III. EQUAZIONI INTEGRALI

0 Introduzione

Le equazioni contenenti la funzione incognita sotto il segno dell'integrale sono dette *equazioni integrali*. Molti problemi della fisica matematica possono essere ridotti ad equazioni integrali lineari della forma

$$\int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \tag{0.1}$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x), \tag{0.2}$$

rispetto alla funzione incognita $\varphi(x)$ in una regione $G \subset \mathbb{R}^n$. L'equazione (0.1) si dice *equazione integrale di prima specie*, mentre l'equazione (0.2) si dice *equazione di Fredholm di seconda specie*. Le funzioni note $\mathcal{K}(x,y)$ e $f(x)$ sono dette *nucleo* e *termine noto* dell'equazione integrale; λ è un parametro complesso.

Le equazioni integrali di prima specie non saranno considerate nella nostra esposizione.

L'equazione integrale (0.2) per $f = 0$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy \tag{0.3}$$

si dice equazione integrale di Fredholm *omogenea* di seconda specie corrispondente all'equazione (0.2). Le equazioni integrali di Fredholm di seconda specie

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x,y)\psi(y)\,dy + g(x), \tag{0.4}$$

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_G \mathcal{K}^*(x,y)\psi(y)\,dy, \tag{0.5}$$

dove $\mathcal{K}^*(x,y) = \overline{\mathcal{K}(y,x)}$, sono dette *aggiunte* alle equazioni (0.2) e (0.3), rispettivamente. Il nucleo $\mathcal{K}^*(x,y)$ si dice *nucleo coniugato aggiunto* al nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. Il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ si dice *hermitiano* se $\mathcal{K}^*(x,y) = \mathcal{K}(x,y)$, cioè se $\overline{\mathcal{K}(y,x)} = \mathcal{K}(x,y)$ quasi ovunque. Il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ si dice *reale e simmetrico* se $\mathcal{K}(x,y)$ è reale e $\mathcal{K}(y,x) = \mathcal{K}(x,y)$ quasi ovunque. Ovviamente un nucleo reale e simmetrico è hermitiano.

Scriveremo le equazioni (0.2), (0.3), (0.4) e (0.5) in forma contratta, utilizzando la notazione d'operatore:

$$\begin{cases} \varphi = \lambda K\varphi + f, & \varphi = \lambda K\varphi, \\ \psi = \overline{\lambda} K^*\psi + g, & \psi = \overline{\lambda} K^*\psi, \end{cases}$$

dove gli operatori integrali K e K^* sono determinati dai nuclei $\mathcal{K}(x,y)$ e $\mathcal{K}^*(x,y)$, rispettivamente:

$$(Kf)(x) = \int_G \mathcal{K}(x,y) f(y)\, dy, \qquad (K^*f)(x) = \int_G \mathcal{K}^*(x,y) f(y)\, dy.$$

Tra poco metteremo opportune condizioni sul dominio G e sul nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ affinché gli operatori lineari K e K^* siano limitati in un opportuno spazio di Banach (o di Hilbert) di funzioni $f(x)$ definite in G. In particolare, verranno considerati gli spazi $L_1(G)$, $L_2(G)$ e $C(\overline{G})$.

1 Metodo delle Approssimazioni Successive

a. Equazioni integrali con nucleo continuo. Supponiamo che nell'equazione integrale (0.2) la regione G sia limitata in $\mathbb{R}^n$, la funzione f sia continua nella regione chiusa $\overline{G}$ (oppure misurable e appartenente allo spazio $L_1(G)$ o $L_2(G)$) ed il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ sia continuo su $\overline{G} \times \overline{G}$ (diremo *continui* questi nuclei).

Ricordiamo le definizioni delle norme negli spazi di Banach $L_1(G)$, $L_2(G)$, $L_\infty(G)$ e $C(\overline{G})$ e del prodotto scalare in $L_2(G)$:

$$\begin{cases} \|f\|_1 = \int_G |f(x)|\, dx, & f \in L_1(G), \\ (f,g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}\, dx, & f,g \in L_2(G), \\ \|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_G |f(x)|^2\, dx}, & f \in L_2(G), \\ \|f\|_\infty = \underset{[-1mm]x \in G}{\operatorname{ess\,sup}} |f(x)|, & f \in L_\infty(G), \\ \|f\|_C = \|f\|_\infty = \max\limits_{x \in \overline{G}} |f(x)|, & f \in C(\overline{G}). \end{cases}$$

Lemma 1.1 *L'operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ trasferisce $L_1(G)$ in $C(\overline{G})$ (e, di conseguenza, $L_2(G)$ in $C(\overline{G})$, $L_\infty(G)$ in $C(\overline{G})$, $C(\overline{G})$ in $C(\overline{G})$, $L_1(G)$ in $L_1(G)$, $L_2(G)$ in $L_2(G)$, e $L_\infty(G)$ in $C(\overline{G})$). Dunque, K è limitato come operatore lineare tra questi spazi, ed inoltre*

$$\begin{cases} \|Kf\|_C \le M\|f\|_1, & f \in L_1(G), \\ \|Kf\|_C \le M\sqrt{m(G)}\|f\|_2, & f \in L_2(G), \\ \|Kf\|_C \le Mm(G)\|f\|_\infty, & f \in L_\infty(G), \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\|Kf\|_C \le Mm(G)\|f\|_C, \qquad f \in C(\overline{G}), \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \|Kf\|_1 \le M m(G)\|f\|_1, & f \in L_1(G), \\ \|Kf\|_2 \le M m(G)\|f\|_2, & f \in L_2(G), \\ \|Kf\|_\infty \le M m(G)\|f\|_\infty, & f \in L_\infty(G), \end{cases} \tag{1.3}$$

dove $M = \max_{x,y \in \overline{G}\times\overline{G}} |\mathcal{K}(x,y)|$ *e* $m(G)$ *è la misura di* G.

Dimostrazione. Siccome $\overline{G} \times \overline{G}$ è compatto, il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è uniformemente continuo in $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$. Quindi, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|\mathcal{K}(x_1,y_1) - \mathcal{K}(x_2,y_2)| < \varepsilon$ se $\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| < \delta$. Di conseguenza, se $f \in L_1(G)$, per $|x_1 - x_2| < \delta$ si ha la stima

$$|(Kf)(x_1) - (Kf)(x_2)| \le \int_G |\mathcal{K}(x_1,y) - \mathcal{K}(x_2,y)|\,|f(y)|dy < \varepsilon \int_G |f(y)|dy = \varepsilon \|f\|_1,$$

e quindi K trasferisce $L_1(G)$ in $C(\overline{G})$.

Utilizzando la disuguaglianza di Schwartz si trova

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)|\,dx \le \|f\|_2 \sqrt{\int_G dx} = \sqrt{m(G)}\,\|f\|_2, \qquad f \in L_2(G).$$

Ancora più facilmente si trova la stima

$$\|f\|_2^2 = \int_G |f(x)|^2\,dx \le \|f\|_\infty^2 \int_G dx = m(G)\|f\|_\infty^2, \qquad f \in L_\infty(G),$$

implicando $\|f\|_2 \le \sqrt{m(G)}\,\|f\|_\infty$ e $\|f\|_1 \le m(G)\|f\|_\infty$ per $f \in L_\infty(G)$. Inoltre, $C(\overline{G})$ è contenuto in $L_\infty(G)$, mentre $\|f\|_C = \|f\|_\infty$ per $f \in C(\overline{G})$. Di conseguenza, $C(\overline{G})$ è contenuto in $L_\infty(G)$, $L_\infty(G)$ in $L_2(G)$, e $L_2(G)$ in $L_1(G)$, dove i rispettivi operatori di immersione sono limitati di norma limitata superiormente da 1, $\sqrt{m(G)}$ e $\sqrt{m(G)}$.

Infine si trova la stima

$$\|Kf\|_C \le \int_G |\mathcal{K}(x,y)|\,|f(y)|\,dy \le M \int_G |f(y)|\,dy = M\|f\|_1, \qquad f \in L_1(G).$$

Abbiamo dimostrato il lemma. □

Lemma 1.2 *Sia* $\mathcal{K}(x,y)$ *un nucleo continuo su* $\overline{G} \times \overline{G}$. *Se* $(Kf)(x) = 0$ *per ogni* $x \in \overline{G}$ *e per ogni* $f \in L_1(G)$, *allora* $\mathcal{K}(x,y) = 0$ *per ogni* $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$.

Dimostrazione. All'assurdo. Sia $\mathcal{K}(x_0,y_0) > 0$ per qualche $(x_0,y_0) \in \overline{G}\times\overline{G}$. Dalla continuità del nucleo segue l'esistenza di un opportuno $\varepsilon > 0$ tale che $\mathcal{K}(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$ per cui $\|(x - x_0, y - y_0)\| < \varepsilon$. Adesso consideriamo la funzione

$$f(y) = \begin{cases} 1 - (|y - y_0|/\varepsilon), & |y - y_0| \le \varepsilon, \\ 0, & |y - y_0| \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Si ha $f \in L_1(G)$. Risulta facilmente che

$$(Kf)(x_0) = \int_G \mathcal{K}(x_0, y) f(y)\, dy > 0.$$

Contraddizione. □

Nello stesso modo segue che $\mathcal{K}(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in \overline{G} \times \overline{G}$ se $(Kf, g) = 0$ per ogni $f, g \in L_2(G)$.

Cerchiamo la soluzione dell'equazione (0.2) mediante il metodo delle approssimazioni successive, ponendo $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$,

$$\varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y)\varphi^{(p-1)}(y)\, dy + f(x) \equiv \lambda K\varphi^{(p-1)} + f, \qquad p = 1, 2, \cdots . \tag{1.4}$$

Dimostriamo che

$$\varphi^{(p)} = \sum_{j=0}^{p} \lambda^j K^j f, \qquad p = 0, 1, 2, \cdots , \tag{1.5}$$

dove K^j denotano le potenze j-esime dell'operatore K. Infatti, per $p = 0$, la formula (1.5) è valida: $\varphi^{(0)} = f$. Supponendo che questa formula sia valida per p e sostituendo nella successione di ricorrenza (1.4) p con $p + 1$, si ottiene la formula (1.5) per $p + 1$:

$$\varphi^{(p+1)} = \lambda K\varphi^{(p)} + f = \lambda K \sum_{h=0}^{p} \lambda^h K^h f + f = f + \sum_{j=0}^{p} \lambda^{j+1} K^{j+1} f = \sum_{j=0}^{p+1} \lambda^j K^j f.$$

Dunque, la formula (1.5) è valida per tutti i valori di p.

Le funzioni $(K^p f)(x)$, $p = 0, 1, 2, \cdots$, sono dette *iterazioni* della funzione f.

Secondo il Lemma 1.1, le iterazioni di $f \in C(\overline{G})$ sono continue su $\overline{G}$ e, in virtù della (1.2), soddisfano la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \|K^p f\|_C &= \|K(K^{p-1} f)\|_C \le Mm(G)\|K^{p-1} f\|_C \\ &\le (Mm(G))^2 \|K^{p-2} f\|_C \le \cdots \le (Mm(G))^p \|f\|_C, \end{aligned}$$

cioè

$$\|K^p f\|_C \le (Mm(G))^p \|f\|_C, \qquad p = 0, 1, 2, \cdots . \tag{1.6}$$

Da questa disuguaglianza segue che la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (K^j f)(x), \qquad x \in \overline{G}, \tag{1.7}$$

detta *serie di Neumann*, è maggiorata dalla serie numerica

$$\|f\|_C \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j (Mm(G))^j = \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda| Mm(G)}, \tag{1.8}$$

che converge nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$. Perciò, per questi valori di λ, la serie (1.7) è uniformemente (infatti, totalmente) convergente in $x \in \overline{G}$, definendo così una funzione $\varphi(x)$ continua su $\overline{G}$. Ciò vuol dire, in virtù della (1.5), che le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}(x)$ per $p \to \infty$ tendono in modo uniforme alla funzione $\varphi(x)$:

$$\lim_{p\to\infty} \max_{x\in\overline{G}} |\varphi^{(p)}(x) - \varphi(x)| = 0, \tag{1.9}$$

ed, inoltre, in virtù della (1.8), è valida la disuguaglianza

$$\|\varphi\|_C \le \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda| Mm(G)}. \tag{1.10}$$

Dimostriamo che la funzione $\varphi(x)$ verifica l'equazione integrale (0.2). Infatti, passando al limite per $p \to \infty$ nella relazione di ricorrenza (1.4) ed utilizzando la convergenza uniforme della successione $\varphi^{(p)}(x)$ a $\varphi(x)$ su $\overline{G}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim_{p\to\infty} \varphi^{(p)}(x) \\ &= \lambda \int_G \mathcal{K}(x,y) \lim_{p\to\infty} \varphi^{(p-1)}(y)\, dy + f(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\, dy + f(x).\end{aligned}$$

Dimostriamo l'unicità della soluzione dell'equazione (0.2) nella classe $L_1(G)$ (oppure $L_2(G)$, $L_\infty(G)$, $C(\overline{G})$) se $|\lambda| < 1/Mm(G)$. Per ciò è sufficiente dimostrare che l'equazione omogenea (0.3) ha, in $L_1(G)$, una sola soluzione nulla. Infatti, se $\varphi_0 \in L_1(G)$ è una soluzione dell'equazione (0.3), cioè $\varphi_0 = \lambda K \varphi_0$, si ha, secondo il Lemma 1.1,

$$\|\varphi_0\|_1 = |\lambda| \|K\varphi_0\|_1 \le |\lambda| Mm(G) \|\varphi_0\|_1,$$

da cui, grazie alla disuguaglianza $|\lambda| Mm(G) < 1$, deriva $\|\varphi_0\|_1 = 0$, cioè $\varphi_0 = 0$, quanto si doveva dimostrare.

Riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente teorema.

Teorema 1.3 *Ogni equazione integrale di Fredholm* (0.2) *con nucleo continuo* $\mathcal{K}(x,y)$*, per* $|\lambda| < 1/Mm(G)$*, ha un'unica soluzione* φ *nella classe* $C(\overline{G})$ *per un termine noto* $f \in C(\overline{G})$ *qualsiasi. Questa soluzione è rappresentata nella forma della serie di Neumann* (1.7) *uniformemente convergente in* $x \in \overline{G}$ *e soddisfa la disuguaglianza* (1.10)*. In altre parole, nel disco* $|\lambda| < 1/Mm(G)$ *esiste ed è limitato l'operatore inverso* $(I - \lambda K)^{-1}$*.*

Nella stessa maniera si dimostra il seguente per $p = 1, 2, +\infty$: Ogni equazione integrale di Fredholm (0.2) con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$, per $|\lambda| < 1/Mm(G)$, ha un'unica soluzione φ nella classe $L_p(G)$ per un termine noto $f \in L_p(G)$ qualsiasi. Questa soluzione è rappresentata nella forma della serie di Neumann (1.7) convergente nella norma di $L_p(G)$ e soddisfa la disuguaglianza $\|\varphi\|_p \le \|f\|_p/(1 - |\lambda| Mm(G))$. In altre parole, nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$ esiste ed è limitato nello spazio di Banach $L_p(G)$ l'operatore inverso $(I - \lambda K)^{-1}$.

Osserviamo infine che il metodo delle approssimazioni successive può essere utilizzato per una risoluzione approssimata dell'equazione integrale (0.2) per $|\lambda|$ sufficientemente piccole.

b. Nuclei iterati. Risolvente. Stabiliamo preliminarmente che è valida la seguente uguaglianza:

$$(Kf, g) = (f, K^*g), \qquad f, g \in L_2(G). \tag{1.11}$$

Infatti, se f e g appartengono a $L_2(G)$, conformemente al Lemma 1.1, anche Kf e K^*g appartengono a $L_2(G)$ e quindi si ha

$$\begin{aligned}(Kf, g) &= \int_G (Kf)(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_G \left[\int_G \mathcal{K}(x,y)f(y)\,dy\right]\overline{g(x)}\,dx \\ &= \int_G f(y)\left[\int_G \mathcal{K}(x,y)\overline{g(x)}\,dx\right]dy = \int_G f(y)\left[\overline{\int_G \mathcal{K}^*(y,x)g(x)\,dx}\right]dy \\ &= \int_G f(x)\overline{(K^*g)(x)}\,dx = (f, K^*g).\end{aligned}$$

Lemma 1.4 *Se K_1 e K_2 sono operatori integrali con nuclei continui $\mathcal{K}_1(x,y)$ e $\mathcal{K}_2(x,y)$, rispettivamente, l'operatore $K_3 = K_2K_1$ è un operatore integrale con nucleo continuo*

$$\mathcal{K}_3(x,y) = \int_G \mathcal{K}_2(x,y')\mathcal{K}_1(y',y)\,dy'. \tag{1.12}$$

In questo caso è valida la seguente formula:

$$(K_2K_1)^* = K_1^*K_2^*. \tag{1.13}$$

Dimostrazione. Per tutte le $f \in L_2(G)$ abbiamo

$$\begin{aligned}(K_3f)(x) = (K_2K_1f)(x) &= \int_G \mathcal{K}_2(x,y')\int_G \mathcal{K}_1(y',y)f(y)\,dy\,dy' \\ &= \int_G\int_G [\mathcal{K}_2(x,y')\mathcal{K}_1(y',y)\,dy']\,f(y)\,dy,\end{aligned}$$

da cui segue la formula (1.12). È evidente che il nucleo $\mathcal{K}_3(x,y)$ è continuo per $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, per $i = 1, 2$ esiste $\delta_i > 0$ tale che $|\mathcal{K}_i(x_1,y_1) - \mathcal{K}_i(x_2,y_2)| < \varepsilon/([M_1 + M_2]m(G))$ se $\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| < \delta_i$. Quindi, se $\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| < \delta = \min(\delta_1,\delta_2)$, risulta

$$\begin{aligned}&|\mathcal{K}_3(x_1,y_1) - \mathcal{K}_3(x_2,y_2)| \le \int_G |\mathcal{K}_2(x_1,y') - \mathcal{K}_2(x_2,y')||\mathcal{K}_1(y',y_1)|\,dy' \\ &+ \int_G |\mathcal{K}_2(x_2,y')||\mathcal{K}_1(y',y_1) - \mathcal{K}_1(y',y_2)|\,dy' < \frac{[M_2m(G) + M_1m(G)]\varepsilon}{[M_1+M_2]m(G)} = \varepsilon,\end{aligned}$$

implicando la continuità uniforme di $\mathcal{K}_3(x,y)$.

Prendendo in considerazione l'uguaglianza (1.11), per tutte le f e g appartenenti a $L_2(G)$ si ottiene

$$(f, K_3^* g) = (K_3 f, g) = (K_2 K_1 f, g) = (K_1 f, K_2^* g) = (f, K_1^* K_2^* g), \ f, g \in L_2(G),$$

cioè $(f, K_3^* g - K_1^* K_2^* g) = 0$ per tutte le $f, g \in L_2(G)$, e, quindi, $K_3^* = K_1^* K_2^*$, il che equivale all'uguaglianza (1.13). Il lemma è dimostrato. □

Dal Lemma 1.4 appena dimostrato segue che gli operatori $K^p = K(K^{p-1}) = (K^{p-1})K$, $p = 2, 3, \cdots$, sono operatori integrali ed i loro nuclei $\mathcal{K}_p(x, y)$ sono continui e soddisfano le relazioni di ricorrenza $\mathcal{K}_1(x, y) = \mathcal{K}(x, y)$,

$$\mathcal{K}_p(x, y) = \int_G \mathcal{K}(x, y')\mathcal{K}_{p-1}(y', y)\, dy' = \int_G \mathcal{K}_{p-1}(x, y')\mathcal{K}(y', y)\, dy'. \qquad (1.14)$$

I nuclei $\mathcal{K}_p(x, y)$ sono detti *nuclei iterati* del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.

Dalle relazioni di ricorrenza (1.14) segue che i nuclei iterati soddisfano la disuguaglianza

$$|\mathcal{K}_p(x, y)| \le M^p m(G)^{p-1}, \qquad p = 1, 2, \cdots . \qquad (1.15)$$

Dalla (1.15) segue che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y), \qquad (x, y) \in \overline{G} \times \overline{G}, \qquad (1.16)$$

è maggiorata mediante la serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^{k+1} m(G)^k,$$

convergente nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$. Perciò la serie (1.16) è uniformemente (anche totalmente) convergente in $(x, y, \lambda) \in \overline{G} \times \overline{G} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| < (1/Mm(G)) - \varepsilon\}$, per $\varepsilon > 0$ qualsiasi. Come conseguenza, la sua somma è continua in $\overline{G} \times \overline{G} \times \{z \in \mathbb{C} : |z| < (1/Mm(G))\}$ ed analitica in λ nel disco $|\lambda| < 1/Mm(G)$ [Vedi il Teorema A.2]. Indichiamo la somma della serie (1.16) con $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$:

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{K}_{k+1}(x, y).$$

La funzione $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ è detta *risolvente* del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$.

Teorema 1.5 *La soluzione φ dell'equazione integrale* (0.2) *è unica nella classe $C(\overline{G})$ per $|\lambda| < 1/Mm(G)$ e per qualunque $f \in C(\overline{G})$ è rappresentata con il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ mediante l'equazione*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G \mathcal{R}(x, y; \lambda) f(y)\, dy, \qquad (1.17)$$

in altre parole, è valida la seguente equazione operatoriale:

$$(I-\lambda K)^{-1}=I+\lambda R(\lambda),\qquad |\lambda|<(1/Mm(G)),\tag{1.18}$$

dove $R(\lambda)$ è un operatore integrale con nucleo $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$.

Dimostrazione. Conformemente al Teorema 1.3, la soluzione φ dell'equazione (0.2) è unica nella classe $C(\overline{G})$ per $|\lambda|<1/Mm(G)$ e per qualunque $f\in C(\overline{G})$ è rappresentata nella forma di una serie di Neumann convergente (1.7). Sostituendo in questa serie le espressioni di iterazione K^kf in termini dei nuclei iterati $\mathcal{K}_k(x,y)$ ed utilizzando la convergenza uniforme della serie (1.16) per il risolvente $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$, si ottiene la formula (1.17):

$$\varphi(x)=\int_G\left[\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\mathcal{K}_{k+1}(x,y)\right]f(y)\,dy+f(x)=\lambda\int_G\mathcal{R}(x,y;\lambda)f(y)\,dy+f(x).$$

Il teorema è dimostrato. □

Dimostriamo che i nuclei iterati $(K^*)_p(x,y)$ ed il risolvente $\mathcal{R}_*(x,y;\lambda)$ del nucleo coniugato $\mathcal{K}^*(x,y)$ sono espressi in termini dei nuclei iterati $\mathcal{K}_p(x,y)$ e del risolvente del nucleo iniziale $\mathcal{K}(x,y)$ come segue:

$$(\mathcal{K}^*)_p(x,y)=\mathcal{K}_p^*(x,y),\qquad p=1,2,\cdots;\tag{1.19}$$

$$\mathcal{R}_*(x,y;\lambda)=\overline{\mathcal{R}(y,x;\overline{\lambda})},\qquad |\lambda|<(1/Mm(G)).\tag{1.20}$$

L'uguaglianza (1.19) segue dalla formula (1.13), secondo la quale

$$(\mathcal{K}^*)_p(x,y)=(\mathcal{K}_p)^*(x,y),\qquad p=1,2,\cdots.$$

Visto che $|\mathcal{K}^*(x,y)|=|\mathcal{K}(y,x)|\le M$, si conclude che, da quanto abbiamo dimostrato, la serie (1.16) per il risolvente $\mathcal{R}_*(x,y;\lambda)$ del nucleo $\mathcal{K}^*(x,y)$ converge per $(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}$ e $|\lambda|<1/Mm(G)$. Da ciò, utilizzando l'uguaglianza (1.19), si ottiene la formula (1.20):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_*(x,y;\lambda)&=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k(\mathcal{K}^*)_{k+1}(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\mathcal{K}_{k+1}^*(x,y)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\overline{\mathcal{K}_{k+1}(y,x)}=\overline{\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\lambda}^k\mathcal{K}_{k+1}(y,x)}=\overline{\mathcal{R}(y,x;\overline{\lambda})}.\end{aligned}$$

Dalla (1.20) si ottiene

$$\mathcal{R}_*(x,y;\lambda)=\overline{\mathcal{R}(y,x;\overline{\lambda})}=\mathcal{R}^*(x,y;\lambda),\qquad |\lambda|<1/Mm(G),$$

e, di conseguenza, in virtù della (1.18), è valida la formula

$$(I-\lambda K^*)^{-1}=I+\lambda R(\overline{\lambda})^*,\qquad |\lambda|<1/Mm(G).\tag{1.21}$$

Si può dimostrare che il risolvente $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$ di un nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ ammette un prolungamento meromorfo in tutto il piano della variabile complessa λ ed inoltre i suoi poli sono i numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. Questa proposizione sarà dimostrata sotto per i nuclei degeneri ed hermitiani.

c. Equazioni integrali di Volterra. Supponiamo che $n=1$, la regione G sia l'intervallo limtato $(0,a)$ ed il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ si annulli nel triangolo $0<x<y<a$. Questo nucleo si dice *nucleo di Volterra*. Le equazioni (0.1) e (0.2) con nucleo di Volterra assumono la forma

$$\int_0^x \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), \qquad \varphi(x) = \lambda\int_0^x \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{1.22}$$

e sono dette *equazioni integrali di Volterra* di prima e di seconda specie, rispettivamente. Ci ristringiamo alle equazioni di seconda specie.

Supponiamo che nell'equazione (1.22) di seconda specie sia $f\in C([0,a])$ e che il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ sia continuo nel triangolo chiuso $0\le y\le x\le a$. In questo caso $|\mathcal{K}(x,y)|\le M$ per qualche costante M e l'operatore integrale

$$(Kf)(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x,y)f(y)\,dy$$

trasferisce $C([0,a])$ in $C([0,a])$.

Come per l'equazione di Fredholm, definiamo le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}$ conformemente alla seguente formula:

$$\varphi^{(0)} = f, \qquad \varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^{p}\lambda^k K^k f = \lambda K\varphi^{(p-1)} + f, \qquad p=1,2,\cdots. \tag{1.23}$$

Le iterazioni $K^p f$ appartengono a $C([0,a])$ e soddisfano la stima

$$|(K^p f)(x)| \le \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \qquad x\in[0,a], \qquad p=0,1,\cdots. \tag{1.24}$$

Dimostriamo la stima (1.24) per induzione rispetto a p. Per $p=0$, la stima (1.24) è valida. Supponendola valida per $p-1$, dimostriamo la sua validità per p:

$$\begin{aligned}|(K^p f)(x)| = \big|(K(K^{p-1}f))(x)\big| &\le \int_0^x |\mathcal{K}(x,y)||(K^{p-1}f)(y)|\,dy\\ &\le M\|f\|_C M^{p-1}\int_0^x \frac{y^{p-1}}{(p-1)!}\,dy = \|f\|_C\frac{(Mx)^p}{p!}.\end{aligned}$$

Dalla stima (1.24) segue che la serie di Neumann (1.7) è maggiorata su $[0,a]$ mediante la serie numerica convergente

$$\|f\|_C\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda|^k\frac{(Ma)^k}{k!} = \|f\|_C e^{|\lambda|Ma} \tag{1.25}$$

e per questa ragione è uniformente (infatti, totalmente) convergente in $x \in [0,a]$ per λ qualsiasi, definendo una funzione continua $\varphi(x)$. Dunque, in virtù della (1.23), le approssimazioni successive $\varphi^{(p)}$ per $p \to \infty$ tendono uniformemente alla funzione φ:

$$\lim_{p\to\infty} \max_{x\in[0,a]} |\varphi^{(p)}(x) - \varphi(x)| = 0, \qquad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x). \tag{1.26}$$

Qui, in virtù della (1.25), è valida la disuguaglianza

$$\|\varphi\|_C \le \|f\|_C e^{|\lambda| M a}. \tag{1.27}$$

Passando al limite, per $p \to \infty$, nella relazione di ricorrenza (1.23) ed utilizzando la convergenza uniforme della successione $\varphi^{(p)}$ a φ su $[0,a]$, concludiamo che la funzione costruita $\varphi(x)$ soddisfa l'equazione integrale (1.22).

Dimostriamo che la soluzione dell'equazione (1.22) è unica in $C([0,a])$ per λ qualsiasi. Per ciò è sufficiente dimostrare che la corrispondente equazione omogenea ha in questa classe una sola soluzione nulla. Infatti, se φ_0 è una soluzione dell'equazione omogenea (1.22), cioè $\varphi_0 = \lambda K \varphi_0$, si ha

$$\varphi_0 = \lambda K(\lambda K \varphi_0) = \lambda^2 K^2 \varphi_0 = \cdots = \lambda^p K^p \varphi_0, \qquad p = 1, 2, \cdots .$$

Applicando a queste uguaglianze la (1.24), cioè

$$|\varphi_0(x)| = |\lambda^p K^p \varphi_0| \le |\lambda|^p \|\varphi_0\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \qquad p = 1, 2, \cdots ,$$

e facendo tendere p a ∞, si ottiene $\varphi_0(x) = 0$, $x \in [0,a]$, quanto si voleva dimostrare.

Formuliamo i risultati ottenuti nella forma del seguente

Teorema 1.6 *Ogni equazione integrale di Volterra* (1.22) *con nucleo continuo* $\mathcal{K}(x,y)$ *nel triangolo* $\{(x,y) : 0 \le y \le x \le a\}$ *per* λ *qualsiasi ha un'unica soluzione* φ *nella classe* $C([0,a])$ *per qualunque termine noto* $f \in C([0,a])$. *Questa soluzione è data dalla serie di Neumann uniformemente convergente* (1.26) *soddisfa la disuguaglianza* (1.27).

Corollario 1.7 *Un nucleo di Volterra continuo non ha numeri caratteristici.*

Esercizi.

1. Dimostrare che il risolvente $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$ di un nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ soddisfa l'equazione di Fredholm

$$\mathcal{R}(x,y;\lambda) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x,y')\mathcal{R}(y',y;\lambda)\, dy' + \mathcal{K}(x,y)$$

per $|\lambda| < 1/Mm(G)$.

2. Calcolare esplicitamente il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ dell'equazione di Volterra

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \varphi(y)\, dy + f(x), \qquad 0 \le x \le a.$$

Si consiglia partire dalle ipotesi $\varphi \in C([0, a])$ e $f \in C^1([0, a])$ e di convertire l'equazione integrale in un'equazione differenziale con condizione iniziale $\varphi(0) = f(0)$. Risolvendo quell'equazione tramite il metodo della variazione dei parametri, si rimuovi f' dall'espressione per φ tramite un'integrazione per parti. Infine si estenda l'espressione per φ a tutte le funzioni $f \in C([0, a])$.

2 Teoremi di Fredholm

In questo paragrafo saranno dimostrati i teoremi di risolvibilità di Fredholm per l'equazione di Fredholm

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \tag{2.1}$$

con nucleo continuo $\mathcal{K}(x, y)$ e per la sua equazione aggiunta

$$\psi = \overline{\lambda} K^*\psi + g. \tag{2.2}$$

a. Equazioni integrali con nucleo degenere. Il nucleo

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\overline{g_i(y)}, \tag{2.3}$$

dove f_i e g_i appartengono a $C(\overline{G})$, si dice *nucleo degenere*.

Senza perdere di generalità possiamo assumere i sistemi di funzioni $\{f_i\}_{i=1}^N$ e $\{g_i\}_{i=1}^N$ linearmente indipendenti. Infatti, se non è così, si ha allora, per esempio,

$$f_N(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_{N-1} f_{N-1}(x)$$

ed il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$, in virtù della (2.3), assume la forma

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i(x)\overline{g_i(y)} + \left(\sum_{i=1}^{N-1} f_i(x) \right) \overline{g_N(y)}.$$

Procedendo in modo simile, dopo un numero finito di passi, arriveremo ad una situazione nella quale i sistemi di funzioni $\{f_i\}$ e $\{g_i\}$, nella rappresentazione (2.3), risulteranno linearmente indipendenti.

Consideriamo l'equazione integrale di Fredholm con nucleo degenere (0.2)

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G \overline{g_i(y)}\varphi(y)\, dy + f(x) \tag{2.4}$$

e l'equazione aggiunta

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} g_i(x) \int_G \overline{f_i(y)} \psi(y)\, dy + g(x). \tag{2.5}$$

Cercheremo le soluzioni φ e ψ delle equazioni integrali (2.3) e (2.5) nella classe $C(\overline{G})$.

Dimostriamo che queste equazioni si riducono a sistemi di equazioni algebriche lineari e possono, quindi, essere studiate e risolte mediante i metodi noti di algebra lineare.

Riscriviamo l'equazione (2.4) nella forma

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x) + f(x), \tag{2.6}$$

dove

$$c_i = \int_G \varphi(y) \overline{g_i(y)}\, dy = (\varphi, g_i) \tag{2.7}$$

sono numeri incogniti. Molteplicando l'uguaglianza (2.6) per $\overline{g_k(x)}$, integrando su G ed utilizzando la (2.7), si ottiene il seguente sistema di equazioni algebriche lineari per le incognite c_i:

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i \int_G \overline{g_k(x)} f_i(x)\, dx + \int_G \overline{g_k(x)} f(x)\, dx. \tag{2.8}$$

Introducendo le notazioni

$$\alpha_{ki} = \int_G \overline{g_k(x)} f_i(x)\, dx, \qquad a_k = \int_G f(x) \overline{g_k(x)}\, dx = (f, g_k), \tag{2.9}$$

riscriviamo il sistema (2.8) come segue:

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ki} c_i + a_k, \qquad k = 1, 2, \cdots, N.$$

Introducendo la matrice A ed i vettori $\boldsymbol{c}$ ed $\boldsymbol{a}$:

$$A = (\alpha_{ki}), \qquad \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_N), \qquad \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_N), \tag{2.10}$$

rappresentiamo il sistema (2.10) nella forma matriciale

$$\boldsymbol{c} = \lambda A \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}. \tag{2.11}$$

Dimostriamo che l'equazione (2.7) e l'equazione algebrica (2.11) sono equivalenti. Infatti, se $\varphi \in C(\overline{G})$ è la soluzione dell'equazione (2.4), allora, come abbiamo appena dimostrato, i numeri $c_i = (\varphi, g_i)$, $i = 1, 2, \cdots, N$, soddisfano il sistema (2.10). Inversamente, se i numeri c_i, $i = 1, 2, \cdots, N$, soddisfano il

sistema (2.10), la funzione $\varphi(x)$ costruita conformemente alla formula (2.6), è continua su $\overline{G}$ e, in virtù della (2.9), soddisfa l'equazione (2.4)

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) - \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G \overline{g_i(y)} \varphi(y)\, dy - f(x) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x) + f(x) - \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G \overline{g_i(y)} \left[\lambda \sum_{k=1}^{N} c_k f_k(y) + f(y) \right] dy - f(x) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \left(c_i - \lambda \sum_{k=1}^{N} c_k \alpha_{ik} - a_i \right) = 0.
\end{aligned}$$

Denotiamo con $D(\lambda)$ il determinante di sistema (2.11):

$$D(\lambda) = \det(I - \lambda A), \tag{2.12}$$

e con $M_{ki}(\lambda)$ i cofattori della matrice $I - \lambda A$. È chiaro che $D(\lambda)$ e $M_{ki}(\lambda)$ sono polinomi in λ, ed inoltre $D(\lambda) \not\equiv 0$, visto che $D(0) = \det I = 1$.

Supponiamo che il numero (complesso) λ sia tale che $D(\lambda) \neq 0$. Secondo il teorema di Cramer, la soluzione del sistema algebrico (2.11) è unica ed è data dalla seguente formula:

$$c_k = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{N} M_{ki}(\lambda) a_i, \qquad k = 1, 2, \cdots, N. \tag{2.13}$$

Sostituendo la soluzione ottenuta (2.13) nella formula (2.6) e ricordando la definizione dei numeri a_k, si ottiene la soluzione dell'equazione integrale (2.4) per $D(\lambda) \neq 0$ nella forma

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^{N} M_{ik}(\lambda) f_i(x) \int_G \overline{g_k(y)} f(y)\, dy + f(x). \tag{2.14}$$

D'altra parte, conformemente al Teorema 1.5, per λ sufficientemente piccoli (ed allora $D(\lambda) \neq 0$), questa soluzione è espressa in termini del risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ mediante la formula (1.17). Di conseguenza,

$$\mathcal{R}(x, y; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^{N} M_{ik}(\lambda) f_i(x) \overline{g_k(y)}. \tag{2.15}$$

Dunque, il risolvente $\mathcal{R}(x, y; \lambda)$ di un nucleo degenere è una funzione razionale di λ e, quindi, ammette un prolungamento meromorfo su tutto il piano della variabile complessa λ.

b. Teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo degenere. Nel sottoparagrafo precedente abbiamo costruito in forma esplicita la soluzione di un'equazione integrale con nucleo degenere. Continuiamo lo studio di queste equazioni e stabiliamo le condizioni della loro risolubilità.

Come l'equazione (2.4), riduciamo l'equazione aggiunta (2.5) ad un sistema di equazioni algebriche lineari. Abbiamo

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i g_i(x) + g(x), \tag{2.16}$$

dove $d_i = (\psi, f_i)$ sono numeri incogniti. Il corrispondente sistema di equazioni algebriche lineari equivalente all'equazione (2.5) è della forma

$$d_k = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \beta_{ki} d_i + b_k, \qquad k = 1, 2, \cdots, N, \tag{2.17}$$

dove

$$\beta_{ki} = \int_G \overline{f_k(x)} g_i(x)\, dx = \overline{\alpha_{ik}}, \qquad b_k = (g, f_k). \tag{2.18}$$

Dunque, il sistema (2.17) è aggiunto a quello (2.10):

$$\boldsymbol{d} = \overline{\lambda} A^* \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}, \tag{2.19}$$

dove

$$A^* = (\beta_{ki}) = (\overline{\alpha_{ik}}) = \overline{A^T}, \qquad \boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_N), \qquad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_N).$$

Dall'algebra lineare sappiamo che i determinanti ed i ranghi di una matrice e della sua trasposta coincidono. Perciò, in virtù della (2.12), si ha

$$\begin{cases} \det(I - \overline{\lambda} A^*) = \det(I - \overline{\lambda A^T}) = \overline{\det(I - \lambda A^T)} = \overline{D(\lambda)}, \\ \text{rango}(I - \overline{\lambda} A^*) = \text{rango}\overline{(I - \lambda A^T)} = \text{rango}(I - \lambda A) = q, \end{cases} \tag{2.20}$$

dove A^T denota la trasposta di una matrice A.

Possono essere esaminati due casi:

1. $D(\lambda) \neq 0$. Allora $q = N$ ed i sistemi (2.11) e (2.19) sono univocamente risolvibili per $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ qualsiasi e queste soluzioni sono date dalle formule (2.6) e (2.16), rispettivamente.

2. $D(\lambda) = 0$. In questo caso $q < N$ e, in virtù dalla (2.20), i sistemi omogenei (2.11) e (2.19) hanno esattamente $N - q$ soluzioni linearmente indipendenti:

   $$\boldsymbol{c}^{(s)} = (c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \cdots, c_N^{(s)}),\ \boldsymbol{d}^{(s)} = (d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \cdots, d_N^{(s)}),\ s = 1, 2, \cdots, N-q.$$

   Le equazioni integrali omogenee (2.4) e (2.5) avranno anch'esse esattamente $N - q$ soluzioni linearmente indipendenti:

   $$\boldsymbol{c}^{(s)} = (c_1^{(s)}, \cdots, c_N^{(s)}), \qquad s = 1, 2, \cdots, N - q.$$

Quindi le equazioni integrali omogenee (2.4) e (2.5) avranno anch'esse esattamente $N-q$ soluzioni linearmente indipendente definite dalle formule (2.6) e (2.16), rispettivamente:

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i^{(s)} f_i(x), \quad \psi_s(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i^{(s)} g_i(x), \quad s = 1, 2, \cdots, N-q. \tag{2.21}$$

Dimostriamo ora l'indipendenza lineare di tali sistemi di soluzioni, $\{\varphi_s\}_{s=1}^{N-q}$ e $\{\psi_s\}_{s=1}^{N-q}$. Supponiamo che esistano numeri p_s $(s = 1, 2, \cdots, N-q)$ tali che

$$\sum_{s=1}^{N-q} p_s \varphi_s(x), \qquad x \in \overline{G},$$

cioè, in virtù della (2.21), si ha

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x) \sum_{s=1}^{N-q} c_i^{(s)} p_s = 0, \qquad x \in \overline{G}.$$

Da ciò, in virtù dell'indipendenza lineare del sistema di funzioni $\{f_i\}_{i=1}^{N}$, segue che

$$\sum_{s=1}^{N-q} c_i^{(s)} p_s = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, N.$$

Visto che il sistema di vettori $\{\boldsymbol{c}^{(s)}\}_{s=1}^{N-q}$ è linearmente indipendente in $\mathbb{R}^N$, le relazioni precedenti implicano che $p_s = 0$, $s = 1, 2, \cdots, N-q$, il che dimostra l'indipendenza lineare del sistema di soluzioni $\{\varphi_s\}_{s=1}^{N}$. In modo analogo è stabilita l'indipendenza di ortogonalità:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}^{(s)}) = \sum_{i=1}^{N} a_i \overline{d_i^{(s)}} = 0, \qquad s = 1, 2, \cdots, N-q. \tag{2.22}$$

Le condizioni (2.22) sono equivalenti alle condizioni

$$(f, \psi_s) = \int_G f(x) \overline{\psi_s(x)}\, dx = 0, \qquad s = 1, 2, \cdots, N-q,$$

poichè, in virtù delle (2.21) e (2.9), si ha

$$\int_G f(x) \overline{\psi_s(x)}\, dx = \lambda \sum_{i=1}^{N} \left(\int_G f(x) \overline{g_i(x)}\, dx \right) \overline{d_i^{(s)}} = \lambda \sum_{i=1}^{N} a_i \overline{d_i^{(s)}} = \lambda (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}^{(s)}).$$

Dunque, abbiamo dimostrato i seguenti teoremi, detti *teoremi di Fredholm*, per le equazioni con nucleo degenere.

Teorema 2.1 *Se $D(\lambda) \neq 0$, l'equazione* (2.4) *e l'equazione aggiunta* (2.5) *sono univocamente risolvibili con termini noti f e g qualsiasi.*

Teorema 2.2 *Se $D(\lambda)=0$, le equazioni omogenee* (2.4) *e* (2.5) *hanno lo stesso numero di soluzioni linearmente indipendenti uguale a $N-q$, in cui q è il rango della matrice $I-\lambda A$.*

Teorema 2.3 *Se $D(\lambda)=0$, per la risolvibilità dell'equazione* (2.4) *è necessario e sufficiente che il termine noto f sia ortogonale a tutte le soluzioni $\{\psi_s\}_{s=1}^{N-q}$ dell'equazione omogenea aggiunta* (2.5).

Dai Teoremi 2.1 e 2.2 segue che i numeri caratteristici di un nucleo degenere coincidono con le radici del polinomio $D(\lambda)$ e, di conseguenza, sono *finiti in numero*. Inoltre, dalla formula (2.15) per un risolvente segue che i numeri caratteristici di un nucleo degenere coincidono con i poli del suo risolvente.

Infine osserviamo che i tre teoremi di Fredholm per le equazioni integrali di nucleo degenere valgono nei seguenti due casi:

1. I termini noti appartengono a $C(\overline{G})$ e le soluzioni si cercano nello spazio $C(\overline{G})$.

2. I termini noti appartengono ad $L_2(G)$ e le soluzioni si cercano nello stesso spazio $L_2(G)$. Si può supporre che $f_1,\cdots,f_N$ e $g_1,\cdots,g_N$ appartengano ad $L_2(G)$.

c. Teoremi di Fredholm per le equazioni integrali con nucleo continuo. I teoremi di Fredholm per le equazioni di Fredholm con nucleo degenere dimostrati nel sottoparagrafo precedente possono essere estesi alle equazioni integrali con nucleo continuo arbitrario. L'essenza della dimostrazione sta nel fatto che un nucleo continuo è rappresentato come somma di un nucleo degenere e di un nucleo continuo sufficientemente piccolo. Ciò permette, utilizzando i risultati del sottoparagrafo 2.a sulla risolvibilità delle equazioni integrali con nucleo piccolo, di ridurre la corrispondente equazione integrale ad un'equazione integrale con nucleo degenere per le quali i teoremi di Fredholm sono stati già stabiliti. Ne seguirà che i teoremi di Fredholm sono validi per le equazioni con nucleo continuo in una regione limitata.

Dunque, sia il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ continuo su $\overline{G}\times\overline{G}$. Secondo il teorema di Weierstrass, questo nucleo può essere approssimato con precisione grande a piacere mediante polinomi, cioè, per ε positivo qualsiasi, esiste un polinomio

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x,y) &= \sum_{0\le|\alpha+\beta|\le N} a_{\alpha,\beta}x^{\alpha}y^{\beta}\\ &= \sum_{\substack{0\le\alpha_i,\beta_i\le N,i=1,\cdots,N\\ \sum_{i=1}^{N}(\alpha_i+\beta_i)=N}} a_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_N),(\beta_1,\cdots,\beta_N)}x_1^{\alpha_1}\cdots x_N^{\alpha_N}y_1^{\beta_1}\cdots y_N^{\beta_N},\end{aligned}\quad(2.23)$$

tale che

$$\max_{(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}}|\mathcal{K}(x,y)-\mathcal{P}(x,y)|<\varepsilon.$$

Dunque, il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ può essere rappresentato nella forma

$$\mathcal{K}(x,y) = \mathcal{P}(x,y) + \mathcal{Q}(x,y), \tag{2.24}$$

dove $\mathcal{P}(x,y)$ è un nucleo degenere (polinomio) e $\mathcal{Q}(x,y)$ un nucleo continuo piccolo tale che $\max\limits_{(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}} |\mathcal{Q}(x,y)| < \varepsilon$.

In virtù della (2.24) l'equazione integrale di Fredholm assume la forma

$$\varphi = \lambda\, P\varphi + \lambda\, Q\varphi + f, \tag{2.25}$$

dove P e Q sono operatori integrali con nuclei $\mathcal{P}(x,y)$ e $\mathcal{Q}(x,y)$, rispettivamente, ed inoltre $P + Q = K$.

Dimostriamo che, per $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$, nella classe $C(\overline{G})$ l'equazione integrale (2.25) è equivalente ad un'equazione integrale con nucleo degenere. Per ciò introduciamo una nuova funzione $\Phi(x)$ incognita mediante la formula

$$\Phi = \varphi - \lambda\, Q\varphi. \tag{2.26}$$

Secondo il Teorema 1.5, la funzione φ è univocamente espressa in termini di Φ mediante la formula

$$\varphi = (I - \lambda\, Q)^{-1}\Phi = (I + \lambda R(\lambda))\,\Phi, \tag{2.27}$$

dove $R(\lambda)$ è il operatore integrale con nucleo $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$, risolvente del nucleo $\mathcal{Q}(x,y)$. In virtù delle (2.26) e (2.27), l'equazione (2.25) assume la seguente forma equivalente:

$$\Phi = \lambda P(I + \lambda R(\lambda))\Phi + f = \lambda T\Phi + f, \tag{2.28}$$

dove

$$T = P + \lambda PR(\lambda). \tag{2.29}$$

Ricordiamo che il risolvente $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$ è continuo rispetto a $(x,y;\lambda)$ in $\overline{G}\times\overline{G}\times\{z\in\mathbb{C} : |z| < 1/\varepsilon m(G)\}$ ed analitico rispetto a λ nel disco $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$. Prendendo in considerazione il Lemma 1.4, concludiamo che l'operatore T è un operatore integrale con nucleo continuo

$$\mathcal{T}(x,y;\lambda) = \mathcal{P}(x,y) + \lambda \int_G \mathcal{P}(x,y')\mathcal{R}(y',y;\lambda)\,dy'.$$

Inoltre, dalla (2.23) segue che $\mathcal{T}(x,y;\lambda)$ è degenere ed analitico in λ nel disco $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$.

Trasformiamo ora l'equazione integrale aggiunta (2.2). In virtù della (2.24), $K^* = P^* + Q^*$, e perciò l'equazione (2.2) assume la forma

$$(I - \overline{\lambda}\, Q^*)\psi = \overline{\lambda}\, P^*\psi + g. \tag{2.30}$$

Applicando l'operatore $(I - \overline{\lambda}\, Q^*)^{-1}$ all'equazione (2.30) ed utilizzando l'uguaglianza (1.21),

$$(I - \overline{\lambda}\, Q^*)^{-1} = I + \overline{\lambda}\, R^*(\lambda), \qquad |\lambda| < 1/\varepsilon m(G),$$

riduciamola all'equazione equivalente

$$\begin{aligned}\psi &= (I - \overline{\lambda}\, Q^*)^{-1}(\overline{\lambda}\, P^*\psi + g) \\ &= (I + \overline{\lambda}\, R^*(\lambda))(\overline{\lambda}\, P^*\psi + g) = \overline{\lambda}(P^* + \overline{\lambda}\, R^*(\lambda)P^*)\psi + (I + \overline{\lambda}\, R^*(\lambda))g.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Introducendo le notazioni

$$g_1 = (I + \overline{\lambda}\, R^*(\lambda))g, \qquad g = (I - \overline{\lambda}\, Q^*)g_1 \tag{2.32}$$

e tenendo conto del fatto che, conformemente alle formule (1.13) e (2.29) si ha

$$P^* + \overline{\lambda}\, R^*(\lambda)P^* = (P + \lambda PR(\lambda))^* = T^*,$$

riscriviamo l'equazione (2.31) nella forma

$$\psi = \overline{\lambda}\, T^*\psi + g_1. \tag{2.33}$$

Dunque, per $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$, nella classe $C(\overline{G})$ l'equazione integrale (2.1) è equivalente a quella (2.28) con nucleo degenere $\mathcal{T}(x, y; \lambda)$ analitico nel disco $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$, mentre l'equazione aggiunta (2.2) è equivalente all'equazione (2.33), aggiunta della (2.28). Ma per le equazioni (2.28) e (2.33) sono validi i teoremi di Fredholm 2.1-2.3 ed il determinante è una funzione analitica nel disco $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$. Da ciò, utilizzando l'equivalenza tra queste equazioni e quelle iniziali (2.1) e (2.2), si ottengono i seguenti *teoremi di Fredholm* per le equazioni integrali con nucleo continuo. Questi teoremi insieme si chiamano alternativa di Fredholm.

Teorema 2.4 [Alternativa di Fredholm]. *Se l'equazione integrale* (2.1) *con nucleo continuo è risolvibile in* $C(\overline{G})$ *per un termine noto* $f \in C(\overline{G})$ *qualsiasi, anche l'equazione aggiunta* (2.2) *è risolvibile in* $C(\overline{G})$ *per un termine noto* $g \in C(\overline{G})$ *qualsiasi, ed inoltre queste soluzioni sono uniche (primo teorema di Fredholm).*

Se l'equazione integrale (2.1) *non è risolvibile in* $C(\overline{G})$ *per un termine noto* f *qualsiasi, allora*

1) *le equazioni omogenee* (2.1) *e* (2.2) *hanno lo stesso numero finito di soluzioni linearmente indipendenti (secondo teorema di Fredholm);*

2) *perchè l'equazione* (2.1) *sia risolvibile, è necessario e sufficiente che il termine noto* f *sia ortogonale a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea aggiunta* (2.2) *(terzo teorema di Fredholm).*

Dimostrazione. Per $\lambda = 0$ l'alternativa di Fredholm è, evidentemente, valida. Perciò poniamo $\lambda \neq 0$ e nelle costruzioni precedenti scegliamo $(1/\varepsilon) < |\lambda| m(G)$.

Supponiamo che l'equazione (2.1) sia risolvibile in $C(\overline{G})$ per $f \in C(\overline{G})$ qualsiasi. Allora l'equazione (2.28), equivalente alla (2.1), con nucleo degenere sarà

anch'essa risolvibile in $C(\overline{G})$ per f qualsiasi. Applicando il Teorema 2.3 concludiamo che $D(\lambda) \neq 0$. Ma, in questo caso, conformemente al Teorema 2.1 l'equazione (2.28) e l'equazione (2.33) sono univocamente risolvibili per f e g_1 qualsiasi appartenenti a $C(\overline{G})$. Però le funzioni g_1 e g sono biunivocamente espresse mediante la formula (2.32) e, di conseguenza, le equazioni equivalenti (2.1) e (2.2) sono univocamente risolvibili in $C(\overline{G})$ per f e g qualsiasi. Il primo teorema di Fredholm è dimostrato.

Se l'equazione (2.1) non è risolvibile in $C(\overline{G})$ per un f qualsiasi, allora anche l'equazione (2.28) con nucleo degenere equivalente alla (2.1) non è risolvibile in $C(\overline{G})$ per un f qualsiasi. In base al Teorema 2.1 concludiamo che $D(\lambda) = 0$. Ma allora, conformemente al Teorema 2.2, le equazioni omogenee (2.28) e (2.33) hanno lo stesso numero finito di soluzioni linearmente indipendenti in $C(\overline{G})$. Visto che le funzioni Φ e φ sono collegate dalle relazioni (2.26), le equazioni omogenee equivalenti (2.1) e (2.2) hanno lo stesso numero finito di soluzioni linearmente indipendenti in $C(\overline{G})$. Il secondo teorema di Fredholm è dimostrato.

Inoltre, in base al Teorema 2.3 per la risolvibilità dell'equazione (2.28) per $D(\lambda) = 0$ è necessario e sufficiente che il termine noto f sia ortogonale a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea aggiunta (2.33). Ma le soluzioni ψ delle equazioni omogenee equivalenti (2.1) e (2.28), come pure i secondi membri f delle equazioni equivalenti (2.1) e (2.28), sono identiche. Di conseguenza, per la risolvibilità dell'equazione (2.1), nel caso considerato, è necessario e sufficiente che il termine noto f sia ortogonale a tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (2.2). Il terzo teorema di Fredholm è dimostrato. □

Dimostriamo ora il quarto teorema di Fredholm: *In ogni disco* $|\lambda| \leq R$ *ci può essere solo un numero finito di numeri caratteristici del nucleo* $\mathcal{K}(x, y)$.

Dimostrazione. Scegliamo $\varepsilon = 1/(R+1)m(G)$. Allora per $|\lambda| < R+1$ avremo $|\lambda| < 1/\varepsilon m(G)$. Per questa ragione per $|\lambda| < R+1$ le equazioni omogenee (2.1) e (2.28) sono equivalenti. Di conseguenza, nel disco $|\lambda| < R+1$ i numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ coincidono con le radici dell'equazione $D(\lambda) = 0$. Dato che il nucleo $\mathcal{T}(x, y; \lambda)$ è analitico in λ nel disco $|\lambda| < R+1$, $D(\lambda)$ è una funzione analitica in λ in questo disco. In base alla proprietà di unicità delle funzioni analitiche [Vedi il Teorema A.3], concludiamo che nel disco $|\lambda| \leq R$ ci può essere solo un numero finito di radici dell'equazione $D(\lambda) = 0$, e quindi anche il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ può avere solo un numero finito di numeri caratteristici. Il teorema è dimostrato. □

Osserviamo infine che i quattro teoremi di Fredholm valgono anche se le equazioni integrali (2.1) e (2.2) vengono considerate in uno degli spazi $L_1(G)$ o $L_2(G)$ anzicchè nello spazio $C(\overline{G})$. Infatti, gli operatori integrali K e K^* trasformano $L_1(G)$ e $L_2(G)$ in $C(\overline{G})$, cioè, $K\varphi$ e $K^*\psi$ appartengono a $C(\overline{G})$ se φ e ψ appartengono ad $L_p(G)$, $p = 1, 2$. Quindi, se la (2.1) avesse una soluzione $\varphi \in L_p(G)$, $p = 1, 2$, per il termine noto $f \in C(\overline{G})$, allora si avrebbe $\varphi = \lambda K\varphi + f \in C(\overline{K})$. Con questa osservazione potremmo ora ripetere le dimostrazioni dei quattro teoremi di Fredholm nello spazio $L_p(G)$, $p = 1, 2$, prima per il

nucleo degenere e poi per un nucleo continuo qualsiasi. Così si trovano gli stessi autovalori e autofunzioni per le equazioni (2.1) e (2.2) considerate in $L_p(G)$, $p = 1, 2$, come per quelle considerate in $C(\overline{G})$.

d. Corollari dei teoremi di Fredholm. Dal quarto teorema di Fredholm segue che l'insieme dei numeri caratteristici di un nucleo continuo non ha punti di accumulazione finiti e non è altro che numerabile. Questo insieme può anche essere vuoto, come, per esempio, per un nucleo di Volterra.

Dal secondo teorema di Fredholm segue anche che la molteplicità di ogni numero caratteristico è finita.

Di conseguenza, tutti i numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ si possono numerare in ordine crescente del loro modulo:

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots , \tag{2.34}$$

ripetendo λ_k in questa successione tante volte quant'è la sua molteplicità. Denotiamo le corrispondenti autofunzioni con $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ e facciamo corrispondere ad ogni autovalore un'autofunzione φ_k:

$$\varphi_k = \lambda_k K\varphi_k, \qquad k = 1, 2, \cdots . \tag{2.35}$$

Se λ_k non è un autovalore semplice, le corrispondenti φ_k si possono scegliere mediante metodi diversi e quindi la corrispondenza (2.35) tra λ_k e φ_k non è univoca.

Per il secondo teorema di Fredholm, $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \cdots$ sono i numeri caratteristici del nucleo $\mathcal{K}^*(x, y)$ ed inoltre le molteplicità di λ_k e $\overline{\lambda_k}$ sono le stesse. Denotiamo con ψ_k le corrispondenti autofunzioni

$$\psi_k = \overline{\lambda_k} K^*\psi_k, \qquad k = 1, 2, \cdots . \tag{2.36}$$

Le autofunzioni φ_k e ψ_k sono continue su $\overline{G}$.

Dimostriamo che se $\lambda_k \neq \lambda_i$, si ha

$$(\varphi_k, \psi_i) = 0. \tag{2.37}$$

Infatti, prendendo in considerazione l'uguaglianza (1.11), si ottiene dalle (2.35) e (2.36)

$$(\varphi_k, \psi_i) = (\varphi_k, \overline{\lambda_i} K^*\psi_i) = \lambda_i (K\varphi_k, \psi_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_k}(\varphi_k, \psi_i),$$

da cui, in virtù del fatto che $\lambda_k \neq \lambda_i$, seguono le uguaglianze (2.37).

Notiamo che λ_k^p e φ_k, $k = 1, 2, \cdots$, sono i numeri caratteristici e le corrispondenti autofunzioni del nucleo iterato $\mathcal{K}_p(x, y)$. Quest'asserzione segue dalle uguaglianze (2.35), secondo le quali si ha

$$\varphi_k = \lambda_k^p K^p \varphi_k, \qquad k = 1, 2, \cdots . \tag{2.38}$$

Inversamente, se μ è l'autovalore e φ la corrispondente autofunzione del nucleo iterato $\mathcal{K}_p(x, y)$, allora almeno una delle radici λ_j, $j = 1, 2, \cdots, p$ dell'equazione $\lambda^p = \mu$ è un autovalore del nucleo iniziale $\mathcal{K}(x, y)$. Quest'asserzione segue dall'uguaglianza

$$(\mu K^p - I)\varphi = (-1)^{p-1}(\lambda_1 K - I) \cdots (\lambda_p K - I)\varphi = 0. \tag{2.39}$$

Infatti, sia

$$\psi = (\lambda_2 K - I) \cdots (\lambda_p K - I)\varphi. \tag{2.40}$$

Se $\psi \neq 0$, si ha, in virtù della (2.39), $(\lambda_1 K - I)\psi = 0$, e per questa ragione λ_1 è un autovalore del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. Se, invece, $\psi = 0$, si ha

$$(\lambda_2 K - I) \cdots (\lambda_p K - I)\varphi = 0,$$

allora, ripetendo il ragionamento precedente, si ottiene che o λ_2 è un autovalore del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$, o $(\lambda_3 K - I) \cdots (\lambda_p K - I)\varphi = 0$, ecc.

Riformuliamo ora l'alternativa di Fredholm in termini di autovalori e di autofunzioni.

Se $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, le equazioni integrali (2.1) *e* (2.2) *sono univocamente risolvibili per qualunque termine noto.*

Se $\lambda = \lambda_k$, le equazioni omogenee

$$K\varphi = \lambda_k \varphi, \qquad K^*\psi = \overline{\lambda_k}\psi$$

hanno lo stesso numero finito $r_k \geq 1$ di soluzioni linearmente indipendenti, di autofunzioni $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_{k+r_k-1}$ del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ e di autofunzioni $\psi_k, \psi_{k+1}, \cdots, \psi_{k+r_k-1}$ del nucleo $\mathcal{K}^*(x, y)$, corrispondenti agli autovalori λ_k e $\overline{\lambda_k}$ (r_k è la molteplicità di λ_k e di $\overline{\lambda_k}$).

Se $\lambda = \lambda_k$, per la risolvibilità dell'equazione (2.1) *è necessario e sufficiente che sia*

$$(f, \psi_{k+i}) = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots, r_k - 1. \tag{2.41}$$

3 Equazioni Integrali con Nucleo Hermitiano

Un nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è detto *hermitiano* se questo nucleo coincide con il suo coniugato hermitiano, $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$. La corrispondente equazione integrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)\, dy + f(x) \tag{3.1}$$

per λ reali coincide con la sua aggiunta, essendo $K^* = K$ un operatore autoaggiunto nello spazio $L_2(G)$. Se il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è continuo, K è anche limitato su $L_1(G)$ e $C(\overline{G})$. Di conseguenza, conviene considerare quest'equazione nello spazio $L_2(G)$. Gli autovalori e le autofunzioni trovati sono anche gli autovalori e le autofunzioni se la (3.1) viene considerata in uno degli spazi $L_1(G)$ e $C(\overline{G})$ per un nucleo continuo ed hermitiano qualsiasi.

a. Operatori integrali con nucleo continuo hermitiano. Supponiamo che K sia un operatore integrale con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$. Quest'operatore trasferisce $L_2(G)$ (G è una regione limitata) in $L_2(G)$ (vedi il Lemma 1.1) ed è autoaggiunto:

$$(Kf, g) = (f, Kg), \qquad f, g \in L_2(G). \tag{3.2}$$

Inversamente, se un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ è autoaggiunto, questo nucleo è hermitiano. Infatti, dalla (3.2) (valida anche per $f, g \in C(\overline{G})$) segue che $\mathcal{K}(x,y)$ e $\mathcal{K}^*(x,y)$ sono ambedue il nucleo dell'operatore integrale K e quindi, in virtù del Lemma 1.2, $\mathcal{K}(x,y) = \mathcal{K}^*(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$.

Dalla (1.19) segue che tutti i nuclei iterati $\mathcal{K}_p(x,y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$ sono anch'essi hermitiani:

$$\mathcal{K}_p^*(x,y) = (\mathcal{K}^*)_p(x,y) = \mathcal{K}_p(x,y).$$

Sia K un compatto. Un sottoinsieme $\mathcal{M}$ (cioè, un insieme di funzioni continue su K) si dice *equicontinuo* su K se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{M}$, non appena $|x_1 - x_2| < \delta$ per $x_1, x_2 \in K$. In particolare, $f \in C(K)$ è (uniformemente) continua se e solo se l'insieme $\mathcal{M} = \{f\}$ è equicontinuo.

Lemma 3.1 *Un operatore integrale K con nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ trasferisce ogni insieme limitato appartenente a $L_p(G)$, $p = 1, 2$, in un insieme limitato in $C(\overline{G})$ e equicontinuo su $\overline{G}$.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione per $p = 1, 2$, osservando che $(p-1)/p = 0$ per $p = 1$ e $(p-1)/p = 1/2$ per $p = 2$. Sia B un insieme limitato in $L_p(G)$, $p = 1, 2$: $\exists A : \|f\|_p \le A$ per ogni $f \in B$. Dal Lemma 1.1 segue che $\|Kf\|_C \le M m(G)^{(p-1)/p} A$, $f \in B$, $p = 1, 2$, e quindi K trasferisce B in un insieme limitato in $C(\overline{G})$. Inoltre, visto che il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è uniformemente continuo su $\overline{G} \times \overline{G}$, per un $\varepsilon > 0$ qualsiasi esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\mathcal{K}(x',y) - \mathcal{K}(x'',y)| < \frac{\varepsilon}{A(m(G))^{(p-1)/p}},$$

quando $|x' - x''| < \delta$ e $\{x', x'', y\} \subset \overline{G}$. Da ciò, utilizzando la disuguaglianza (1.1), in cui $\mathcal{K}(x,y)$ è sostituito con $|\mathcal{K}(x',y) - \mathcal{K}(x'',y)|$, per ogni $f \in B$ si ottiene

$$\begin{aligned} |(Kf)(x') - (Kf)(x'')| &= \left| \int_G [\mathcal{K}(x',y) - \mathcal{K}(x'',y)]\, f(y)\, dy \right| \\ &\le \frac{\varepsilon (m(G))^{(p-1)/p} \|f\|_p}{A(m(G))^{(p-1)/p}} \le \varepsilon, \end{aligned}$$

quando $|x' - x''| < \delta$ e $\{x', x'', y\} \subset \overline{G}$. Ciò vuol dire che l'insieme $\{Kf : f \in B\}$ è equicontinuo su $\overline{G}$. □

Teorema 3.2 [Il teorema di Ascoli-Arzelà]. *Se un insieme infinito B è limitato in $C(K)$ dove K è un compatto, ed è equicontinuo su K, da quest'insieme si può estrarre una successione convergente in $C(K)$.*[1]

[1] In altre parole, se un insieme B è limitato in $C(K)$ dove K è un compatto, ed è equicontinuo su K, la sua chiusura in $C(K)$ è compatta.

Dimostrazione. Come è noto, ogni compatto in $\mathbb{R}^n$ ha un sottoinsieme denso numerabile $\{x_n : n = 1, 2, \cdots\}$. Per ipotesi, l'insieme di numeri $\{f(x_1) : f \in B\}$ è limitato. Quindi esiste una successione $\{f_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$ tale che $f_k^{(1)}(x_1)$ è convergente se $k \to \infty$. Inoltre, visto che l'insieme di numeri $\{f_k^{(1)}(x_2) : k = 1, 2, \cdots\}$ è limitato, estraiamo dalla $\{f_k^{(1)}\}$ una sottosuccessione $\{f_k^{(2)}\}$ tale che $\{f_k^{(2)}(x_2)\}$ è convergente. Continuando così, troviamo le successioni $\{f_k^{(m)}\}$ in B, dove $n = 1, 2, \cdots$ e $\{f_k^{(n+1)}\}$ è una sottosuccessione della $\{f_k^{(n)}\}$, tale che $\{f_k^{(n)}(x_n)\}$ è convergente se $n \to \infty$.

Consideriamo ora la successione "diagonale" $\{g_k\}$ in B dove $g_k = f_k^{(k)}$, $k = 1, 2, \cdots$. Per un qualunque punto x_i la successione numerica $\{g_k(x_i)\}$ converge se $k \to \infty$, poichè, per costruzione, per $k \geq i$, questa successione è una sottosuccessione della successione convergente $\{f_k^{(i)}(x_i)\}$.

Dimostriamo ora che la successione di g_k, $k = 1, 2, \cdots$, è uniformemente convergente su K. Supponiamo che sia $\varepsilon > 0$. Visto che questa successione è equicontinua su K, esiste $\delta > 0$ tale che per $k = 1, 2, \cdots$ si ha

$$|g_k(x) - g_k(x')| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.3}$$

quando $|x - x'| < \delta$ e $x, x' \in K$. Essendo K compatto, dall'insieme di punti $x_1, x_2, \cdots$ si possono scegliere un numero finito di questi punti, $x_1, x_2, \cdots, x_l$, $l = l(\varepsilon)$, in modo che, per ogni punto $x \in K$ esista un punto x_i, $1 \leq i \leq l$, tale che $|x - x_i| < \delta$. Ricordando che la successione di $g_k(x)$, $k = 1, 2, \cdots$, converge ai punti $x_1, \cdots, x_l$, concludiamo che esiste un numero $N = N(\varepsilon)$ tale che

$$|g_k(x_i) - g_p(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad k, p \geq N, \ i = 1, 2, \cdots, l. \tag{3.4}$$

Sia ora x un punto arbitrario dell'insieme K. Scegliendo un punto x_i, $1 \leq i \leq l$, tale che $|x - x_i| < \delta$, in virtù delle (3.3) e (3.4) si ottiene

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g_p(x)| &\leq |g_k(x) - g_k(x_i)| + |g_k(x_i) - g_p(x_i)| + |g_p(x_i) - g_p(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \qquad k, p \geq N, \end{aligned}$$

dove N non dipende da $x \in K$. Ciò significa che la successione di g_k, $k = 1, 2, \cdots$, è una successione di Cauchy in $C(K)$. Siccome $C(K)$ è uno spazio di Banach (e quindi è completo), la successione converge uniformemente su K. □

Il teorema di Ascoli-Arzelà esprime la proprietà di *compattezza* di un qualunque insieme limitato e equicontinuo in $C(K)$. Inoltre, il Lemma 3.1 afferma che un operatore integrale con nucleo continuo trasferisce ogni insieme limitato in $L_2(G)$ (oppure in $L_1(G)$) in un sottoinsieme di $C(\overline{G})$ con chiusura (in $C(\overline{G})$) compatta.

Questa proprietà ci consente di generalizzare il concetto di operatore integrale con nucleo continuo. Dati due spazi di Banach X e Y (possibilmente $X = Y$) ed un operatore $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, T si dice *operatore compatto* se per ogni

sottoinsieme limitato B di X la chiusura $\overline{T[B]}$ dell'immagine $T[B]$ in Y è compatta. In tal caso, il Lemma 3.1 esprime la compattezza degli operatori integrali con nucleo continuo per $X = L_2(G)$ (oppure $X = L_1(G)$) ed $Y = C(\overline{G})$; in tal caso risulterà anche la compattezza di questi operatori per $X = Y = L_1(G)$, $X = Y = L_2(G)$ e $X = Y = C(\overline{G})$. Per un operatore compatto $T \in \mathcal{L}(X)$ (dove $X = Y$) valgono i quattro teoremi di Fredholm se, al posto dell'operatore integrale aggiunto, si considera l'operatore aggiunto T^* definito sullo spazio duale X^*. In generale, le dimostrazioni non si possono può svolgere tramite l'approssimazione di T da un cosiddetto operatore di rango finito (che generalizza l'operatore integrale con nucleo degenere), tranne nel caso in cui $X = Y$ è uno spazio di Hilbert e in certi altri casi particolari.

c. Equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano: Il principio variazionale. Non tutti i nuclei che non sono identicamente nulli, hanno autovalori; per esempio, i nuclei di Volterra non hanno autovalori. Tuttavia, è valido il seguente

Teorema 3.3 *Ogni nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$ ha almeno un autovalore e l'autovalore λ_1 più piccolo in modulo soddisfa il principio variazionale*

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{0 \neq f \in L_2(G)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2}. \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Sia

$$\nu = \sup_{\|f\|_2 = 1} \|Kf\|_2. \tag{3.6}$$

Dalla (1.3) segue che $\|Kf\|_2 \leq M\, m(G)$ sulle funzioni di $L_2(G)$ di norma 1 e quindi $\nu \leq M\, m(G)$. È inoltre evidente che $\nu \geq 0$. Dimostriamo che $\nu > 0$. Infatti, se $\nu = 0$, allora, in virtù della (3.6), avremmo $\|Kf\|_2 = 0$, cioè $Kf = 0$ per tutte le $f \in L_2(G)$, e quindi $\mathcal{K}(x, y) = 0$, $x, y \in G$, il che contraddice l'ipotesi.

Dalla definizione della ν segue l'esistenza di una successione di f_k, $k = 1, 2, \cdots$, $\|f_k\|_2 = 1$, tale che

$$\|Kf_k\|_2 \to \nu, \qquad k \to +\infty; \tag{3.7}$$

inoltre, è valida la disuguaglianza

$$\|K^2 f\|_2 = \left\| K\left(\frac{Kf}{\|Kf\|_2}\right)\right\|_2 \|Kf\|_2 \leq \nu \|Kf\|_2, \qquad f \in L_2(G). \tag{3.8}$$

Dimostriamo ora che

$$K^2 f_k \to \nu^2 f_k \to 0, \qquad k \to +\infty \text{ in } L_2(G). \tag{3.9}$$

Infatti, utilizzando le (3.2), (3.7) e (3.8), si ottiene

$$\begin{aligned}\|K^2 f_k - \nu^2 f_k\|_2^2 &= (K^2 f_k - \nu^2 f_k, K^2 f_k - \nu^2 f_k) \\ &= (K^2 f_k, K^2 f_k) + \nu^4 (f_k, f_k) - \nu^2 (f_k, K^2 f_k) - \nu^2 (K^2 f_k, f_k) \\ &= \|K^2 f_k\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2 (K f_k, K f_k) \\ &\le \nu^2 \|K f_k\|_2^2 + \nu^4 - 2\nu^2 \|K f_k\|_2^2 \\ &= \nu^4 - \nu^2 \|K f_k\|_2^2 \to 0, \qquad k \to +\infty,\end{aligned}$$

il che è equivalente alla relazione limite (3.9).

Conformemente al Lemma 3.1, la successione delle funzioni Kf_k, $k=1,2,\cdots$, è limitata in $C(\overline{G})$ e equicontinua su $\overline{G}$. Ma in questo caso, in base al teorema di Ascoli-Arzelà, esiste anche una sottosuccessione $\psi_i = Kf_{k_i}$, $i = 1, 2, \cdots$, che converge in $C(\overline{G})$ ad una funzione $\psi \in C(\overline{G})$, $\|\psi - \psi_i\|_C \to 0$, $i \to \infty$. Da ciò, utilizzando le (1.1) e (1.2), e la relazione (3.9), si ottiene

$$\begin{aligned}&\|K^2\psi - \nu^2\psi\|_C \le \|K^2(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2\|\psi - \psi_i\|_C + \|K^2\psi_i - \nu^2\psi_i\|_C \\ &\le M\, m(G)\|K(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2\|\psi - \psi_i\|_C + \|K(K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i})\|_C \\ &\le (M^2 m(G)^2 + \nu^2)\|\psi - \psi_i\|_C + M\sqrt{m(G)}\|K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}\|_2 \to 0,\ i \to +\infty,\end{aligned}$$

e, come conseguenza,

$$K^2\psi = \nu^2\psi.$$

Dimostriamo che $\psi \neq 0$. Dalla relazione limite (3.9) segue che

$$K\psi_i - \nu^2 f_{k_i} \to 0, \qquad i \to +\infty \text{ in } L_2(G),$$

e, di conseguenza, $\|K\psi_i\|_2 \to \nu^2$, $i \to +\infty$. D'altra parte, dal Lemma 1.1 segue che $\|K\psi_i\|_2 \to \|K\psi\|_2$, $i \to +\infty$. Quindi, $\|K\psi\|_2 = \nu^2 > 0$, da cui segue che $\psi \neq 0$.

Dunque, la funzione ψ costruita è un'autofunzione del nucleo $\mathcal{K}_2(x,y)$ corrispondente all'autovalore ν^2. Ma, allora, almeno uno dei numeri $\pm\nu$ è autovalore del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. In tal modo, l'autovalore λ_1 costruito è uguale a ν in modulo e, quindi, in virtù della (3.6), soddisfa il principio variazionale (3.5).

Non resta altro che stabilire che λ_1 è l'autovalore più piccolo in modulo del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. Infatti, se λ_0 e φ_0 sono l'autovalore e la corrispondente autofunzione, cioè $\lambda_0 K\varphi_0 = \varphi_0$, allora, in virtù della (3.5), si ha

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2} \ge \frac{\|K\varphi_0\|_2}{\|\varphi_0\|_2} = \frac{1}{|\lambda_0|},$$

e quindi $|\lambda_1| \le |\lambda_0|$. □

Considerando il teorema sopra dimostrato ed i teoremi di Fredholm, per le equazioni integrali con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y) \not\equiv 0$, si ottengono le seguenti asserzioni:

L'insieme di autovalori $\{\lambda_k\}$ non è vuoto, è situato sull'asse reale, e non ha punti di accumulazione finiti; ogni autovalore è di molteplicità finita ed il sistema di autofunzioni $\{\varphi_k\}$ può essere scelto ortonormale:

$$(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{k,i}. \tag{3.10}$$

Se $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, l'equazione (3.1) *è univocamente risolvibile per un termine noto $f \in C(\overline{G})$ qualsiasi. Se $\lambda = \lambda_k$, per la risolvibilità dell'equazione* (3.1) *è necessario e sufficiente che*

$$(f, \varphi_{k+1}) = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots, r_k - 1, \tag{3.11}$$

dove $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_{k+r_k-1}$ sono autofunzioni corrispondenti all'autovalore λ_k e r_k è la molteplicità di λ_k.

4 Teorema di Hilbert-Schmidt e i suoi Corollari

a. Teorema di Hilbert-Schmidt per un nucleo continuo hermitiano. Supponiamo che $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ siano gli autovalori del nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y) \not\equiv 0$ disposti in ordine di crescita del loro modulo, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots$, e che $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ siano le corrispondenti autofunzioni ortonormali, $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{kl}$.

Come sappiamo, gli autovalori λ_k sono reali e le autofunzioni $\varphi_k(x)$ sono continue su $\overline{G}$; in questo caso l'insieme $\{\lambda_k\}$ è finito o numerabile; nell'ultimo caso si ha $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Inoltre, in virtù del 3.3, è valida la disuguaglianza

$$\|Kf\|_2 \leq \frac{1}{|\lambda_1|}\|f\|_2, \qquad f \in L_2(G). \tag{4.1}$$

Notiamo un'altra disuguaglianza, e cioè[2]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2 \, dy, \qquad x \in \overline{G}. \tag{4.2}$$

Nel seguito verrà infatti dimostrato che vale l'uguaglianza nella (4.2).

Introduciamo ora la successione di nuclei continui hermitiani

$$\mathcal{K}^{(p)}(x, y) = \mathcal{K}(x, y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \qquad p = 1, 2, \cdots, \qquad . \tag{4.3}$$

I corrispondenti operatori integrali $K^{(p)}$ hermitiani soddisfano

$$K^{(p)} f = Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i, \qquad f \in L_2(G). \tag{4.4}$$

[2]Se il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ ha un numero finito di autovalori, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$, poniamo $\lambda_k = +\infty$ per $k > N$.

Dimostriamo che $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots$, e $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \cdots$ costituiscono tutti gli autovalori e tutte le autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$. Infatti, in virtù della (4.4) abbiamo

$$K^{(p)}\varphi_k = K\varphi_k - \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_k, \varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i = K\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k, \qquad k \geq p+1,$$

di modo che λ_k e φ_k, $k \geq p+1$, siano autovalori ed autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$. Inversamente, siano λ_0 e φ_0 un autovalore e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$, e cioè, in virtù della (4.4), si avrà

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)}\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_0)}{\lambda_i}\varphi_i. \tag{4.5}$$

Da qui per $k = 1, 2, \cdots, p$ si ottiene

$$\begin{aligned}(\varphi_0, \varphi_k) &= \lambda_0(K\varphi_0, \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_k)}{\lambda_i} \\ &= \lambda_0(\varphi_0, K\varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i}\delta_{ik} = \frac{\lambda_0}{\lambda_k}(\varphi_0, \varphi_k) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k}(\varphi_0, \varphi_k) = 0,\end{aligned}$$

e quindi, in virtù della (4.5), $\lambda_0 = \lambda_0 K\varphi_0$. Dunque, λ_0 e φ_0 sono l'autovalore e la corrispondente autofunzione del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$. Visto che φ_0 è ortogonale a tutte le autofunzioni $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$, ne segue che λ_0 coincide con uno degli autovalori $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots$ e φ_0 può essere considerata uguale a φ_k per $k \geq p+1$. Dunque, λ_{p+1} è il più piccolo autovalore del nucleo $\mathcal{K}^{(p)}(x,y)$ in modulo. Applicando la disuguaglianza (4.1) a questo nucleo e tenendo conto della (4.4), si ottiene la disuguaglianza

$$\|K^{(p)}f\|_2 = \left\| Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_2 \leq \frac{\|f\|_2}{|\lambda_{p+1}|}, \qquad f \in L_2(G), \tag{4.6}$$

dove $p = 1, 2, \cdots$.

Supponiamo che il nucleo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$ abbia un numero finito di autovalori: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$. Da quanto abbiamo dimostrato, il nucleo hermitiano $\mathcal{K}^{(N)}(x,y)$ non ha autovalori, e quindi, in base al Teorema 3.3, si ha $\mathcal{K}^{(N)}(x,y) \equiv 0$, in modo che, in virtù della (4.3), si ha

$$\mathcal{K}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \tag{4.7}$$

il che significa che il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è degenere.

Da ciò, e ricordando anche che un nucleo degenere ha sempre un numero finito di autovalori, formuliamo il seguente risultato: *affinché un nucleo continuo hermitiano sia degenere, è necessario e sufficiente che questo nucleo abbia un numero finito di autovalori.*

Teorema 4.1 [Teorema di Hilbert-Schmidt]. *Se una funzione $f(x)$ appartiene all'immagine di un operatore integrale K di nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$, cioè $f = Kh$, la sua serie in termini delle autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è uniformemente convergente su $\overline{G}$ alla funzione*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x). \tag{4.8}$$

Dimostrazione. Visto che $f = Kh$, $h \in L_2(G)$, in base al Lemma 1.1, $f \in C(\overline{G})$ ed i coefficienti di Fourier delle funzioni f e h in termini delle autofunzioni $\{\varphi_k\}$ del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ sono collegati con la relazione

$$(f, \varphi_k) = (Kh, \varphi_k) = (h, K\varphi_k) = \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}. \tag{4.9}$$

Se il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ ha un numero finito di autovalori, si ha, in virtù della (4.7),

$$f(x) = (Kh)(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x),$$

ed il teorema di Hilbert-Schmidt è dimostrato.

Supponiamo ora che il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ abbia un numero infinito di autovalori. In questo caso $|\lambda_k| \to +\infty$, $k \to +\infty$. Perciò, in virtù delle (4.6) e (4.9), la serie (4.8) converge a f nella norma di $L_2(G)$:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{p} (f, \varphi_k)\varphi_k \right\|_2 = \left\| Kh - \sum_{k=1}^{p} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k \right\|_2 \le \frac{\|h\|_2}{|\lambda_{p+1}|} \to 0, \qquad p \to +\infty.$$

Resta da dimostrare che la serie (4.8) converge in modo uniforme su $\overline{G}$. Utilizzando la disuguaglianza di Schwartz e la (4.2), si ottiene, per tutti i valori di p e q e per ogni $x \in \overline{G}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)| \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \le \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{k=p}^{q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \right]^{1/2} \\ &\le \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2} \left[\int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2 \, dy \right]^{1/2} \le M\sqrt{m(G)} \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

In virtù della disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, \varphi_k)|^2 \le \|h\|_2^2,$$

il primo membro della disuguaglianza (4.10) tende a zero per $p, q \to +\infty$. Ciò significa che la serie (4.8) è puntualmente convergente su $\overline{G}$. Siccome il maggiorante in (4.10) non dipende da $x \in \overline{G}$, la convergenza risulta uniforme in $x \in \overline{G}$. □

b. Sviluppo bilineare dei nuclei iterati. Dimostriamo che *un nucleo iterato $\mathcal{K}_p(x,y)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$ può essere sviluppato in una serie bilineare in termini delle autofunzioni di questo nucleo*,

$$\mathcal{K}_p(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k^p}, \qquad p = 2, 3, \cdots, \tag{4.11}$$

e la serie è uniformemente convergente su $\overline{G} \times \overline{G}$.

In virtù della formula (1.14), per ogni $y \in \overline{G}$ il nucleo $\mathcal{K}_p(x,y)$ appartiene all'immagine dell'operatore K di nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ e quindi, in base al teorema di Hilbert-Schmidt, esso può essere sviluppato in una serie uniformemente convergente rispetto alle autofunzioni di questo nucleo:

$$\mathcal{K}_p(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}_p(x,y), \varphi_k)\varphi_k(x).$$

Visto che il nucleo $\mathcal{K}_p(x,y)$ è hermitiano, abbiamo

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}_p(x,y), \varphi_k) &= \int_G \mathcal{K}_p(x,y)\overline{\varphi_k(x)}\,dx \\ &= \int_G \overline{\mathcal{K}_p(y,x)\varphi_k(x)}\,dx = \overline{(K^p\varphi_k)(y)} = \frac{\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k^p}, \qquad p \geq 1.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Dunque, l'uguaglianza (4.11) è dimostrata e la serie della (4.11) è uniformemente convergente in $x \in \overline{G}$ per ogni $y \in \overline{G}$.

In particolare, ponendo nella formula (4.11) $p = 2$, $x = y$ e tenendo conto del fatto che, in virtù della (1.14), si ha

$$\mathcal{K}_2(x,y) = \int_G \mathcal{K}(x,y')\mathcal{K}(y',x)\,dy' = \int_G \mathcal{K}(x,y')\overline{\mathcal{K}(x,y')}\,dy' = \int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dy,$$

si ottiene l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = \int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dy. \tag{4.13}$$

Dal teorema di Dini [Vedi Giusti II oppure Pagani-Salsa II] segue che la serie (4.13) è uniformemente convergente su $\overline{G}$, poichè la parte a destra è una funzione continua in $x \in \overline{G}$. Da ciò, utilizzando la disuguaglianza di Schwartz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}|}{\lambda_k^p} \leq \frac{1}{|\lambda_1|^{p-2}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2}\right]^{1/2},$$

concludiamo che la serie (4.11) è uniformemente convergente su $\overline{G} \times \overline{G}$.

Integrando termine a termine la serie uniformemente convergente (4.13) e tenendo conto della normalizzazione delle autofunzioni, si ottiene la formula

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_G \int_G |\mathcal{K}(x,y)|^2\,dxdy. \tag{4.14}$$

c. Sviluppo bilineare di un nucleo continuo hermitiano. Studiamo la convergenza della serie (4.11) per $p = 1$, dimostriamo cioè che *un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ può essere sviluppato in una serie bilineare rispetto alle sue autofunzioni*

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}, \tag{4.15}$$

convergente uniformemente in $L_2(G)$ rispetto a $y \in \overline{G}$, e cioè

$$\lim_{p\to+\infty} \max_{y\in\overline{G}} \left\| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k} \right\|_2 = 0. \tag{4.16}$$

L'uguaglianza (4.12), per $p = 1$, mostra che, per ogni $y \in \overline{G}$, i coefficienti del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ in termini del sistema ortogonale $\{\varphi_k(x)\}$ sono uguali a $\varphi_k(x)/\lambda_k$. Perciò, utilizzando l'ortonormalità delle autofunzioni $\varphi_k(x)$ [cioè $(\varphi_k, \varphi_j) = \delta_{kj}$], si ottiene l'uguaglianza

$$\left\| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k} \right\|_2^2 = \int_G |\mathcal{K}(x, y)|^2\, dx - \sum_{k=1}^{p} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2}, \qquad y \in \overline{G},$$

da cui, in virtù della convergenza uniforme della serie (4.13), concludiamo che la serie bilineare (4.15) converge al nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ nel senso della (4.16).

Dalla (4.16) segue, in particolare, che la serie (4.15) converge al nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ in $L_2(G \times G)$, e cioè

$$\lim_{p\to+\infty} \int_G \int_G \left| \mathcal{K}(x, y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k} \right|^2 dxdy = 0. \tag{4.17}$$

Per la forma bilineare (Kf, g) dimostriamo la formula

$$(Kf, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)\overline{(g, \varphi_k)}}{\lambda_k}, \qquad f, g \in L_2(G). \tag{4.18}$$

Infatti, visto che $f \in L_2(G)$ abbiamo, in base al teorema di Hilbert-Schmidt,

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

ed inoltre, questa serie è uniformemente convergente su $\overline{G}$. Molteplicando questa serie per una funzione $\overline{g}$ appartenente a $L_2(G)$ (e, di conseguenza, una funzione che è assolutamente integrabile su $\overline{G}$), ed integrando termine a termine questa serie, si ottiene la formula (4.18):

$$(Kf, g) = \int_G (Kf)(x)\overline{g(x)}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \int_G \varphi_k(x)\overline{g(x)}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)\overline{(g, \varphi_k)}}{\lambda_k}.$$

Ponendo $f = g$ nella formula (4.18), si ottiene una rappresentazione della forma quadratica (Kf, f) nella forma

$$(Kf, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k}, \qquad f \in L_2(G). \tag{4.19}$$

La formula (4.19) rappresenta una generalizzazione della formula di riduzione agli assi principali della forma quadratica con un numero finito di variabili.

d. Soluzione di un'equazione integrale non omogenea con nucleo continuo hermitiano. Costruiamo la soluzione dell'equazione integrale non omogenea

$$\varphi = \lambda K\varphi + f \tag{4.20}$$

con nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$.

Se $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, *e* $f \in C(\overline{G})$, *la soluzione* (*unica*) φ *dell'equazione integrale* (4.20) *può essere rappresentata nella forma di una serie che è uniformemente convergente su* $\overline{G}$ (*formula di Schmidt*):

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + f(x). \tag{4.21}$$

Infatti, per $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, una soluzione dell'equazione (4.20) esiste ed è unica in $C(\overline{G})$ per un termine noto $f \in C(\overline{(G)})$ qualsiasi. Per il teorema di Hilbert-Schmidt la funzione $K\varphi$ può essere sviluppata in una serie uniformemente convergente in termini delle autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}(x, y)$. Si ha quindi

$$\varphi = \lambda K\varphi + f = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k + f. \tag{4.22}$$

Calcoliamo i coefficienti (φ, φ_k). Dall'equazione (4.20) abbiamo

$$(\varphi, \varphi_k) = \lambda(K\varphi, \varphi_k) + (f, \varphi_k) = \lambda(\varphi, K\varphi_k) + (f, \varphi_k) = \frac{\lambda}{\lambda_k}(\varphi, \varphi_k) + (f, \varphi_k)$$

e, di conseguenza,

$$(\varphi, \varphi_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}(f, \varphi_k), \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

da cui, in virtù della (4.22), segue la formula di Schmidt (4.21).

Conformemente al teorema di Hilbert-Schmidt si ha

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

ed inoltre la serie è uniformemente convergente su $\overline{G}$. Perciò la formula di Schmidt (4.21) assume la seguente forma:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x) + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k-\lambda)}\varphi_k(x) + f(x) \\ &= \lambda \int_G \mathcal{K}(x,y) f(y)\, dy + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_k)}{\lambda_k(\lambda_k-\lambda)}\varphi_k(x) + f(x). \qquad (4.23)\end{aligned}$$

Inoltre, dalla convergenza uniforme della serie bilineare (4.11), per $p = 2$, segue la convergenza uniforme della serie bilineare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k-\lambda)}$$

e la sua somma è una funzione continua rispetto a $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$, $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, e meromorfa rispetto a λ con poli semplici λ_k. Di conseguenza, per $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \cdots$, nella formula (4.23) si può invertire l'ordine di sommatoria e d'integrazione, ottenendo come risultato

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \left[\mathcal{K}(x,y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k-\lambda)} \right] f(y)\, dy + f(x). \qquad (4.24)$$

D'altra parte, secondo il Teorema 1.3, per λ piccoli, la soluzione dell'equazione (4.20) può essere espressa in termini del risolvente $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$ del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$, mediante la formula (1.17). Di conseguenza,

$$\mathcal{R}(x,y;\lambda) = \mathcal{K}(x,y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k-\lambda)}. \qquad (4.25)$$

Dunque, il risolvente $\mathcal{R}(x,y;\lambda)$ di un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x,y)$ ammette un prolungamento meromorfo in tutto il piano della variabile complessa λ con poli semplici λ_k e con residui uguali a

$$-\sum_{i=0}^{r_k-1} \varphi_{k+i}(x)\overline{\varphi_{k+i}(y)}, \qquad (4.26)$$

dove $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_{k+r_k-1}$ sono le autofunzioni del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ corrispondenti a λ_k e r_k è la molteplicità di λ_k.

Utilizzando l'uguaglianza (4.15), riscriviamo la formula (4.25) come segue:

$$\mathcal{R}(x,y;\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k - \lambda}, \qquad (4.27)$$

e la serie bilineare converge in $L_2(G \times G)$.

La formula (4.21) resta anche valida per $\lambda = \lambda_j$ se, conformemente al terzo teorema di Fredholm, si ha

$$(f, \varphi_{j+i}) = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots, r_j - 1.$$

In questo caso la soluzione dell'equazione (4.20) non è unica e la sua soluzione generale è data dalla formula

$$\varphi(x) = \lambda_j \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_j}}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + f(x) + \sum_{i=0}^{r_j - 1} c_i \varphi_{j+i}(x), \tag{4.28}$$

dove c_i sono costanti arbitrarie.

e. Nuclei definitivi positivi. Un nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è detto *definito positivo* se il corrispondente operatore K è *positivo*, e cioè:

$$(Kf, f) \geq 0, \qquad f \in L_2(G).$$

Ogni nucleo definito positivo $\mathcal{K}(x, y)$ è hermitiano. Infatti, per $f, g \in L_2(G)$ si ha

$$0 \leq (K[f + ig], f + ig) = (Kf, f) + i\,[(Kg, f) - (Kf, g)] + (Kg, g),$$

e quindi $(Kg, f) = (Kf, g)$, cioè K è hermitiano. In tal caso anche il suo nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è hermitiano.

Affinchè un nucleo continuo hermitiano $\mathcal{K}(x, y)$ sia definito positivo, è necessario e sufficiente che tutti i suoi autovalori λ_k siano positivi. Infatti, se $\lambda_k > 0$ per ogni autovalore λ_k, in virtù della (4.19) si ha $(Kf, f) \geq 0$, $f \in L_2(G)$, in modo che il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è definito positivo. Inversamente, se il nucleo $\mathcal{K}(x, y)$ è definito positivo, si ha

$$\frac{1}{\lambda_k} = (K\varphi_k, \varphi_k) \geq 0,$$

cioè $\lambda_k > 0$.

Se $\mathcal{K}(x, y)$ è un nucleo continuo definito positivo, è valido il seguente principio variazionale:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ (f, \varphi_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, k-1}} \frac{(Kf, f)}{\|f\|_2}, \qquad k = 1, 2, \cdots, \tag{4.29}$$

ed il supremum nella (4.29) *è ottenuto su una qualunque autofunzione corrispondente all'autovalore λ_k*. Infatti, utilizzando la formula (4.19) e tenendo conto delle disuguaglianze $\lambda_i \geq \lambda_k > 0$, $i \geq k$, per tutte le $f \in L_2(G)$ tali che $(f, \varphi_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, k - 1$, si ottiene

$$\frac{(Kf, f)}{\|f\|_2^2} = \frac{1}{\|f\|_2^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_i)|^2}{\lambda_i} \leq \frac{1}{\lambda_k \|f\|_2^2} \sum_{i=k}^{\infty} |(f, \varphi_i)|^2,$$

e, quindi, in virtù della disuguaglianza di Bessel, è valida la seguente disuguaglianza:

$$\frac{(Kf,f)}{\|f\|_2^2} \leq \frac{1}{\lambda_k}. \tag{4.30}$$

D'altra parte, per $f = \varphi_k$ abbiamo

$$\frac{(K\varphi_k,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|_2^2} = \frac{1}{\lambda_k}. \tag{4.31}$$

La disuguaglianza (4.30) e l'uguaglianza (4.31) stabiliscono la validità del principio variazionale (4.29).

Ponendo nella (4.29) $k = 1$, si ottiene

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f\in L_2(G)} \frac{(Kf,f)}{\|f\|_2^2}. \tag{4.32}$$

f. Teoremi di Jentsch e di Perron-Frobenius. Molti problemi della fisica matematica sono riducibili ad equazioni integrali con nucleo reale. Siccome il coniugato $\overline{\varphi}$ di una autofunzione φ corrispondente all'autovalore λ è un'autofunzione correspondente all'autovalore $\overline{\lambda}$ [cioè, $\varphi = \lambda K\varphi$ implica $\overline{\varphi} = \overline{\lambda}K\overline{\varphi}$], le autofunzioni di un nucleo reale corrispondenti ad un autovalore reale si possono scegliere reali. In particolare, tutte le autofunzioni di un nucleo reale e simmetrico [cioè, $\mathcal{K}(x,y) = \mathcal{K}(y,x)$ reale] si possono scegliere reali.

Diremo *nucleo positivo* il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$, se $\mathcal{K}(x,y) > 0$ per $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$. In tal caso esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mathcal{K}(x,y) \geq \varepsilon$, $(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}$. Evidentemente, se il nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ è positivo, sono anche positivi tutti i suoi nuclei iterati $\mathcal{K}_p(x,y)$.

Teorema 4.2 [Teorema di Perron-Frobenius]. *Se un nucleo continuo $\mathcal{K}(x,y)$ è positivo, esiste $\lambda > 0$ tale che λ è autovalore di K, λ è semplice, la corrispondente autofunzione è positiva, tutti gli altri autovalori di K sono maggiori di λ in valore assoluto, e λ è l'unico autovalore a cui corrisponde un'autofunzione positiva.*

La parte della dimostrazione più difficile è l'esistenza dell'autovalore positivo. Ciò si basa su qualche generalizzazione del teorema del punto fisso di Brouwer.[3] Noi dimostriamo soltanto due casi particolari: il caso di un nucleo positivo e simmetrico [il Teorema di Jentsch] e un caso in cui il nucleo è positivo e degenere.

Teorema 4.3 [Teorema di Jentsch]. *Se un nucleo simmetrico continuo $\mathcal{K}(x,y)$ è positivo, il più piccolo autovalore λ_1 di K è semplice e la corrispondente autofunzione è positiva.*

[3] Sia $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$. Allora ogni funzione continua $f : B_n \to B_n$ ha almeno un punto fisso, cioè esiste $y \in B_n$ tale che $f(y) = y$. Siccome B_{n-1} è topologicamente equivalente al simplesso $D_n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_i \geq 0,\ x_1 + \cdots + x_n = 1\}$, il teorema di Brouwer vale anche per le funzioni continue $f : D_n \to D_n$.

Dimostrazione. Sia λ_1 il più piccolo autovalore di K in valore assoluto e sia φ_1 una corrispondente autofunzione. Allora φ_1 è una autofunzione corrispondente all'autovalore non negativo λ_1^2 del nucleo continuo positivo $\mathcal{K}_2(x,y)$. In tal caso

$$\frac{(K^2|\varphi_1|,|\varphi_1|)}{\||\varphi_1|\|_2^2} = \frac{1}{\|\varphi_1\|_2^2}\int_G\int_G \mathcal{K}_2(x,y)|\varphi_1(x)||\varphi_1(y)|\,dxdy$$
$$> \frac{1}{\|\varphi_1\|_2^2}\int_G\int_G \mathcal{K}_2(x,y)\varphi_1(x)\varphi_1(y)\,dxdy = \frac{(K^2\varphi_1,\varphi_1)}{\|\varphi_1\|_2^2} = \frac{1}{\lambda_1^2},$$

il che contraddice al principio variazionale (4.32) se esiste $(x,y) \in \overline{G}\times\overline{G}$ tale che $\varphi_1(x)\varphi_1(y) < 0$. Quindi $\varphi_1(x)$ non cambia segno. Diciamo che $\varphi_1(x) \geq 0$ per $x \in \overline{G}$.

Dimostriamo che la funzione $\varphi_1(x)$ non può annularsi nella regione G e, quindi, può essere scelta positiva in G. Infatti, nel caso contrario esiste un punto $x' \in \overline{G}$ tale che

$$\varphi_1(x') = \lambda_1^2\int_G \mathcal{K}_2(x',y)\varphi_1(y)\,dy = 0,$$

da cui, in virtù della condizione $\mathcal{K}_2(x,y) > 0$, segue la contraddizione: $\varphi_1(y) \equiv 0$, $y \in \overline{G}$.

Dal fatto che $\varphi_1(x)$ è positiva segue che anche λ_1 è positivo, poichè $\mathcal{K}(x,y) > 0$ e $\lambda_1 = K\varphi_1/\varphi_1 > 0$.

Dimostriamo ora la semplicità di λ_1. Se ψ fosse un'altra autofunzione del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ corrispondente all'autovalore λ_1, esisterebbe $t > 0$ tale che $\varphi - t\psi \geq 0$. Sia $t_0 > 0$ un numero tale che $\varphi - t_0\psi \geq 0$ e $\varphi - t\psi \not\geq 0$ per $t > t_0$. Allora esiste $\alpha > 0$ tale che $K(\varphi - t_0\psi) \geq \alpha\phi$. In tal caso

$$\varphi - t_0\psi = \lambda_1 K(\varphi - t_0\psi) \geq \lambda_1\alpha\varphi = \lambda_1\alpha(\varphi - t_0\psi) + \lambda_1\alpha t_0\psi \geq \lambda_1\alpha t_0\psi,$$

e quindi $\varphi - (1+\lambda_1\alpha)t_0\psi \geq 0$. Contraddizione. Allora risulta la semplicità dell'autovalore λ_1. □

Dimostriamo ora il teorema di Perron-Frobenius soltanto in un caso dove il nucleo è degenere. Supponiamo che $\mathcal{K}(x,y)$ abbia la forma (2.3), dove le funzioni f_i e g_i $(i = 1,\cdots,N)$ sono strettamente positive. Seguendo il metodo del paragrafo 2.a, arriviamo dall'equazione integrale $\varphi = \lambda K\varphi$ al sistema lineare

$$c_k = \lambda\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ki}c_i, \qquad k = 1,2,\cdots,N,$$

dove $\alpha_{ki} = \int_G g_k(x)f_i(x)\,dx > 0$ $(i,k = 1,\cdots,N)$. Quindi gli autovalori del nucleo $\mathcal{K}(x,y)$ sono esattamente i valori λ per cui la matrice $A = (\alpha_{ki})_{k,i=1}^N$ soddisfa $\det(I - \lambda A) = 0$.

Osserviamo adesso che tutti gli elementi della A sono positivi. In tal caso esiste $\lambda > 0$ tale che $\det(I - \lambda A)$, secondo il teorema di Frobenius dell'algebra

lineare.[4] Infatti, sia D_N il simplesso

$$D_N = \{x = (x_1, \cdots, x_N) : x_1 \geq 0, \cdots, x_N \geq 0, x_1 + \cdots + x_N = 1\}.$$

Definiamo la funzione continua $f : D_N \to D_N$ definita dalla relazione

$$f(x) = \frac{Ax}{\sum_{i=1}^{N} (Ax)_i},$$

dove il denominatore è positivo. Secondo il teorema del punto fisso di Brouwer esiste $y = (y_1, \cdots, y_N) \in D_N$ tale che $f(y) = y$. Ponendo $\lambda = \left[\sum_{i=1}^{N} (Ay)_i\right]^{-1}$, dove $\lambda > 0$, otteniamo

$$y_1 \geq 0, \qquad y_N \geq 0, \qquad y_1 + \cdots + y_N = 1, \qquad y = \lambda A y,$$

dove $\lambda > 0$. Siccome $c_i = (\varphi, g_i)$ $(i = 1, \cdots, N)$, troviamo la seguente espressione per l'autofunzione corrispondente a λ:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} y_i f_i(x), \qquad x \in \overline{G}.$$

A Funzioni analitiche

Nel presente corso faremo uso di alcune proprietà (da discutere in questo paragrafo) delle funzioni analitiche, la cui teoria [1] si studia nel corso di Istituzioni di Analisi Superiore.

Sia $f : G \to \mathbb{C}$, dove G è un aperto in $\mathbb{C}$. Allora f si dice *analitica* se è derivabile rispetto alla variabile complessa $z \in G$ e la sua derivata f' è continua. In altre parole, per ogni $w \in G$ esiste un numero complesso $f'(w)$ tale che

$$f(z) = f(w) + (z - w)\left[f'(w) + \varepsilon(z)\right],$$

dove $|\varepsilon(z)| \to 0$ se $|z - w| \to 0$ per $z \in G$; inoltre, la funzione $f' : G \to \mathbb{C}$ è continua. Una funzione analitica è continua. Inoltre valgono le regole per l'analiticità della somma, del prodotto e della composta di due funzioni analitiche analoghe quelle che valgono per le funzioni derivabili in una variabile reale.

Sia $f : G \to \mathbb{C}$ una funzione definita su un aperto G in $\mathbb{C}$ che è rappresentabile come la somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza positiva in ogni punto $w \in G$. Ciòe, per ogni $w \in G$ esistono coefficienti $\{a_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ ed un numero positivo $R(w)$ tali che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w)(z - w)^n, \qquad |z - w| < R(w). \tag{A.1}$$

[4] Ogni matrice quadrata per cui tutti gli elementi sono positivi, ha un autovalore positivo [Frobenius (1877)].

In tal caso f è analitica indefinitamente derivabile:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a_{n+k}(w)(z-w)^n, \qquad |z-w| < R(z_0),$$

mentre $a_n(w) = f^{(n)}(w)/(n!)$. D'altra parte, una funzione analitica $f : G \to \mathbb{C}$ si può scrivere nella forma (A.1) per un opportuno $R(w) > 0$ per ogni $w \in G$.

Sia $f : G \to \mathbb{C}$ una funzione analitica su un aperto G in $\mathbb{C}$. All'aperto $G \subset \mathbb{C}$ facciamo corrispondere un aperto $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$ tale che $(x, y) \in \tilde{G}$ se e solo se $x + i\,y \in G$. Ora definiamo $u, v : \tilde{G} \to \mathbb{R}$ dalla formula

$$f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y), \qquad (x, y) \in \tilde{G}.$$

Allora $u, v : \tilde{G} \to \mathbb{R}$ sono differenziabili (nel senso del corso di Analisi Matematica II), esiste un numero infinito di derivate parziali successive di u e v rispetto ad x ed y, e valgono le cosiddette *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{A.2}$$

In tal caso, abbiamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0. \tag{A.3}$$

Usando l'uguaglianza (simbolica) $(u + iv)(dx + i\,dy) = (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy)$, si vede facilmente (dalla (A.2)) che le forme differenziali $u\,dx - v\,dy$ e $v\,dx + u\,dy$ sono ambedue chiuse. Quindi, se $\tilde{G}$ (oppure G) è semplicemente connesso, queste due forme differenziali sono esatte. Di conseguenza, se G è semplicemente connesso e γ è una curva chiusa e rettificabile (cioè, di lunghezza ben definita e finita) in G, allora

$$\int_{\tilde{\gamma}} (u\,dx - v\,dy) = 0, \qquad \int_{\tilde{\gamma}} (v\,dx + u\,dy) = 0,$$

dove $\tilde{\gamma} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + i\,y \in \gamma\}$. Ciò implica che

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{\tilde{\gamma}} (v\,dx + u\,dy) = 0. \tag{A.4}$$

L'affermazione (A.4) si chiama il *Teorema di Cauchy*. È il risultato più importante della teoria delle funzioni analitiche. Osserviamo che purtroppo il ragionamento seguito non è una dimostrazione esaustiva e quindi completamente rigorosa.

Enunciamo adesso due altri importanti teoremi (collegati al precedente).

Teorema A.1 *Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni analitiche sull'aperto G che converga ad una funzione $f : G \to \mathbb{C}$ uniformemente in $z \in K$ per un qualunque compatto K in G. Allora f è analitica.*

Teorema A.2 *Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni analitiche sull'aperto G tale che la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converga uniformemente in $z \in K$ per un qualunque compatto K in G. Allora la sua somma rappresenta una funione analitica su G.

Ora discutiamo due risultati semplici ed importanti per le funzioni analitiche.

Teorema A.3 *Siano $f, g : G \to \mathbb{C}$ due funzioni analitiche sull'aperto connesso G tali che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in E$, dove E è un sottoinsieme di G con almeno un punto di accumulazione all'interno di G. Allora $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in G$.*

In particolare, applicando il Teorema A.3 per $g(z) \equiv 0$, si vede facilmente che una funzione analitica $f \not\equiv 0$ ha un numero finito di zeri oppure i suoi zeri si accumulano sulla frontiera di G.

Adesso enunciamo il fondamentale *Teorema di Liouville.*

Teorema A.4 *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione analitica definita sull'intero piano complesso. Allora f è non limitata oppure costante.*

La dimostrazione è abbastanza facile. Ne diamo lo schema qui di seguito. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia C_R il cerchio di centro 0 e raggio R in $\mathbb{C}$ con orientamento positivo. Allora $(2\pi i)^{-1} \int_{C_R} (z-w)^{-1}\, dz = 1$ per $w \in \mathbb{C}$ con $|w| < R$ (lo si controlli!) implica[5] che

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-w}\, dz, \qquad |w| < R.$$

Ciò comporta [perché?] che

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz, \qquad |w| < R.$$

Di conseguenza, se $|f(z)| \leq M$ per $z \in \mathbb{C}$, risulterebbe

$$|f'(w)| \leq \frac{1}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{M}{(R-|w|)^2}, \qquad R > |w|,$$

e quindi $f'(w) = 0$. Siccome $w \in \mathbb{C}$ è arbitrario, f deve essere una funzione costante.

Come corollario si afferma che una funzione analitica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con limite zero per $|z| \to +\infty$ deve annularsi in ogni $z \in \mathbb{C}$.

[5] Si scriva $f(z) = f(w) + [f(z) - f(w)]$ e si osservi che $[f(z) - f(w)]/(z-w)$ è analitica in $z \in \mathbb{C}$. Poi si applichi il Teorema di Cauchy.

Definiamo ora le funzioni meromorfe e discutiamo le loro singolarità.

In primo luogo una funzione analitica $f : G \to \mathbb{C}$ con $f \not\equiv 0$ ha un numero finito o un'infinità numerabile di zeri. Un numero complesso z_0 si dice *zero di ordine* m per f se $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ per $g : G \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e $g(z_0) \neq 0$. In altri termini, z_0 è uno zero di ordine m se e solo se $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Se G è un aperto in $\mathbb{C}$, $w \in G$ e f è analitica su $G \setminus \{w\}$, il punto w si dice *polo di ordine* m se esiste una funzione analitica $g : G \to \mathbb{C}$ con $g(w) \neq 0$ tale che $f(z) = g(z)/(z - w)^m$ per $z \in G \setminus \{w\}$.

Sia G un aperto in $\mathbb{C}$. Una funzione f si dice *meromorfa* su G se esiste un sottoinsieme finito oppure numerabile E di G senza punti di accumulazione all'interno di G tale che f sia analitica in $G \setminus E$ ed ogni punto di E sia un polo della f.

Teorema A.5 [*Principio dell'argomento*] *Sia f una funzione meromorfa nell'aperto G. Sia γ una curva chiusa, semplice e rettificabile in G che non passa per i poli e per gli zeri di f, con un orientamento tale che il sottodominio Ω di G racchiuso da γ si trova alla sinistra di γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{n} N(z_k) - \sum_{j=1}^{m} P(p_j),$$

dove $z_1, \cdots, z_n$ sono gli zeri in Ω, $p_1, \cdots, p_m$ sono i poli in Ω, $N(z_k)$ è l'ordine dello zero z_k e $P(p_j)$ è l'ordine del polo p_j.

Dimostrazione. Posta

$$f(z) = g(z) \frac{\prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{N(z_k)}}{\prod_{j=1}^{m} (z - p_j)^{P(p_j)}},$$

dove $g(z)$ è una funzione meromorfa in G che non ha zeri nè poli in Ω, si ha

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{N(z_k)}{z - z_k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{P(p_j)}{z - p_j} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

dove $g'(z)/g(z)$ è continua in $\Omega \cup \gamma$ e analitica in Ω. Il teorema segue quindi dal Teorema di Cauchy. □

Corollario A.6 [*Teorema di Rouché*] *Siano f e g funzioni meromorfe nell'aperto G. Sia γ una curva chiusa, semplice e rettificabile in G che non passa per i poli e per gli zeri di f e g, con un orientamento tale che il sottodominio Ω di G racchiuso da γ si trova alla sinistra di γ. Se*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \qquad z \in \gamma, \tag{A.5}$$

allora

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

dove Z_f e P_f sono il numero degli zeri e dei poli della f in Ω e Z_g e P_g sono il numero degli zeri e dei poli della g in Ω.

Dimostrazione. L'ipotesi (A.5) implica che f/g manda γ nella palla $\{w \in \mathbb{C} : |w-1| < 1\}$. In questa palla si può definire $\log(w)$ come funzione analitica tale che $\log(w) \to 0$ se $w \to 1$. In tal caso, $(\log(f/g))' = (f/g)'/(f/g) = (f'/f) - (g'/g)$. Quindi, utilizzando il Teorema di Cauchy e il Teorema A.5, si ha

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g).$$

□

Usando il Teorema di Rouché si trova facilmente una dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Sia $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ un polinomio complesso di grado n e con coefficiente principale 1. Applichiamo il Teorema di Rouché per $f(z) = p(z)$ e $g(z) = z^n$. Siccome esiste $R > 0$ tale che

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| = \left| 1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \right| < 1, \qquad |z| = R,$$

si può applicare il Teorema di Rouché per $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Abbiamo $Z_g = n$ e $P_f = P_g = 0$. Quindi $Z_f = n$; di conseguenza $p(z)$ ha n zeri nel dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

B Accoppiamento Matriciale

Teorema B.1 *Siano X e Y due spazi di Banach e siano $T \in \mathcal{L}(Y, X)$ e $S \in \mathcal{L}(X, Y)$. Allora $TS \in \mathcal{L}(X)$ e $ST \in \mathcal{L}(Y)$ hanno lo stesso spettro tranne nel punto zero.*

Dimostrazione. Per $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ si verifica facilmente che

$$\begin{pmatrix} \lambda - TS & 0 \\ 0 & I_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_X - \lambda^{-1} TS & -T \\ \lambda^{-1} S & I_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_X & 0 \\ 0 & \lambda - ST \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_X - TS & T \\ -\lambda^{-1} S & \lambda^{-1} I_Y \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{pmatrix} I_X - \lambda^{-1} TS & -T \\ \lambda^{-1} S & I_Y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_X & T \\ -\lambda^{-1} S & I_Y - \lambda^{-1} ST \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix} \lambda I_X - TS & T \\ -\lambda^{-1} S & \lambda^{-1} I_Y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} I_X & -T \\ \lambda^{-1} S & \lambda I_Y - ST \end{pmatrix}.$$

Siccome i due fattori esterni nella parte a destra sono invertibili per $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, risulta che, per $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I_X - TS$ è invertibile se e solo se lo è anche $\lambda I_Y - ST$. Quindi

$$\sigma(TS) \setminus \{0\} = \sigma(ST) \setminus \{0\}, \qquad \sigma_p(TS) \setminus \{0\} = \sigma_p(ST) \setminus \{0\},$$
$$\sigma_c(TS) \setminus \{0\} = \sigma_c(ST) \setminus \{0\}, \qquad \sigma_r(TS) \setminus \{0\} = \sigma_r(ST) \setminus \{0\}.$$

Inoltre gli autovalori di TS e ST che sono diversi da zero hanno tutti la stessa molteplicità. □

Discutiamo ora i teoremi di Fredholm nel caso di un nucleo degenere. Per $X = C(\overline{G})$ e $Y = \mathbb{C}^N$ poniamo

$$T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N, C(\overline{G})), \qquad T \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i,$$

$$S \in \mathcal{L}(C(\overline{G}), \mathbb{C}^N), \qquad S\varphi = \begin{pmatrix} (\varphi, g_1) \\ \vdots \\ (\varphi, g_N) \end{pmatrix}.$$

Allora

$$K = TS, \qquad A = ST.$$

Dunque $I - \lambda K$ è invertibile su $C(\overline{G})$ se e solo se $I - \lambda A$ è invertibile su $\mathbb{C}^N$.

Riferimenti bibliografici

[1] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer, Berlin, 1975.

[2] V.S. Vladimirov, *Equazioni della Fisica Matematica*, Edizioni Mir, Mosca, 1985.