$

Esempi importanti dell'equazione (1.1) sono l'equazione di Poisson n-dimensionale[1]

$$\Delta u = -f, \tag{1.3}$$

dove $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ (la delta di Kronecker), l'equazione delle onde n-dimensionale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f, \tag{1.4}$$

dove $a_{00}(x) = 1$ (essendo t la coordinata zero-esima), $a_{ii}(x) = -c^2$ $(i = 1, \cdots, n)$, e $a_{ij}(x) = 0$ per $i \neq j$, e l'equazione del calore n-dimensionale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \tag{1.5}$$

dove $a_{00}(x) = 0$ (essendo t la coordinata zero-esima), $a_{ii}(x) = a^2$ $(i = 1, \cdots, n)$, e $a_{ij}(x) = 0$ per $i \neq j$.

All'equazione (1.1) si associa la matrice $n \times n$

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}, \tag{1.6}$$

che dipende soltanto dai termini con le derivate parziale del secondo ordine. Grazie alla (1.2), la matrice $A(x)$ è reale e simmetrica. Quindi $A(x)$ ha n autovalori reali $\lambda_1(x), \cdots, \lambda_n(x)$. Inoltre esiste una matrice ortogonale $O(x)$ (cioè, $O(x)^T = O(x)^{-1}$ e la $O(x)$ è reale) tale che

$$O(x)^{-1} A(x) O(x) = \operatorname{diag}(\lambda_1(x), \cdots, \lambda_n(x)), \tag{1.7}$$

dove la parte a destra è una matrice diagonale. La colonna j-esima della $O(x)$ è un autovettore (di norma euclidea 1) della $A(x)$ corrispondente all'autovalore $\lambda_j(x)$ $(j =$

[1] Δ è l'operatore di Laplace: $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \nabla \cdot \nabla = \operatorname{div} \operatorname{grad}$.

$1, \cdots, n)$. Le colonne della $O(x)$ costituiscono una base ortonormale dello spazio euclideo $\mathbf{R}^n$.

Introduciamo la seguente classificazione delle equazioni (1.1) che soddisfano la (1.2). Tale equazione si dice

a. *ellittica* se tutti gli autovalori $\lambda_j(x)$ sono diversi da zero e hanno lo stesso segno.
b. *iperbolica* se tutti gli autovalori $\lambda_j(x)$ sono diversi da zero, ma non tutti hanno lo stesso segno. La (1.1) si dice *di tipo iperbolico normale* se è iperbolica e tutti gli autovalori tranne uno hanno lo stesso segno.
c. *parabolica* se almeno uno degli autovalori (ma non tutti) si annullano. La (1.1) si dice *di tipo parabolico normale* se è parabolica e tutti gli autovalori non nulli hanno lo stesso segno.

Torniamo agli esempi (1.3), (1.4) e (1.5):

(1.3): Si ha $A(x) = \mathrm{diag}\,(1, \cdots, 1)$ di ordine n. Tutti gli autovalori sono uguali ad 1 e quindi l'equazione di Poisson è ellittica.

(1.4): Si ha $A(x) = \mathrm{diag}\,(1, -c^2, \cdots, -c^2)$ di ordine $n+1$. Uno degli autovalori è uguale ad 1 e gli altri sono uguali a $-c^2$. Quindi l'equazione delle onde è di tipo iperbolico normale.

(1.5): Si ha $A(x) = \mathrm{diag}\,(0, -a^2, \cdots, -a^2)$ di ordine $n+1$. Uno degli autovalori si annulla e gli altri sono uguali a $-a^2$. Quindi l'equazione del calore è di tipo parabolico normale.

Osserviamo che in principio la classificazione della (1.1) dipende dalla scelta del punto $x \in G$. Per molte equazioni importanti della fisica matematica il segno degli autovalori (spesso gli autovalori stessi) e dunque la classificazione non dipende da $x \in G$ (tranne in qualche punto eccezionale, spesso di frontiera). Un'eccezione notevole è *l'equazione di Tricomi*

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.8}$$

dove $(x, y) \in G = \mathbf{R}^2$. In tal caso $A(x, y) = \mathrm{diag}\,(y, 1)$, $\lambda_1(x, y) = y$ e $\lambda_2(x, y) = 1$. Quindi la (1.8) è ellittica se $y > 0$, parabolica se $y = 0$ e iperbolica se $y < 0$.

Dimostriamo ora che una trasformazione delle variabili nella (1.1) non influisce sulla classificazione. Consideriamo la sostituzione

$$\begin{cases} y_l = y_l(x_1, \cdots, x_n), \ y_l \in C^2(G), & l = 1, \cdots, n \\ D(x_1, \cdots, x_n) = J\left(\dfrac{y_1, \cdots, y_n}{x_1, \cdots, x_n}\right) \neq 0, & l = 1, \cdots, n, \end{cases} \tag{1.9}$$

$D(x_1, \cdots, x_n)$ essendo lo Jacobiano della trasformazione $x \mapsto y$. Visto che $D \neq 0$, in un certo intorno di $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ (con $y^0 = y(x^0)$) le variabili $x_1, \cdots, x_n$ si possono esprimere in termini delle nuove variabili $y_1, \cdots, y_n$, cioè $x = x(y)$), dove $x = x(y)$ è di classe C^2. Denotiamo $\tilde{u}(y) = u(x(y))$. Abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l}, \tag{1.10a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_1 \partial x_j}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l}. \tag{1.10b}$$

Sostituendo le espressioni (1.10) nell'equazione (1.1), si ottiene

$$\sum_{l,k=1}^{n} \tilde{a}_{lk}(y)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l \partial y_k} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}) = 0, \tag{1.11}$$

dove

$$\tilde{a}_{lk}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x(y))\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \tag{1.12}$$

e tutti i termini contenenti soltanto le derivate del primo ordine ed il termine $\Phi(x, u, \nabla u)$ in (1.1) sono stati raccolti nella $\tilde{\Phi}$.

Sia $y = y(x)$ una trasformazione delle variabili di classe C^2 tale che

$$\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x^0)\right)_{j,k=1}^{n}$$

è una matrice ortogonale, dove le colonne costituiscono una base ortonormale di autovettori della matrice $A(x) = (a_{ij}(x^0))_{i,j=1}^{n}$. In tal caso, per $y = y^0 = y(x^0)$ la (1.11) avrà la forma

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l(x^0)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \nabla_y \tilde{u}) = 0, \tag{1.13}$$

$\lambda_1(x^0), \cdots, \lambda_n(x^0)$ essendo gli autovalori della $A(x^0)$. Gli autovalori si possono ordinare tali che $\lambda_1(x^0), \cdots, \lambda_r(x^0)$ sono positivi, $\lambda_{r+1}(x^0), \cdots, \lambda_m(x^0)$ sono negativi, e $\lambda_{m+1}(x^0), \cdots, \lambda_n(x^0)$ si annullano. In tal caso, usando l'ulteriore trasformazione delle variabili $z = z(y)$ di classe C^2,

$$z_l = \begin{cases} y_l/\sqrt{\lambda_l(x^0)}, & l = 1, \cdots, r \\ y_l/\sqrt{-\lambda_l(x^0)}, & l = r+1, \cdots, m \\ y_l, & l = m+1, \cdots, n, \end{cases}$$

si arriva all'equazione

$$\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z_l^2} - \sum_{l=r+1}^{m} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z_l^2} + \hat{\Phi}(y, \hat{u}, \nabla_y \hat{u}) = 0, \tag{1.14}$$

dove $\hat{u}(z) = \tilde{u}(y(z)) = u(x(y(z)))$ e $\hat{\Phi}(z, \hat{u}, \nabla_z \hat{u}) = \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \nabla_y \tilde{u})$.

Nella scelta della trasformazione $y = y(x)$ abbiamo soltanto diagonalizzato la matrice $A(x^0)$. Ciò risultava nell'equazione (1.13) valida in $y = y^0$ e nell'equazione (1.14) valida in $z^0 = z(y^0) = z(y(x^0))$.

2. Caratteristiche e Forme Canoniche

All'equazione del secondo ordine (1.1) si associa *l'equazione caratteristica*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j} = 0. \tag{2.1}$$

Sia $\omega(x)$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in G$, una soluzione della (2.1) di classe C^1. Se $\omega(x)$ è tale che sulla superficie $\omega(x) = \text{cost}$ si abbia $\nabla\omega(x) \neq 0$, allora questa superficie si dice *superficie caratteristica*. Per $n = 2$ la superficie caratteristica è detta *curva caratteristica*.

Se ogni superficie della famiglia $\omega(x) = C$ con $C \in (a, b)$ è una caratteristica della (1.1) [cioè, $\nabla\omega(x) \neq 0$], questa famiglia riempie una regione G_0 (sufficientemente piccola). Attraverso ogni punto della G_0 passa una ed una sola caratteristica. Supponiamo che ω appartenga a $C^2(G_0)$. Allora, se nella trasformazione (1.9) poniamo $y_1 = \omega(x)$, in virtù delle (1.12) e (2.1), il coefficiente $\tilde{a}_{11}$ si annulla nella corrispondente regione $\tilde{G}_0 = y[G_0]$. Perciò conoscendo una o alcune famiglie di caratteristiche della (1.1) è possibile ridurre quest'equazione ad una forma più semplice.

Riportiamo alcuni esempi di caratteristiche.

a. *L'equazione delle onde* [cf. (1.4)]. In tal caso si ha

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - c^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

La superficie

$$c^2(t - t^0)^2 - |x - x^0|^2 = 0,$$

detto *cono caratteristico* con vertice nel punto (x^0, t^0), è una caratteristica. Un'altra famiglia di caratteristiche è data dai piani tangenti

$$ct + (x \cdot b) = \text{costante},$$

dove $|b| = 1$.

b. *L'equazione del calore* [cf. (1.5)]. In tal caso si ha

$$a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0, \tag{2.2}$$

e quindi i piani $t = \text{costante}$ sono superficie caratteristiche.

c. *L'equazione di Poisson* [cf. (1.3)]. In tal caso risulta la (2.2). Quindi $\omega(x) = \text{costante}$. Siccome $\nabla\omega(x) = 0$ quando $\omega(x) = \text{costante}$, non ci sono caratteristiche.

Nel paragrafo precedente abbiamo trasformato la (1.1) in un'equazione dello stesso tipo, dove la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ è diagonale [oppure: è diagonale con soltanto $1, -1, 0$ come elementi diagonali] in un certo punto x^0. Ora poniamo la domanda se è

possibile ridurre la (1.1) alla forma canonica (1.14) in un intorno abbastanza piccolo del punto x^0. Per poter realizzare questa riduzione, è necessario che il numero di condizioni

$$\begin{cases} \tilde{a}_{lk} = 0, & l, k = 1, \cdots, n,\ l < k \\ \tilde{a}_{ll} = \varepsilon_l \tilde{a}_{11}, & l = 2, \cdots, n,\ \tilde{a}_{11} \neq 0, \end{cases}$$

dove $\varepsilon_l \in \{-1, 0, 1\}$, non sia superiore al numero di funzioni incognite y_l, $l = 1, \cdots, n$:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n - 1 \leq n, \qquad \text{oppure } n = 2.$$

Mostriamo che per $n = 2$ è sempre possibile realizzare questa riduzione.

Consideriamo ora l'equazione quasi-lineare

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{2.3}$$

dove assumiamo che i coefficienti a, b e c siano di classe C^2 in G e non si annullino simultaneamente in G. Si può assumere che $a \neq 0$ in G.

Cerchiamo una forma canonica della (2.3) dove a e c si annullano e $b \neq 0$, poichè tale forma può essere ricondotta a quella precedente tramite una trasformazione banale. Passando alle nuove variabili

$$\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y), \xi \in C^2,\ \eta \in C^2,\ D(\frac{\xi, \eta}{x, y}) \neq 0,$$

riduciamo la (2.3) alla forma

$$\tilde{a}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\tilde{b}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{c}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \tilde{\Phi}\left(\xi, \eta, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{2.4}$$

dove

$$\tilde{a}(\xi,\eta) = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\tilde{b}(\xi,\eta) = a\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\tilde{c}(\xi,\eta) = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Per arrivare alla forma canonica dove $a = c = 0$, richiediamo che $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$, cioè

$$\begin{aligned} a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 &= 0, \\ a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Visto che $a \neq 0$, le (2.5) sono equivalenti alle equazioni lineari

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_1(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda_2(x,y)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \tag{2.6}$$

dove

$$\lambda_1 = \frac{b - \sqrt{d}}{a}, \qquad \lambda_2 = \frac{b + \sqrt{d}}{a}, \qquad d = b^2 - ac.$$

Conformemente alla classificazione precedente, abbiamo tre possibilità:

1. *Tipo iperbolico* se $d > 0$.
2. *Tipo parabolico* se $d = 0$.
3. *Tipo ellittico* se $d < 0$.

Nel caso iperbolico l'equazione (2.3) è ridotta alla forma canonica

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2\tilde{b}}\tilde{\Phi} = 0. \tag{2.7}$$

Sostituendo $\rho = \xi + \eta$ e $\sigma = \xi - \eta$, troviamo

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2} + \Phi_1 = 0. \tag{2.8}$$

Inoltre, se esistono soluzioni delle (2.6) tali che $\nabla\xi \neq 0$ e $\nabla\eta \neq 0$ nell'intorno considerato, le curve

$$\xi(x,y) = C_1, \qquad \eta(x,y) = C_2,$$

definiscono due famiglie di caratteristiche della (2.3).

3. Equazioni fondamentali della fisica matematica

Una descrizione di molti processi fisici porta ad equazioni differenziali ed integrali o persino ad equazioni integro-differenziali. Una classe sufficientemente vasta di processi fisici viene descritta mediante equazioni lineari del secondo ordine

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = F(x). \tag{3.1}$$

In questo paragrafo consideriamo processi fisici tipici che si possono ridurre a diversi problemi al contorno per le equazioni differenziali.

1. Equazione di vibrazioni. Molti problemi di meccanica (vibrazione di corde, di barre, di membrane e di volumi tridimensionali) e di fisica (onde acustiche e elettromagnetiche) sono descritte da equazione di vibrazioni della forma

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{3.2}$$

dove la funzione incognita $u(x,t)$ dipende da n ($n = 1, 2, 3$ nella maggior parte delle applicazioni) coordinate spaziali $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e dal tempo t; i coefficienti ρ, p e q sono determinati dalle proprietà del mezzo in cui si svolgono le vibrazioni; il termine noto $F(x,t)$ esprime l'intensità della perturbazione esterna. Nell'equazione (3.2), conformemente alla definizione degli operatori di divergenza e di gradiente, si ha

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Illustriamo la deduzione dell'equazione (2) con l'esempio di piccole vibrazioni trasversali di una corda. Si dice corda un filo teso che non resiste alla flessione.

Supponiamo che nel piano (x,u) la corda esegua piccole vibrazioni trasversali vicino alla sua posizione di equilibrio coincidente con l'asse x. Denotiamo con $u(x,t)$ il valore dello spostamento della corda dalla posizione di equilibrio nel punto x all'istante t in modo che $u = u(x,t)$ descrive l'equazione della corda all'istante t. Limitandoci all'esame delle piccole vibrazioni della corda, trascureremo infinitesimi di ordine superiore in confronto con $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Visto che la corda non resiste alla flessione, la sua tensione $T(x,t)$, nel punto x all'istante t, è diretta lungo la tangente alla corda al punto x (Vedi Fig. 3.1). Qualunque sezione della corda (a,b) dopo lo spostamento dalla posizione di equilibrio nei limiti della nostra approssimazione non cambia la sua lunghezza

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \simeq b - a$$

e, per conseguenza, conformemente alla legge di Hooke, il valore della tensione $|T(x,t)|$ rimarrà costante ed indipendente sia da x che da t, cioè $|T(x,t)| = T_0$. Indichiamo con $F(x,t)$ la densità delle forze esterne agenti sulla corda, nel punto x all'istante t, dirette perpendicolarmente all'asse x nel piano (x,u). Infine, sia $\rho(x)$ la densità lineare della corda nel punto x, in modo che $\rho(x)\Delta x$ rappresenti approssimativamente la massa dell'elemento della corda $(x, x + \Delta x)$.

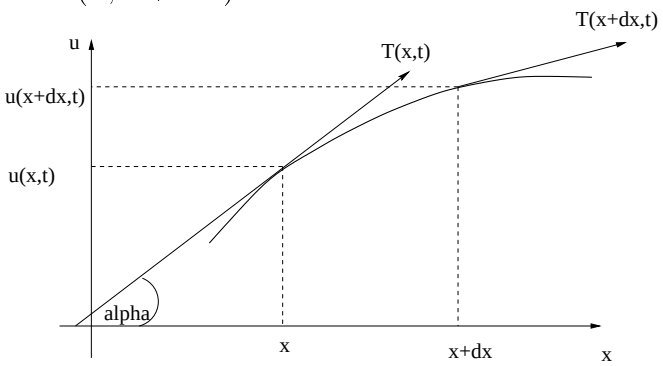

Fig. 3.1

Costruiamo l'equazione del moto della corda. Sul suo elemento $(x, x+\Delta x)$ agiscono le forze di tensione $T(x + \Delta x, t)$ e $-T(x,t)$ e la forza esterna, la cui somma, conformemente alle leggi di Newton, dev'essere uguale al prodotto della massa di quest'elemento

per la sua accelerazione. Proiettando quest'uguaglianza vettoriale sull'asse u, in base ai ragionementi precedenti, si ottiene la seguente uguaglianza:

$$T_0 \sin\alpha|_{x+\Delta x} - T_0 \sin\alpha|_x + F(x,t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{3.3}$$

Ma nell'ambito della nostra approssimazione si ha

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

e perciò otteniamo dalla (3.3)

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + F(x,t),$$

da cui, per $\Delta x \to 0$, segue l'uguaglianza

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F. \tag{3.4}$$

Questa è l'*equazione delle piccole vibrazioni trasversali di una corda.* Per $F \neq 0$, le vibrazioni della corda sono dette *forzate* e, per $F = 0$, *libere.*

Se la densità ρ è costante, cioè $\rho(x) = \rho$, l'equazione di vibrazioni della corda assume la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \tag{3.5}$$

dove $f = F/\rho$ e $a^2 = T_0/\rho$ è una costante. L'equazione (5) è detta anche *equazione d'onda unidimensionale.*

Equazioni della forma (3.2) descrivono anche le piccole vibrazioni trasversali di una barra elastica:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t), \tag{3.6}$$

dove $S(x)$ è l'area della sezione trasversale della barra ed $E(x)$ è il modulo di Young nel punto x.

Dalle considerazioni fisiche segue che, per una descrizione univoca delle vibrazioni di una corda o di una barra, è anche necessario assegnare supplementarmente i valori dello spostamento u e della velocità u_t all'istante iniziale (*condizioni iniziali*) ed anche il regime di comportamento alle estremità (*condizioni di frontiera*). Riportiamo alcuni esempi di condizioni di frontiera.

a) Se l'estremità x_0 della corda o della barra si muove conformemente alla legge $\mu(t)$, si ha

$$u|_{x=x_0} = \mu(t).$$

b) Se sull'estremità destra x_0 della corda agisce una forza data $v(t)$, si ha

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \frac{v(t)}{T_0}.$$

Infatti, in questo caso si ha

$$T_0 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0} \simeq T_0 \sin\alpha|_{x=x_0} = v(t).$$

c) Se l'estremità destra x_0 è elasticamente fissata ed α è il coefficiente di rigidità del fissaggio, si ha

$$\left. E\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right|_{x=x_0} = 0,$$

conformemente alla legge di Hooke.

In modo analogo si deduce l'*equazione delle piccole vibrazioni trasversali di una membrana*

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) + F. \tag{3.7}$$

Se la densità ρ è costante, l'equazione di vibrazioni di una membrana assume la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + f, \qquad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \qquad f = \frac{F}{\rho}, \tag{3.8}$$

ed è detta *equazione d'onda bidimensionale.*

L'*equazione d'onda tridimensionale*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + f \tag{3.9}$$

descrive i processi di propagazione del suono in un mezzo omogeneo e delle onde elettromagnetiche in un mezzo omogeneo non conduttore. Soddisfano questa equazione la densità di un gas, la sua pressione ed il potenziale di velocità, nonché le componenti d'intensità dei campi elettrico e magnetico ed i corrispondent potenziali.

Scriveremo le equazioni d'onda (3.5), (3.8) e (3.9) con la singola formula

$$\Box_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta \qquad (\Box \equiv \Box_1),$$

e Δ è l'*operatore di Laplace*:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

2. Equazione di diffusione. I processi di diffusione del calore o di diffusione delle particelle in un mezzo vengono descritti mediante la seguente *equazione di diffusione* generale:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t). \tag{3.11}$$

Deriviamo l'*equazione di diffusione del calore* (o l'equazione del calore). Denotiamo con $u(x,t)$ la temperatura del mezzo nel punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ all'istante t. Considerando isotropo il mezzo, denotiamo con $\rho(x)$, $c(x)$ e $k(x)$ rispettivamente la densità, la capacità termica specifica ed il coefficiente di conducibilità termica del mezzo nel punto x. Indichiamo con $F(x,t)$ l'intensità delle sorgenti termiche nel punto x all'istante t. Calcoliamo il bilancio termico in un volume V arbitrario per un intervallo di tempo $(t, t+\Delta t)$. Denotiamo con S la frontiera di V e sia $\mathbf{n}$ una normale esterna a questa frontiera. Conformemente alla legge di Fourier, attraverso la superficie S del volume V, entra una quantità di calore

$$Q_1 = \int_S k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS\, \Delta t = \int_S (k \operatorname{grad} u, \mathbf{n})\, dS\, \Delta t,$$

che è uguale, secondo il teorema di Gauss (della divergenza), a

$$Q_1 = \int_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dx\, \Delta t.$$

Le sorgenti termiche nel volume V producono una quantità di calore

$$Q_2 = \int_V F(x,t)\, dx\, \Delta t.$$

Visto che la temperatura in V durante l'intervallo di tempo $(t, t+\Delta t)$ cresce di

$$u(x, t+\Delta t) - u(x,t) \simeq \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

ciò richiede una quantità di calore uguale a

$$Q_3 = \int_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, \Delta t.$$

D'altra parte, $Q_3 = Q_1 + Q_2$ il che significa che

$$\int_V \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx\, \Delta t = 0,$$

da cui, in virtù del carattere arbitrario di V, si ottiene l'equazione di diffusione del calore

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x,t). \tag{3.12}$$

Se il mezzo è omogeneo, cioè se c, ρ e k sono costanti, l'equazione (3.12) assume la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \tag{3.13}$$

dove $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ e $f = \frac{F}{c\rho}$. L'equazione (3.13) è detta *equazione di conduzione termica.* Il numero n di variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n$ in quest'equazione può essere arbitrario.

Come nel caso delle equazioni delle variazioni, per una completa descrizione del processo di diffusione del calore, si deve assegnare la distribuzione iniziale della temperatura u nel mezzo (la condizione iniziale) ed il comportamento del mezzo nella frontiera (le condizioni di frontiera).

a) Se sulla frontiera S va mantenuta una data distribuzione di temperatura u_0, si ha allora

$$u|_S = u_0. \tag{3.14}$$

b) Se su S va mantenuto un dato flusso di calore u_1, si ha allora

$$-k \left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = u_1. \tag{3.15}$$

c) Se su S ha luogo lo scambio di calore, conformemente alla legge di Newton, allora si ha

$$k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + h(u - u_0)\Big|_S = 0, \tag{3.16}$$

dove h è il coefficiente di scambio di calore ed u_0 è la temperatura dell'ambiente.

In modo analogo si può dedurre l'*equazione di diffusione* delle particelle. In questo caso al posto della legge di Fourier si deve utilizzare la legge di Nerst per il flusso di particelle attraverso un elemento di superficie ΔS per unità di tempo: $\Delta Q = -D\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Delta S$, dove $D(x)$ è il coefficiente di diffusione ed $u(x,t)$ è la densità di particelle nel punto x all'istante t. L'equazione per la densità u avrà la forma della (3.11) dove ρ denota il coefficiente di porosità, $p = D$ e q caratterizza l'assorbimento del mezzo.

3. Le equazioni di Laplace, Poisson e Helmholtz. Per i processi stazionari $F(x,t) = F(x)$ and $u(x,t) = u(x)$, le equazioni delle vibrazioni (3.2) e di diffusione (3.11) assumono la forma

$$-\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) + qu = F(x). \tag{3.17}$$

Per $p =$ costante e $q = 0$ l'equazione (3.17) è detta *equazione di Poisson*:

$$\Delta u = -f, \qquad f = F/\rho; \tag{3.18}$$

per $f = 0$ l'equazione (3.18) si dice *equazione di Laplace*

$$\Delta u = 0. \tag{3.19}$$

Un processo stazionario è completamente definito se è fissata una delle condizioni di frontiera (3.14)-(3.16).

Supponiamo che, nell'equazione d'onda (3.10), la perturbazione esterna $f(x,t)$ sia periodica di frequenza ω e di ampiezza $a^2 f(x)$:

$$f(x,t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Se cerchiamo perurbazioni periodiche $u(x,t)$ della stessa frequenza e di ampiezza incognita $u(x)$, cioè

$$u(x,t) = u(x)e^{i\omega t},$$

per la funzione$u(x)$ si ottiene l'equazione di stato stazionario

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \tag{3.20}$$

detta *equazione di Helmholtz.*

Problemi al contorno per l'equazione di Helmholtz sorgono dai problemi di diffrazione. Supponiamo, per esempio, che sia data un'onda piana $e^{ik(a\cdot x)}$, $|a| = 1$, $k > 0$, che arrivi dall'infinito e sia sottoposta ad una certa variazione dovuta ad un ostacolo sulla frontiera S di una regione limitata G (Vedi Fig. 3.2). Questo ostacolo può essere assegnato, per esempio, mediante la condizione $u|_S = 0$ o $(\partial u/\partial \mathbf{n})|_S = 0$. L'ostacolo genera un'onda diffusa $v(x)$. Lontano dai centri diffondenti quest'onda sarà prossima ad un'onda sferica divergente

$$v(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)\frac{e^{ik|x|}}{|x|} + o(|x|^{-1}). \tag{3.21}$$

Per questa ragione per $|x| \to \infty$ l'onda $v(x)$ deve soddisfare condizioni della forma

$$v(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ikv(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \tag{3.22}$$

dette *condizioni di radiazione di Sommerfeld.* La perturbazione totale $u(x)$ all'infuori della regione G rappresenta la somma di un'onda piana e di un'onda diffusa:

$$u(x) = e^{ik(\sigma\cdot x)} + v(x). \tag{3.23}$$

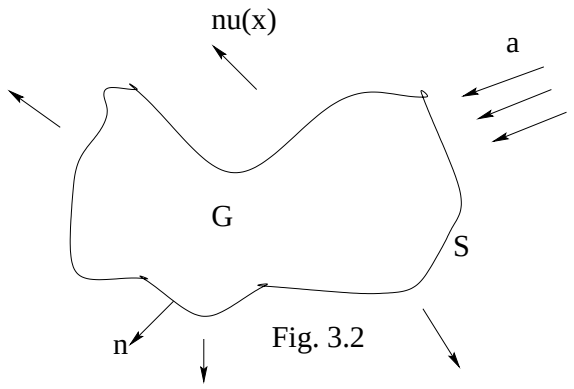

Fig. 3.2

Osserviamo di passaggio che la funzione $f(s)$, $s = x/|x|$, che figura nella (3.21), è detta ampiezza di diffrazione; l'ampiezza di diffrazione è anche una funzione dell'impulso ka.

4. Equazione di trasporto. Se la lunghezza del percorso libero delle particelle è molto più grande delle loro dimensioni, per descrivere il processo di propagazione delle particelle, al posto dell'equazione di diffusione è utilizzata la cosiddetta *equazione del trasporto* (*equazione cinetica*). Scriviamo le equazioni del trasporto sulle seguenti ipotesi:

a) Le velocità di tutte le particelle sono uguali a v.
b) Si possono trascurare le collisioni tra le particelle.
c) Le particelle collidono con i nuclei immobili del mezzo e $\ell(x)$ è la lunghezza media del percorso libero nel punto x.
d) Quando una particella collide con un nucleo immobile del mezzo, ha luogo uno dei seguenti eventi:
   d1) la particella viene diffusa dal nucleo con probabilità $p_1(x)$ rimbalzando da questo nucleo come una pallina elastica;
   d2) con la probabilità $p_2(x)$ la particella viene catturata dal nucleo;
   d3) con probabilità $p_3(x) = 1 - p_1(x) - p_2(x)$ la particella divide il nucleo ed in conseguenza di questa divisione appaiono $\nu(x) \geq 1$ particelle simili (in questo caso si suppone che la particella che ha diviso il nucleo, sparisce).
e) La distribuzione delle particelle rispetto alle direzioni è uniforme (isotropa) sia dopo la diffusione che dopo la divisione.

Denotiamo con $n(x, \mathbf{s}, t)$ la densità delle particelle nel punto x che volano nella direzione $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $|\mathbf{s}| = 1$, all'istante t, e con $F(x, \mathbf{s}, t)$ la densità delle sorgenti. In questo caso la funzione $\psi = vn$, flusso delle particelle, verifica la seguente equazione integro-differenziale:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{s} \cdot \operatorname{grad} \psi) + \alpha\psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(x, \mathbf{s}', t)\, d\mathbf{s}' + F, \tag{3.24}$$

dove $\alpha = 1/\ell$ e $h = p_1 + \nu p_3$. Questa è l'equazione del trasporto a velocità unica per i processi a diffusione isotropa.

Se il processo di trasporto è stazionario, cioè

$$F(x, \mathbf{s}, t) = f(x, \mathbf{s}), \qquad \psi(x, \mathbf{s}, t) = \psi(x, \mathbf{s}),$$

l'equazione del trasporto (3.24) assume la forma

$$(\mathbf{s} \cdot \operatorname{grad} \psi) + \alpha\psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(x, \mathbf{s}')\, d\mathbf{s}' + f. \tag{3.25}$$

Per una descrizione completa del processo di trasporto delle particelle si deve assegnare la distribuzione iniziale del flusso di particelle ψ nel mezzo (condizione iniziale) ed il regime di comportamento silla frontiera di questo mezzo (condizione di frontiera). Per esempio, se la regione G dove ha luogo il processo di trasporto, è convessa, una condizione di frontiera della forma

$$\psi(x, \mathbf{s}, t) = 0, \qquad x \in S, \qquad (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_x) < 0, \tag{3.26}$$

esprime l'assenza di flusso di particelle incidente sulla regione G dall'esterno (Vedi Fig. 3.3).

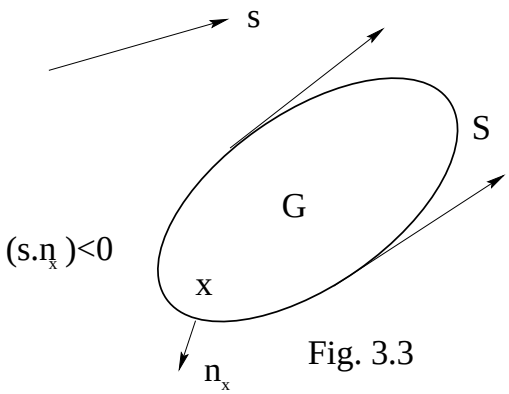

Fig. 3.3

Infine, notiamo che l'equazione del trasporto descrive il trasporto di neutroni in un reattore nucleare, il trasporto di energia elettromagnetica (luce, senza rendersi conto della possibile polarizzazione della luce), il passaggio di quanti γ attraverso una sostanza (senza rendersi conto della possibile polarizzazione del quanto), e il moto della distribuzione di un gas rispetto alla velocità e la direzione (senza rendersi conto dell'interazione tra le particelle del gas; si rende conto soltanto dell'interazione di una particella con l'intero gas). Per descrivere il trasferimento della luce non polarizzata si assume che lo scattering nella direzione di propagazione sia coerente e quello nelle altre direzioni sia incoerente.

5. Equazioni della dinamica dei fluidi. Consideriamo il moto di un fluido perfetto (gas), cioè di un fluido in cui non esiste la viscosità. Siano $\mathbf{V}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$ il vettore velocità del fluido, $\rho(x,t)$ la sua densità, $p(x,t)$ la sua pressione, $f(x,t)$ l'intensità delle sorgenti e $\mathbf{F}(x,t) = (F_1, F_2, F_3)$ l'intensità delle forze di massa. Allora queste quantità soddisfano il seguente sistema (non lineare) di equazioni dette *equazioni di dinamica dei fluidi*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = f, \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \mathbf{F}. \tag{3.28}$$

Le equazioni (3.27) e (3.28) sono rispettivamente dette *equazione di continuità* ed *equazione* (*del moto*) *di Eulero*. Per completare questo sistema di equazioni è necessario assegnare una relazione tra la pressione e la densità:

$$\Phi(p, \rho) = 0, \tag{3.29}$$

la cosiddetta *equazione di stato*. Per esempio, per un liquido incompressibile l'equazione di stato ha la forma $\rho =$ costante, mentre per il moto adiabatico di un gas

$$p\rho^{-\kappa} = \text{costante}, \qquad \kappa = \frac{c_p}{c_v},$$

dove c_p e c_v sono rispettivamente i calori specifici del gas a pressione ed a volume costanti.

In particolare, se un liquido è incompressibile (ρ = costante) ed il suo moto è conservativo (cioè, esiste un potenziale V tale che $V = -\mathrm{grad}\, u$), dall'equazione di continuità (3.27) segue che il potenziale u soddisfa l'equazione di Poisson (3.18).

6. Equazioni di Maxwell. Supponiamo che in un mezzo sia immerso un campo elettromagnetico alternato. Siano $\mathbf{E}(x,t) = (E_1, E_2, E_3)$ l'intensità di campo elettrico, $\mathbf{H}(x,t) = (H_1, H_2, H_3)$ l'intensità di campo magnetico, $\rho(x)$ la densità di cariche elettriche, ε la costante dielettrica del mezzo, μ il coefficiente di permeabilità magnetica del mezzo e $I(x,t) = (I_1, I_2, I_3)$ la corrente di conduzione. Allora queste quantità soddisfano il seguente sistema lineare di equazioni differenziali dette *equazioni di Maxwell*:

$$\mathrm{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho, \qquad \mathrm{div}(\mu\mathbf{H}) = 0, \tag{3.30}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\mathbf{H})}{\partial t}, \tag{3.31}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\mathbf{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{I}, \tag{3.32}$$

dove $e = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec è la velocità della luce nel vuoto.

L'equazione (3.31) esprime la legge di Faraday e l'equazione (3.32) le legge di Ampère.

Riportiamo alcuni casi particolari delle equazioni di Maxwell.

a) $\rho = 0$, ε, μ e λ sono costanti ed $\mathbf{I} = \lambda\mathbf{E}$ (legge di Ohm). Applicando alle equazioni (3.31) e (3.32) l'operatore rot ed utilizzando le equazioni (3.30), si ottiene per le componenti dei vettori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ la cosiddetta *equazione del telegrafista*

$$\Box_a u + \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{3.33}$$

b) $\mathbf{I} = 0$, e ε e μ sono costanti. Introducendo il *potenziale elettromagnetico* a quattro componenti (φ_0, φ), $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, rappresentiamo la soluzione delle equazioni di Maxwell nella forma

$$\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\varphi_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\varphi. \tag{3.34}$$

Le componenti del potenziale elettromagnetico debbono in questo caso verificare le equazioni d'onda

$$\Box_a\varphi_0 = -\frac{4\pi c^2}{\varepsilon^2\mu}\rho, \qquad \Box_a\varphi = 0, \tag{3.35}$$

e la condizione di Lorentz

$$\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} - \mathrm{div}\,\varphi = 0. \tag{3.36}$$

c) Se il processo è stazionario, le equazioni di Maxwell si trasformano nelle *equazioni dell'elettrostatica*

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \tag{3.37}$$

e nelle *equazioni della magnetostatica*

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} I. \tag{3.38}$$

Per ε = costante il potenziale elettrostatico φ_0 soddisfa, in virtù della (3.35), l'equazione di Poisson (3.18) per $f = -(4\pi/\varepsilon)\rho$.

Per trasformare le equazioni di Maxwell abbiamo utilizzato le seguenti formule dell'analisi vettoriale:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \Delta, \ \operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta I, \ \operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0, \ \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0,$$

dove I è la matrice unità.

7. Equazione di Schrödinger. Supponiamo che una particella quantistica di massa m_0 si muova in un campo di forza esterno con potenziale $V(x)$. Denotiamo con $\psi(x,t)$ la funzione d'onda di questa particella, di modo che $|\psi(x,t)|^2\,\Delta x$ sia la probabilità che la particella si trovi nell'intorno $U(x)$ del punto x all'istante t; qui Δx è il volume infinitesimo di $U(x)$. Allora la funzione ψ soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi, \tag{3.39}$$

dove $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$ erg $\cdot$ sec; $h = 2\pi\hbar$ si dice costante di Planck.

Se l'energia E di una particella ha un valore definito, questo stato di particella è detto *stazionario*, grazie al principio d'incertezza di Heisenberg. In questo caso la funzione d'onda $\psi(x,t)$ ha la forma

$$\psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(x),$$

dove la funzione d'onda $\psi(x)$, in virtù della (3.39), verifica l'equazione stazionaria di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V\psi = E\psi. \tag{3.40}$$

Per $V = 0$ (particella libera) l'equazione di Schrödinger (3.40) si trasforma nell'equazione omogenea di Helmholtz (3.20).

Se l'energia E è negativa, si deve richiedere che l'integrale della densità di probabilità $|\psi(x)|^2$ sia uguale ad 1, siccome la probabilità totale che la particella si trovi nello spazio è uguale ad 1. In tal caso possono esistere soltanto soluzioni per opportuni valori di E, spesso solo per un numero finito (numerabile) di valori negativi di E. D'altra parte, se l'energia E è non negativa, l'equazione (3.40) descrive lo scattering della particella all'energia E. In tal caso, come per l'equazione di Helmholtz, si deve

richiedere che siano verificate le condizioni di radiazione di sommerfeld (3.22) all'infinito (per $k = \sqrt{2m_0E}\,/\hbar$). In tal caso la funzione $f(x/|x|)$ nella (3.21) si dice intersezione di scattering ed il suo valore assoluta (tranne un fattore banale) ampiezza.

8. Equazione di Klein-Gordon ed equazione di Dirac. L'equazione di Schrödinger è verificata sotto condizioni non relativistiche, cioè a velocità modesta. Sotto condizioni relativistiche, si distinguono varie equazioni per ciascun valore (necessariamente uno dei numeri 0, 1/2, 1, $\cdots$) dello spin. Per esempio, la funzione d'onda $\varphi(x_0, x)$, dove $x_0 = ct$ (essendo c la velocità della luce nel vuoto) e $x = (x_1, x_2, x_3)$, che descrive una particella relativistica libera di massa m_0, verifica l'*equazione di Klein-Gordon*

$$(\Box + m_0^2)\varphi = 0. \tag{3.41}$$

Per descrivere una particella relativistica libera di massa m_0 a spin 1/2 (elettrone, protone, neutrone, neutrini ed altre) serve una funzione d'onda a quattro componenti (un cosiddetto spinore):

$$\Psi(x_0, x) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4).$$

Questa funzione soddisfa l'*equazione di Dirac*, cioè un sistema di quattro equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\left(i\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x_k} - m_0 I\right)\psi(x_0, x) = 0, \tag{3.42}$$

dove I è la matrice unità di ordine 4 e γ^k sono le matrici di Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tale matrici hanno tutte la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \ k = 1, 2, 3,$$

dove σ^k, $k = 0, 1, 2, 3$, sono matrici di Pauli:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione di Dirac è il risultato della fattorizzazione matriciale dell'equazione di Klein-Gordon:

$$\left(i\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x_k}-m_0I\right)\left(i\sum_{k=0}^{3}\gamma^k\frac{\partial}{\partial x_k}+m_0I\right)=-(\Box+m_0^2)I. \tag{3.43}$$