TRASFORMATA DI FOURIER E LE FUNZIONI ARMONICHE

Nella prima parte di questo capitolo introduciamo la trasformata di Fourier e calcoliamo la funzione di Green dell'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n$. Nella seconda parte introduciamo le funzioni armoniche e discutiamo le sue proprietà. Discutiamo anche le funzioni sferiche.

I TRASFORMATA DI FOURIER

1 Trasformata di Fourier negli spazi L_1 e L_2.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione sommabile. Allora l'integrale (di Lebesgue)

$$F[f](\xi) = \int f(x) e^{i(\xi,x)}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

è assolutamente convergente e $|F[f](\xi)| \leq \|f\|_1$, dove $\|f\|_1 = \int |f(x)|\, dx$ è la norma L_1 di f. In tal caso si definisce una funzione $\xi \mapsto F[f](\xi)$ su $\mathbb{R}^n$ che si chiama la *trasformata di Fourier* della f. Dal teorema della convergenza dominata segue che $F[f](\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposizione I.1 *Sia $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Allora $F[f](\xi)$ è continua in $\xi \in \mathbb{R}^n$ e tende a zero se $|\xi| \to +\infty$.*[1]

Dimostrazione. La continuità di $F[f](\xi)$ al variare di ξ segue dal teorema della convergenza dominata (infatti, dal Lemma 6.9.1 in Giusti II). La seconda parte segue approssimando $(\operatorname{Re} f)^{\pm}$ e $(\operatorname{Im} f)^{\pm}$ da una successione crescente di funzioni semplici sommabili e applicando il teorema di Beppo-Levi. $\square$

[1] La seconda parte si chiama il Lemma di Riemann-Lebesgue.

Siano $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Allora $F[f], F[g] \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. In tal caso risulta per $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(F[f], g) &= \int \left[\int f(x) e^{i(x,\xi)}\, dx\right] g(\xi)\, d\xi \\ &= \int f(x) \left[\int g(\xi) e^{i(\xi,x)}\, d\xi\right] dx = (f, F[g]);\end{aligned} \tag{I.1}$$

$$\begin{aligned}(F[f], g)_c &= \int \left[\int f(x) e^{i(x,\xi)} dx\right] \overline{g(\xi)} d\xi \\ &= \int f(x) \left[\overline{\int g(\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi}\right] dx = (f, F[g](-\xi))_c,\end{aligned} \tag{I.2}$$

dove il secondo passaggio è giustificato grazie al teorema della convergenza dominata. Inoltre, $(\cdot,\cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso di $L_2(\mathbb{R}^n)$, mentre $(\cdot,\cdot)$ è quello reale.

Siano $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Allora il teorema di Fubini dimostra che il prodotto di convoluzione

$$(f * g)(x) = \int f(y) g(x-y)\, dy = \int f(x-y) g(y)\, dy$$

conduce ad una funzione $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dal teorema di Fubini segue che

$$f * g = g * f, \qquad (f * g) * h = f * (g * h),$$

dove $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Applicando la trasformazione $z = x - y$ con y fissato si ha

$$\begin{aligned}F[f * g](\xi) &= \int \left(\int f(y) g(x-y)\, dy\right) e^{i(x,\xi)}\, dx \\ &= \int \left(\int f(y) e^{i(y,\xi)} g(z) e^{i(z,\xi)}\, dy\right) dz = F[f](\xi) F[g](\xi).\end{aligned} \tag{I.3}$$

In altre parole, la trasformata di Fourier manda $L_1(\mathbb{R}^n)$ con il prodotto di convoluzione in $C(\mathbb{R}^n)$ con il prodotto algebrico usuale.

Consideriamo ora la trasformata di Fourier su $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema I.2 (*di Plancherel*). *Sia* $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$. *Allora*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |F[f](\xi)|^2 \, d\xi = \int |f(x)|^2 \, dx. \tag{I.4}$$

Inoltre, F *ammette un'estensione lineare ad* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *che soddisfa* (I.4) *per ogni* $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *ed è un operatore invertibile su* $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Prima diamo la dimostrazione per $n = 1$.

Sia f una funzione continua e regolare a tratti con supporto in $(-\pi, \pi)$. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f in $x \in [-\pi, \pi]$ (vedi Giusti II, Teorema 2.5.2):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}\,(nx)\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}, \end{aligned}$$

dove $c_n = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = (2\pi)^{-1} F[f](-n)$ e

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx &= \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)\right) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F[f](-n)|^2. \end{aligned}$$

Siccome $c_n[e^{-ixt} f] = (2\pi)^{-1} F[f](-n-t)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}$ e $|f(x)|^2 = |e^{-ixt} f(x)|^2$, risulta

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx &= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |F[f](-n-t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi. \end{aligned}$$

Se f ha supporto compatto in $\mathbb{R}$, si scelga $c > 0$ tale che $g(x) = c^{1/2} f(cx)$ ha supporto in $(-\pi, \pi)$. In tal caso

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 \, dx$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F[g](\xi)|^2 \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi.$$

Se $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, approssimiamo f da funzioni continue e regolari a tratti con supporto compatto e troviamo la stessa relazione.

L'equazione (I.4) dimostra che F può essere estesa ad un operatore lineare F da $L_2(\mathbb{R})$ in $L_2(\mathbb{R})$ che soddisfa (I.4). Infine, siccome F manda il sottospazio denso $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ di $L_2(\mathbb{R})$ nel sottospazio denso $C(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ di $L_2(\mathbb{R})$ e l'immagine di F è chiuso, F è un operatore invertibile su $L_2(\mathbb{R})$.

La generalizzazione ad $n \in \mathbb{N}$ segue applicando n trasformazioni di Fourier unidimensionali in seguito. □

Corollario I.3 *Sia $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Allora l'operatore inverso ha la forma*

$$F^{-1}[f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f](-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x) e^{-i(x,\xi)} \, dx. \tag{I.5}$$

Dimostrazione. Si ricordi che $(\cdot, \cdot)_c$ è il prodotto scalare complesso in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Allora per $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ segue

$$(F[f], g)_c = (F[f], \overline{g}) = (f, F[\overline{g}]) = (f, F[g](-\xi))_c,$$

e questa relazione si generalizza per $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Dalla (I.4) segue che

$$(f, g)_c = (2\pi)^{-n} (F[f], F[g])_c = (2\pi)^{-n} (f, F[F[g]](-\xi))_c,$$

dove $f, g \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Siccome f, g sono arbitrarie, è valida la (I.5). □

2 Funzioni Generalizzate di Crescita Lenta

Uno dei metodi più efficaci di risoluzione dei problemi della fisica matematica è il metodo delle trasformate di Fourier. Nel prossimo paragrafo sarà esposta la teoria della trasformata di Fourier per le cosidette funzioni generalizzate di crescita lenta (distribuzioni rinvenute). Per questa ragione si deve prima studiare la classe delle funzioni generalizzate di crescita lenta.

2.1 Spazio delle funzioni fondamentali $\mathcal{S}$

Riportiamo nell'insieme delle funzioni fondamentali $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tutte le funzioni della classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ decrescenti, per $|x| \to +\infty$, con tutte le derivate più rapidamente di ogni potenza non negativa di $1/|x|$. Definiamo la convergenza in $\mathcal{S}$ come segue: la successione delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$, da $\mathcal{S}$ converge ad una funzione $\varphi \in \mathcal{S}$, cioè $\varphi_k \to \varphi$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$, se, per tutti i valori dei moltiindici[2] α e β, si ha

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) - x^\beta D^\alpha \varphi(x) \right| = 0.$$

Le operazioni di derivazione $D^\beta \varphi(x)$ e di sostituzione lineare non singolare di variabili $\varphi(Ay+b)$ (dove $\det A \neq 0$) sono continue da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$. Questo segue direttamente dalla definizione di convergenza nello spazio $\mathcal{S}$.

D'altro canto, la moltiplicazione per una funzione infinitamente derivabile può far uscire all'esterno dell'insieme $\mathcal{S}$, per esempio $e^{-|x|^2} e^{|x|^2} = 1 \notin \mathcal{S}$.

Supponiamo che una funzione $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ cresca all'infinito insieme con tutte le derivate successive non più rapidamente del polinomio

$$|D^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{m\alpha}. \tag{I.6}$$

Indichiamo con θ_M l'insieme di queste funzioni.

L'operazione di moltiplicazione per una funzione $a \in \theta_M$ è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$. Infatti, dalla disuguaglianza (I.6) segue che, se $\varphi \in \mathcal{S}$, si ha $a\varphi \in \mathcal{S}$, e se $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$, per tutti i valori di α e β si ha

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{R}^n} x^\beta [D^\alpha (a\varphi_k)](x) = 0,$$

cioè $a\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$.

2.2 Spazio delle funzioni generalizzate di crescita lenta $\mathcal{S}'$

Si dice *funzione generalizzata di crescita lenta* ogni funzionale lineare continuo sullo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni fondamentali. Denotiamo $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'insieme di tutte le funzioni generalizzate di crescita lenta. È evidente che $\mathcal{S}'$ è un insieme lineare. Definiamo come *debole* la convergenza di una successione

[2] Se $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ e $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, allora $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ e $D^\alpha \varphi(x) = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n} \varphi(x)$. Secondo il teorema di Schwartz, l'ordine di derivazione parziale non importa. Inoltre, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

di funzionali: una successione di funzioni generalizzate $f_1, f_2, \cdots$, appartenenti a $\mathcal{S}'$, converge ad una funzione generalizzata $f \in \mathcal{S}'$, cioè $f_k \to f$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'$ se, per qualunque $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$ per $k \to \infty$. L'insieme lineare $\mathcal{S}'$ dotato di convergenza debole è detto spazio $\mathcal{S}'$ delle funzioni generalizzate di crescita lenta.

Teorema I.4 (*di Laurent Schwartz*). *Affinché un funzionale lineare f su $\mathcal{S}$ appartenga a $\mathcal{S}'$ (cioè, sia continuo su $\mathcal{S}$), è necessario e sufficiente che esistono numeri $C > 0$ e $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tali che, per qualunque $\varphi \in \mathcal{S}$, sia valida la disuguaglianza*[3]

$$|(f, \varphi)| \leq C \|\varphi\|_{(p)}, \tag{I.7}$$

dove

$$\|\varphi\|_{(p)} = \sup_{|\alpha| \leq p, x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la sufficienza, supponiamo che il funzionale lineare f su $\mathcal{S}$ soddisfi la disuguaglianza (I.7) per certi $C > 0$ e $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dimostriamo che $f \in \mathcal{S}'$. Sia $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$. Si ha allora $\|\varphi_k\|_{(p)} \to 0$ per $k \to \infty$, e quindi $|(f, \varphi_k)| \leq C \|\varphi_k\|_{(p)} \to 0$ per $k \to \infty$. Ciò significa che f è un funzionale continuo su $\mathcal{S}$.

Per dimostrare la necessità, sia $f \in \mathcal{S}'$. Dimostriamo che esistono numeri $C > 0$ e $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tali che, per qualunque $\varphi \in \mathcal{S}'$, è valida la disuguaglianza (I.7). Supponiamo, invece, che i numeri menzionati C e p non esistano. Allora esiste una successione di funzioni φ_k, $k \in \mathbb{N}$, appartenenti a $\mathcal{S}$, tali che

$$|(f, \varphi_k)| \geq l \, \|\varphi_k\|_{(k)}. \tag{I.8}$$

La successione di funzioni

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{k} \, \|\varphi_k\|_{(k)}}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

tende a zero in $\mathcal{S}$, poichè per $k \geq |\alpha|$ e $k \geq |\beta|$ si ha

$$\left| x^\beta D^\alpha \psi_k(x) \right| = \frac{\left| x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \right|}{\sqrt{k} \, \|\varphi_k\|_{(k)}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

[3]Si ricordi che $\|\varphi\|_p$ denota la norma L_p di una funzione φ.

Da ciò e dalla continuità del funzionale f su $\mathcal{S}$ segue che $(f, \psi_k) \to 0$ per $k \to \infty$. D'altro canto, la disuguaglianza (I.8) dà

$$|(f, \psi_k)| = \frac{1}{\sqrt{k}\, \|\varphi_k\|_{(k)}} |(f, \varphi_k)| \geq \sqrt{k}.$$

La contraddizione ottenuta dimostra il teorema. □

Il significato del teorema dimostrato consiste nel fatto che ogni funzione generalizzata di crescita lenta è un funzionale continuo rispetto ad una certa norma $\|\cdot\|_{(p)}$ (come si è soliti dire, ha un *ordine finito*).

2.3 Esempi di funzioni generalizzate di crescita lenta

(a) Se $f(x)$ è una funzione localmente sommabile di crescita lenta all'infinito, cioè per un certo $m \geq 0$,

$$\int |f(x)(1 + |x|)^{-m}\, dx < +\infty,$$

questa funzione definisce un funzionale regolare f appartenente a $\mathcal{S}'$ in conformità con la regola

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Ma non tutte le funzioni localmente sommabili definiscono una funzione generalizzata di crescita lenta, per esempio, $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

D'altro canto, non tutte le funzioni localmente sommabili appartenenti a $\mathcal{S}'$ sono di crescita lenta. Per esempio, la funzione $(\cos e^x)' = -e^x \operatorname{sen} e^x$ non è di crescita lenta, eppure definisce una funzione generalizzata da $\mathcal{S}'$ mediante la formula

$$((\cos e^x)', \varphi) = -\int (\cos e^x)\varphi'(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Utilizzando il Teorema A2.1 si può dimostrare (vedi [1]) che ogni funzione generalizzata appartenente a $\mathcal{S}'$ è una derivata (o derivata successiva) di una funzione continua di crescita lenta.

(b) Se $f \in \mathcal{S}'$, allora ogni derivata $D^\alpha f \in \mathcal{S}'$. Infatti, visto che l'operazione di derivazione $D^\alpha \varphi$ è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, il secondo membro dell'uguaglianza

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S},$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

(c) Se $f \in \mathcal{S}'$ e $\det A \neq 0$, si ha $f(Ay+b) \in \mathcal{S}'$. Infatti, dato che l'operazione di trasformazione $\varphi[A^{-1}(x-b)]$ è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, il secondo membro dell'uguaglianza

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

(d) Se $f \in \mathcal{S}'$ ed $a \in \theta_M$, si ha $af \in \mathcal{S}'$. Infatti, visto che l'operazione di molteplicazione per a appartenente a θ_M è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$, il secondo membro dell'uguaglianza

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

(e) La derivata $D^\alpha \delta$ della funzione Delta di Dirac appartiene a $\mathcal{S}'$. Infatti, il terzo membro dell'uguaglianza

$$(D^\alpha \delta, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(\delta, D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}[D^\alpha \varphi](0)$$

è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$.

3 Trasformata di Fourier delle funzioni generalizzate di crescita lenta

La proprietà rimarchevole della classe delle funzioni generalizzate di crescita lenta consiste nel fatto che l'operazione di trasformazione di Fourier non porta fuori dai limiti di questa classe.

3.1 Trasformazione di Fourier delle funzioni fondamentali appartenenti ad $\mathcal{S}$

Visto che le funzioni fondamentali appartenenti a $\mathcal{S}$ sono sommabili in $\mathbb{R}^n$, su queste funzioni è definita l'operazione F di trasformazione di Fourier

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

In questo caso la funzione $F[\varphi](\xi)$ la quale rappresenta la *trasformata di Fourier* della funzione φ, è limitata e continua in $\mathbb{R}^n$. La funzione fondamentale φ decresce all'infinito più rapidamente di qualunque potenza positiva di $1/|x|$ e perciò la sua trasformata di Fourier può essere derivata sotto il segno d'integrale un numero di volte arbitrario:

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = \int (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi), \tag{I.9}$$

da cui segue che $F[\varphi] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, possiede le stesse proprietà ogni derivata $D^\alpha \varphi$ e quindi

$$F[D^\alpha \varphi](\xi) = \int D^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi). \tag{I.10}$$

Infine, dalle formule (I.9) e (I.10) si ottiene

$$\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi) = \xi^\beta F[(ix)^\alpha \varphi](\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|} F[D^\beta (x^\alpha \varphi)](\xi). \tag{I.11}$$

Dall'uguaglianza (I.11) segue che per tutti gli α, β i valori di $\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)$ sono uniformemente limitati rispetto a $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi](\xi)| \leq \int |D^\beta (x^\alpha \varphi)|\, dx. \tag{I.12}$$

Ciò vuol dire che $F[\varphi] \in \mathcal{S}$. Dunque, la trasformata di Fourier trasforma lo spazio $\mathcal{S}$ in se stesso.

Visto che la trasformata di Fourier $F[\varphi]$ di una funzione φ appartenente a $\mathcal{S}$ è una funzione sommabile e continuamente derivabile su $\mathbb{R}^n$, allora, siccome $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$, la funzione φ è espressa in termini della sua trasformata di Fourier $F[\varphi]$ mediante l'operazione di trasformazione inversa di Fourier F^{-1}:

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \tag{I.13}$$

dove

$$F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(\xi)e^{-i(\xi,x)}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}F[\psi](-x)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(-\xi)e^{i(\xi,x)}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}F[\psi(-\xi)](x). \qquad \text{(I.14)}$$

Dalle formule (I.13) e (I.14) deriva che ogni funzione φ appartenente a $\mathcal{S}$ è la trasformata di Fourier della funzione $\psi = F^{-1}[\varphi]$ appartenente a $\mathcal{S}$, con $\varphi = F[\psi]$, e se $F[\varphi] = 0$, anche $\varphi = 0$.[4] Ciò vuol dire che la trasformazione di Fourier F trasforma $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ ed inoltre in modo univoco.

Lemma I.5 *L'operazione di trasformazione di Fourier F è continua da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to +\infty$ in $\mathcal{S}$. Allora, applicando la (I.12) alle funzioni φ_k, si ottiene per tutti gli α e β

$$|\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| \leq \int |D^\beta(x^\alpha\varphi_k)|\,dx$$
$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha\varphi_k)|(1+|x|)^{n+1}\int \frac{dy}{(1+|y|)^{n+1}},$$

da cui segue che

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi^\beta D^\alpha F[\varphi_k](\xi)| = 0,$$

cioè $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$. Il lemma è dimostrato. □

L'operazione di trasformazione inversa di Fourier F^{-1} possiede proprietà analoghe.

3.2 Trasformazione di Fourier delle funzioni generalizzate appartenenti a $\mathcal{S}'$

Assumiamo l'uguaglianza (I.1) come definizione di trasformata di Fourier $F[f]$ di qualunque funzione generalizzata di crescita lenta f:

$$(F[f],\varphi) = (f, F[\varphi]), \qquad f \in \mathcal{S}',\ \varphi \in \mathcal{S}. \qquad \text{(I.15)}$$

[4] Se $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ e $F[f] = 0$, allora $f = 0$ quasi ovunque. Per mancanza di una descrizione della classe delle trasformate di Fourier delle funzioni in $L_1(\mathbb{R}^n)$, questa proprietà non si dimostra tanto facilmente.

Verifichiamo che il secondo membro di quest'uguaglianza definisce un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$, cioè che $F[f] \in \mathcal{S}'$. Infatti, visto che $F[\varphi] \in \mathcal{S}$ per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è un funzionale (evidentemente, lineare) su $\mathcal{S}$. Supponiamo che $\varphi_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$. Per il Lemma 3.1, $F[\varphi_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}$ e quindi, in virtù del fatto che f appartiene a $\mathcal{S}'$, si ha $(f, F[\varphi_k]) \to 0$ per $k \to \infty$, di modo che il funzionale $\varphi \mapsto (f, F[\varphi])$ è continuo su $\mathcal{S}$. Dunque, l'operazione di trasformazione di Fourier F porta lo spazio $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$.

Inoltre, F è un'operazione lineare e continua da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$. La linearità di F è evidente. Dimostriamo la sua continuità. Supponiamo che $f_k \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'$. In questo caso, in base alla (I.15), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$(F[f_k], \varphi) = (f_k, F[\varphi]) \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Ciò significa che $F[f_k] \to 0$ per $k \to \infty$ in $\mathcal{S}'$, cioè l'operazione F è continua da $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$.

Introduciamo in $\mathcal{S}'$ ancora un'operazione di trasformazione di Fourier che denotiamo con F^{-1}:

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-x)], \qquad f \in \mathcal{S}'. \tag{I.16}$$

Dimostriamo che l'operazione F^{-1} è un'operazione inversa di F, cioè

$$F^{-1}[F[f]] = f, \qquad F[F^{-1}[f]] = f, \qquad f \in \mathcal{S}'. \tag{I.17}$$

Infatti, dalle (I.13)-(I.16) per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$, si ottengono le uguaglianze

$$\begin{aligned}
(F^{-1}[F[f]], \varphi) &= \frac{1}{(2\pi)^n}(F[F[f](-\xi)], \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f](-\xi), F[\varphi]) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}(F[f], F[\varphi](-\xi)) = (F[f], F^{-1}[\varphi]) = (f, F[F^{-1}[\varphi]]) \\
&= (f, \varphi) = (f, F^{-1}[F[\varphi]]) = (F^{-1}[f], F[\varphi]) = (F[F^{-1}[f]], \varphi),
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le corrispondenti proprietà in $\mathcal{S}$ al sesto ed al settimo passaggio.[5] Ora seguono le formule (I.17).

Dalle formule (I.17) deriva che ogni funzione generalizzata f appartenente a $\mathcal{S}'$ è la trasformata di Fourier della funzione generalizzata $g = F^{-1}[f]$

[5] Si noti che $\mathcal{S} \subseteq L_2(\mathbb{R}^n)$.

appartenente a $\mathcal{S}'$, con $f = F[g]$, e se $F[f] = 0$, si ha anche $f = 0$. Abbiamo, quindi, dimostrato che le trasformazioni di Fourier F e F^{-1} trasformano $\mathcal{S}'$ in $\mathcal{S}'$ in modo biunivoco e continuo.

Supponiamo che $f = f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ dove $x \in \mathbb{R}^n$ ed $y \in \mathbb{R}^m$. Introduciamo la trasformata di Fourier $F_x[f]$ rispetto alle variabili $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, ponendo per qualunque $\varphi = \varphi(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$

$$(F_x[f], \varphi) = (f, F_\xi[\varphi]). \tag{I.18}$$

Come nel Lemma 3.1, si stabilisce che

$$F_\xi[\varphi](x, y) = \int \varphi(\xi, y) e^{i(\xi, x)}\, d\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$$

e l'operazione $F_\xi[\varphi]$ è continua da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, di modo che la formula (I.18) definisce realmente una funzione generalizzata $F_x[f](\xi, y)$ appartenente a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Esempio. Dimostriamo che

$$F[\delta(x - x_0)] = e^{i(\xi, x_0)}. \tag{I.19}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}(F[\delta(x - x_0)], \varphi) &= (\delta(x - x_0), F[\varphi]) = F[\varphi](x_0) \\ &= \int \varphi(\xi) e^{i(\xi, x_0)}\, d\xi = (e^{i(\xi, x_0)}, \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S}.\end{aligned}$$

Ponendo nella (I.19) $x_0 = 0$, si ottiene

$$F[\delta] = 1, \tag{I.20}$$

da cui

$$\delta = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

di modo che

$$F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi). \tag{I.21}$$

3.3 Proprietà della trasformazione di Fourier

(a) **Derivazione della trasformata di Fourier**. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f]. \tag{I.22}$$

Infatti, utilizzando la (I.10), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}(D^\alpha F[f], \varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(F[f], D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, F[D^\alpha \varphi]) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(f, (-ix)^\alpha F[\varphi]) = ((ix)^\alpha f, F[\varphi]) = (F[(ix)^\alpha f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (I.22).

In particolare, ponendo nella (I.22) $f = 1$ ed utilizzando la formula (I.21), abbiamo

$$F[x^\alpha](\xi) = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha F[1](\xi) = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi). \tag{I.23}$$

(b) **Trasformata di Fourier della derivata**. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f]. \tag{I.24}$$

Infatti, utilizzando la formula (I.9), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}(F[D^\alpha f], \varphi) &= (D^\alpha f, F[\varphi]) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha F[\varphi]) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(f, F[(i\xi)^\alpha \varphi]) = (-1)^{|\alpha|}(F[f], (i\xi)^\alpha \varphi) = ((-i\xi)^\alpha F[f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (I.24).

(c) **Trasformata di Fourier di una traslazione**. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$F[f(x - x_0)] = e^{i(x_0,x)} F[f]. \tag{I.25}$$

Infatti, abbiamo per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}(F[f(x - x_0)], \varphi) &= (f(x - x_0), F[\varphi]) = (f, F[\varphi](x + x_0)) \\ &= (f, F[\varphi e^{i(x_0,\xi)}]) = (F[f], e^{i(x_0,\xi)}\varphi) = (e^{i(x_0,\xi)} F[f], \varphi),\end{aligned}$$

da cui segue la formula (I.25).

(d) **Traslazione della trasformata di Fourier**. Se $f \in \mathcal{S}'$, si ha

$$F[f](\xi + \xi_0) = F[e^{i(\xi_0,x)} f](\xi). \tag{I.26}$$

Infatti, utilizzando la formula (I.25), si ottiene per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} F[f](\xi + \xi_0), \varphi) &= (F[f], \varphi(\xi - \xi_0)) = (f, F[\varphi(\xi - \xi_0)]) \\ &= (f, e^{i(\xi_0,x)} F[\varphi]) = (e^{i(\xi_0,x)} f, F[\varphi]) = (F[e^{i(\xi_0,x)} f], \varphi), \end{aligned}$$

da cui segue la formula (I.26).

(e) **Trasformata di Fourier di similitudine (con riflessione)**. Se $f \in \mathcal{S}'$, per tutti i valori reali di $c \neq 0$ si ha

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \tag{I.27}$$

poichè per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$ abbiamo

$$\begin{aligned} &(F[f(cx)], \varphi) = (f(cx), F[\varphi]) = \frac{1}{|c|^n}\left(f, F[\varphi]\left(\frac{x}{c}\right)\right) \\ &= \frac{1}{|c|^n}\left(f, \int \varphi(\xi) e^{i(\frac{x}{c},\xi)}\, d\xi\right) = (f, \int \varphi(c\xi') e^{i(x,\xi')}\, d\xi') = (f, F[\varphi(c\xi)]) \\ &= (F[f], \varphi(c\xi)) = \frac{1}{|c|^n}\left(F[f]\left(\frac{\xi}{c}\right), \varphi\right). \end{aligned}$$

(f) **Trasformata di Fourier del prodotto diretto**. Se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, si ha

$$F[f(x) \cdot g(y)] = F_x[f(x) \cdot F[g](\eta)] = F_y[F[f](\xi) \cdot g(y)] = F[f](\xi) \cdot F[g](\eta). \tag{I.28}$$

Infatti, per tutte le $\varphi(\xi, \eta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ abbiamo

$$\begin{aligned} &(F[f(x) \cdot g(y)], \varphi) = (f(x) \cdot g(y), F[\varphi]) \\ &= (f(x), (g(y), F_\eta F_\xi[\varphi])) = (f(x), (F[g], F_\xi[\varphi])) \\ &= (f(x) \cdot F[g](\eta), F_\xi[\varphi]) = (F_x[f(x) \cdot F[g](\eta)], \varphi) = (F[g](\eta), (f(x), F_\xi[\varphi])) \\ &= (F[g](\eta), (F[f](\xi), \varphi)) = (F[f](\xi) \cdot F[g](\eta), \varphi), \end{aligned}$$

da cui seguono le uguaglianze (I.28).

(g) Formule analoghe sono anche valide per la trasformazione di Fourier F_x, per esempio: se $f(x, y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, si ha

$$D_\xi^\alpha D_y^\beta F_x[f] = F_x[(ix)^\alpha D_y^\beta f], \qquad F_x[D_x^\alpha D_y^\beta f] = (-i\xi)^\alpha D_y^\beta F_x[f]. \tag{I.29}$$

3.4 Esempi

(a) **Esempio** 1. Definiamo il cosiddetto valore principale di Cauchy come il funzionale $\mathcal{P}(1/|x|)$ definito dall'uguaglianza

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|},\varphi\right)=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx+\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx,\qquad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^1).$$

Utilizzando il teorema di Cauchy (che si consente a scrivere $\varphi(x)-\varphi(0)=x\varphi'(t)$ per un opportuno t tra 0 e x), si trova

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx\right|\le 2\|\varphi'\|_\infty=2\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|,$$

mentre un calcolo elementare conduce alla stima

$$\begin{aligned}\left|\int_{|x|>1}\frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx\right| &\le \left(\int_{|x|>1}\frac{dy}{|y|(1+|y|)}\right)\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)|\varphi(x)|\\ &\le 2\ln 2\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)|\varphi(x)|.\end{aligned}$$

Quindi

$$\left|\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|},\varphi\right)\right|\le 2(1+\ln 2)\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)|\varphi(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)|\varphi'(x)|\right),$$

e dunque, secondo il Lemma A3.1, $\mathcal{P}(1/|x|)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$. Dimostriamo ora che

$$F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|}\right]=-2C-2\ln|\xi|, \tag{I.30}$$

dove C è la cosiddetta costante di Eulero,

$$C=\int_0^1\frac{1-\cos(u)}{u}\,du-\int_1^\infty\frac{\cos(u)}{u}\,du.$$

Infatti, per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&\left(F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|}\right], \varphi\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|}, P[\varphi]\right) \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|}\, dx + \int_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|} \int \varphi(\xi)(e^{ix\xi} - 1)\, d\xi\, dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|} \int \varphi(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi\, dx \\
&= 2\int_{0}^{1} \int \varphi(\xi) \frac{\cos(x\xi) - 1}{x}\, d\xi\, dx + 2\int_{1}^{\infty} \int \varphi(\xi) \frac{\cos(x\xi)}{x}\, d\xi\, dx \\
&= 2\int \varphi(\xi) \int_{0}^{1} \frac{\cos(x\xi) - 1}{x}\, dx\, d\xi - 2\int_{1}^{\infty} \int \varphi'(\xi) \frac{\mathrm{sen}\,(x)}{x^2}\, dx\, d\xi \\
&= 2\int \varphi(\xi) \int_{0}^{|\xi|} \frac{\cos(u) - 1}{u}\, du\, d\xi - 2\int \varphi'(\xi) \int_{1}^{\infty} du\, \frac{\mathrm{sen}\,(x\xi)}{x^2}\, dx\, d\xi \\
&= 2\int \varphi(\xi) \left[\int_{0}^{|\xi|} \frac{\cos(u) - 1}{u}\, du + \frac{d}{d\xi}\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,(x\xi)}{x^2}\, dx\right] d\xi \\
&= -2\int \varphi(\xi)(C + \ln|\xi|)\, d\xi,
\end{aligned}$$

da cui deriva la formula (I.30).

(b) **Esempio** 2. Si ha in tre dimensioni

$$F\left[\frac{1}{|x|^2}\right] = \frac{2\pi^2}{|\xi|}. \tag{I.31}$$

Considerando che la funzione $1/|x|^2$ è localmente sommabile in $\mathbb{R}^3$, per tutte le $\varphi \in \mathcal{S}$ otteniamo la seguente successione di uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
&\left(F\left[\frac{1}{|x|^2}\right], \varphi\right) = \left(\frac{1}{|x|^2}, F[\varphi]\right) = \int \frac{1}{|x|^2} F[\varphi]\, dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi) e^{i(\xi,x)}\, d\xi\, dx = \lim_{R\to\infty} \int \varphi(\xi) \int_{|x|<R} \frac{e^{i(\xi,x)}}{|x|^2}\, dx\, d\xi \\
&= \lim_{R\to\infty} \int \varphi(\xi) \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{i|\xi|\rho\cos\theta}}{\rho^2} \rho^2\, d\psi \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\rho\, d\xi \\
&= 2\pi \lim_{R\to\infty} \int \varphi(\xi) \int_0^R \int_{-1}^1 e^{i|\xi|\rho\mu}\, d\mu\, d\rho\, d\xi \\
&= 4\pi \lim_{R\to\infty} \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|} \int_0^R \frac{\operatorname{sen}(|\xi|\rho)}{\rho}\, d\rho\, d\xi. \qquad \text{(I.32)}
\end{aligned}
$$

Visto che

$$
\begin{aligned}
&|\xi| \left| \int_R^\infty \frac{\operatorname{sen}(|\xi|\rho)}{\rho}\, d\rho \right| \\
&= \left| \frac{\cos(|\xi|R)}{R} - \int_R^\infty \frac{\cos(|\xi|\rho)}{\rho^2}\, d\rho \right| \qquad \le \frac{1}{R} + \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2}{R},
\end{aligned}
$$

è possibile il passaggio al limite per $R \to \infty$ sotto il segno dell'integrale nell'ultimo termine delle uguaglianze (I.32). Tenuto in conto che

$$
\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(|\xi|\rho)}{\rho}\, d\rho = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}, \qquad |\xi| \neq 0,
$$

in definitiva, si ottiene

$$
\left(F\left[\frac{1}{|x|^2}\right], \varphi\right) = 4\pi \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^2} |\xi| \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(|\xi|\rho)}{\rho}\, d\rho = 2\pi^2 \int \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|}\, d\xi,
$$

da cui segue la formula (I.31).

(c) **Esempio** 3. Per $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha in due dimensioni

$$
\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|^2}, \varphi\right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2}\, dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2}\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).
$$

Facciamo i seguenti calcoli:

$$
\begin{aligned}
&\left(F\left[\mathcal{P}\frac{1}{|x|^2}\right],\varphi\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|^2}, F[\varphi]\right) \\
&= \int_{|x|<1} \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|^2}\,dx + \int_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|}\,dx \\
&= \int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi)\left[e^{i(x,\xi)} - 1\right]\,d\xi dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^2} \int \varphi(\xi) e^{i(x,\xi)}\,d\xi dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) \int_0^{2\pi} \left(e^{ir|\xi|\cos\theta} - 1\right)\,d\theta d\xi dr \\
&+ \int_1^\infty \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) \int_0^{2\pi} e^{ir|\xi|\cos\theta}\,d\theta d\xi dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r} \int \varphi(\xi)[J_0(r|\xi|) - 1]\,d\xi dr + 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{r} \int \varphi(\xi) J_0(r|\xi|)\,d\xi dr \\
&= 2\pi \int \varphi(\xi) \left[\int_0^1 \frac{J_0(r|\xi|) - 1}{r}\,dr + \int_1^\infty \frac{J_0(r|\xi|)}{r}\,dr\right] d\xi \\
&= 2\pi \int \varphi(\xi) \left[\int_0^{|\xi|} \frac{J_0(u) - 1}{u}\,du + \int_{|\xi|}^\infty \frac{J_0(u)}{u}\,du\right] d\xi \\
&= -2\pi \int \varphi(\xi)(C_0 + \ln(|\xi|))\,d\xi,
\end{aligned}
$$

da cui segue l'uguaglianza

$$F\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|^2}\right) = -2\pi\ln(|\xi|) - 2\pi C_0,$$

dove

$$C_0 = \int_0^1 \frac{1 - J_0(u)}{u}\,du - \int_1^\infty \frac{J_0(u)}{u}\,du.$$

In queste espressioni J_0 è la funzione di Bessel di ordine 0 [Vedi l'appendice].

4 Soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace

Consideriamo l'equazione di Laplace in n variabili

$$\Delta\mathcal{E}_n = \delta(x). \tag{I.33}$$

Per calcolare la soluzione di questa equazione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, bisogno utilizzare la trasformata di Fourier. Poiché $\Delta = \sum_{j=1}^n D^{\alpha_j}$ per $\alpha_j = (0, \cdots, 0, 2, 0, \cdots, 0)$ con il 2 al j-esimo posto, si ottiene dalla (I.33)

$$-|\xi|^2 F[\mathcal{E}_n](\xi) = 1, \tag{I.34}$$

e quindi

$$F[\mathcal{E}_n](\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}.$$

Si può dimostrare che

$$\mathcal{E}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln(|x|), & n = 2, \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2}, & n \geq 3, \end{cases} \tag{I.35}$$

dove σ_n è la misura dell'ipersfera S^{n-1} in $\mathbb{R}^n$.

Sia ora $n = 3$. In questo caso la funzione $-1/|\xi|^2$ è localmente sommabile in $\mathbb{R}^n$ e, quindi si ha

$$F[\mathcal{E}_3](\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}, \qquad \mathcal{E}_3 = -F^{-1}\left[\frac{1}{|\xi|^2}\right].$$

Da ciò, utilizzando la formula (I.31), otteniamo per $n = 3$

$$\mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}.$$

In modo analogo si calcola $\mathcal{E}_n(x)$ per $n > 3$.

II LE FUNZIONI ARMONICHE

Una funzione $u(x)$ di classe $C^2(G)$ è detta *armonica in una regione* G in $\mathbb{R}^n$ se soddisfa l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in questa regione. Per $n = 1$ e $G = (a, b)$ le funzioni armoniche sono quelle lineari e perciò la loro teoria non presenta alcun interesse. Per questa ragione poniamo in seguito sempre $n \geq 2$. Un esempio non banale di una funzione armonica in $G = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è la soluzione fondamentale $\mathcal{E}_n(x)$ per l'operatore di Laplace introdotto prima.

1 Proprietà elementari ed il principio di massimo

Sia G una regione limitata in $\mathbb{R}^n$ e supponiamo la sua frontiera S regolare a tratti. Applicando la prima formula di Green per $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ e $v = 1$ risulta [Vedi la (1.4) negli appunti sui problemi di Sturm-Liouville]

$$\int_G \Delta u \, dx = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} \, dS,$$

dove n è il versore normale esterno. Quindi per una funzione armonica $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ risulta

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0. \tag{II.1}$$

Sia $x \in G \subset \mathbb{R}^n$. Utilizzando la seconda formula di Green [Vedi la (1.8) negli appunti sui problemi di Sturm-Liouville] per $v(y) = \mathcal{E}_n(x-y)$ e l'identità $\Delta_y \mathcal{E}_n(x-y) = \delta(x-y)$, risulta per $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ armonica:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_G \delta(x-y) u(y) \, dy \\
&= \int_G \{(\Delta_y \mathcal{E}_n(x-y)) \, u(y) - \mathcal{E}_n(x-y) \Delta_y u\} \, dy + \int_G \mathcal{E}_n(x-y) \Delta_y u \, dy \\
&= \int_S \left(u \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{E}_n(x-y) - \mathcal{E}_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y} \right) dS_y + \int_G \mathcal{E}_n(x-y) \Delta_y u \, dy \\
&= \int_S \left(u \frac{\partial}{\partial n_y} \mathcal{E}_n(x-y) - \mathcal{E}_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y} \right) dS_y,
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dall'armonicità della u. Sostituendo la (I.35) si trovano le identità

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n} \displaystyle\int_S \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \right) dS_y, & n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_S \left(\left(\ln \frac{1}{|x-y|} \right) \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y, & n = 2. \end{cases}$$

Adesso consideriamo un dominio sferico S_R di raggio R e centro l'origine. Sia $x = 0$. Sia S_R la superficie della sfera di questa sfera. Allora

$$u(0) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n} \displaystyle\int_{S_R} \left(\frac{1}{R^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|y|^{n-2}} \right) dS_y, & n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{S_R} \left(\left(\ln \frac{1}{R} \right) \frac{\partial u}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|y|} \right) dS_y, & n = 2. \end{cases}$$

Utilizzando la (II.1) otteniamo

$$u(0) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-2)\sigma_n} \displaystyle\int_{S_R} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|y|^{n-2}}\, dS_y = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{S_R} u(y)\, dS_y, & n \geq 3 \\ \dfrac{-1}{2\pi} \displaystyle\int_{S_R} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln \frac{1}{|y|}\, dS_y = \frac{1}{2\pi R} \int_{S_R} u(y)\, dy, & n = 2. \end{cases}$$

Siccome $\sigma_n R^{n-1}$ (per $n \geq 3$) oppure $2\pi R$ (per $n = 2$) è la misura di S_R, si ha

$$\frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{S_R} [u(y) - u(0)]\, dS_y = 0, \qquad n \geq 2,$$

dove $\sigma_2 = 2\pi$ e σ_n è la superficie della ipersfera di raggio 1 in $\mathbb{R}^n$. Essendo $\sigma_n R^{n-1}$ la misura della ipersfera di raggio R in R^n, non si può avere $u(y) \leq u(0)$ o $u(y) \geq u(0)$ per quasi ogni $y \in S_R$ per u non costante.

Teorema II.1 [*principio del massimo*]. *Se una funzione* $u(x) \not\equiv$ costante *è armonica in una regione limitata* G *e appartiene a* $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, *questa funzione non può assumere i suoi valori massimo e minimo in* G.

Dimostrazione. Sia $x \in G$ un punto di massimo della funzione armonica u su G. Scegliendo un dominio sferico U_1 con la sua chiusura contenuta in G, u è anche armonica su quel dominio. Grazie al ragionamente precedente la funzione u deve essere costante su quel sottodominio sferico.

Prendiamo ora un punto arbitrario $x_1 \in G$ che si trova sulla frontiera del dominio sferico U_1. Ripetendo il ragionamento precedente si trova un dominio U_2 tale che $\overline{U_1} \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset G$ con U_1 strettamente contenuto in U_2. Continuando cosìtroviamo una successione di domini sferici U_n tali che $\overline{U_n} \subset U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset G$ con U_n strettamente contenuto in U_{n+1}. Nella loro unione V la funzione u è costante e massima. Siccome si può estendere il dominio V in cui u è costante e massima, se esistesse un punto di frontiera di V all'interno di G, abbiamo $V = G$, per forza. Quindi u è costante in G e massima.

Lo stesso ragiomento vale se u avesse un punto di minimo all'interno di G. □

Dal teorema precedente segue che una funzione armonica non può avere all'interno di una regione nè massimi, né minimi locali.

Corollario II.2 *Sia* $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ *una funzione armonica. Se* $u(x) \equiv 0$ *sulla frontiera* S, *si ha* $u(x) \equiv 0$ *in* G.

Corollario II.3 *Se la successione di funzioni* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, *armoniche in* G *e continue su* $\overline{G}$ *è uniformemente convergente sulla frontiera* S, *questa successione è anche uniformemente convergente su* $\overline{G}$.

Dimostrazione. Quest'asserzione segue dalla disuguaglianza

$$|u_p(x) - u_q(x)| \leq \max_{x \in S} |u_p(x) - u_q(x)| \to 0, \qquad p, q \to \infty, \ x \in \overline{G}.$$

□

I corollari B1.2 e B1.3 valgono anche per la regione $G_1 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ a condizione che le funzioni coinvolte si annullino all'infinito.

III LE FUNZIONI SFERICHE

Consideriamo adesso una classe di funzioni speciali molto importanti per la fisica matematica.

1 Funzioni sferiche

Si dice *funzione sferica* di ordine $l = 0, 1, 2, \cdots$ ogni polinomio armonico omogeneo di grado l considerato sulla sfera unitaria $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Dunque, tra le funzioni sferiche $Y_l(s)$, $s \in S^{n-1}$, di ordine l ed i polinomi armonici omogenei $u_l(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, l'identità

$$Y_l(s) = u_l\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{u_l(x)}{|x|^l}, \qquad s = \frac{x}{|x|}, \tag{III.1}$$

stabilisce una corrispondenza biunivoca.

Le funzioni sferiche Y_l *e* $Y_{l'}$, *di ordini diversi sono ortogonali in* $L_2(S^{n-1})$, *cioè*

$$(Y_l, Y_{l'}) = \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s)\, ds = 0, \qquad l \neq l'.$$

Infatti, applicando per la sfera la formula di Green ai polinomi armonici

$$u_l(x) = |x|^l Y_l\left(\frac{x}{|x|}\right), \qquad u_{l'}(x) = |x|^{l'} Y_{l'}\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{S^{n-1}} \left[|x|^{l'} Y_{l'} \frac{\partial(|x|^l Y_l)}{\partial n} - |x|^l Y_l \frac{\partial(|x|^{l'} Y_{l'})}{\partial n} \right] ds \\
&= \int_{S^{n-1}} \left[Y_{l'} \frac{\partial(r^l Y_l)}{\partial r} - Y_l \frac{\partial(r^{l'} Y_{l'})}{\partial r} \right] ds = (l - l') \int_{S^{n-1}} Y_l(s) Y_{l'}(s)\, ds,
\end{aligned}
$$

come volevasi dimostrare.

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla circonferenza S^1 $(n = 2)$. In coordinate polari abbiamo

$$
u_l(x) = r^l Y_l(\theta), \qquad x = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta),
$$

dove $\Delta u_l = 0$. Risulta l'equazione differenziale

$$
Y_l''(\theta) + l^2 Y_l(\theta) = 0,
$$

da cui seguono le funzioni trigonometriche

$$
Y_l(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & l = 0 \\ c_1 \cos(l\theta) + c_2 \operatorname{sen}(l\theta), & l = 1, 2, 3, \cdots . \end{cases}
$$

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla sfera S^2 $(n = 3)$. In coordinate sferiche abbiamo per $y_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi)$

$$
\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial Y_l}{\partial\varphi} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial\theta^2} + l(l+1) Y_l(\theta, \varphi) = 0, \tag{III.2}
$$

dove $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $l = 0, 1, 2, \cdots$. Cerchiamo le soluzioni della (III.2) in $C^\infty(S^2)$. Introduciamo prima $\xi = \cos\varphi$ e scriviamo (III.2) nella forma

$$
\frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{\partial Y_l}{\partial\xi} \right) + l(l+1) Y_l(\theta, \xi) = 0. \tag{III.3}
$$

Applicando la separazione delle variabili

$$
Y_l(\theta, \varphi) = \mathcal{P}(\xi) \Theta(\theta),
$$

otteniamo

$$
\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1 \cos m\theta + c_2 \operatorname{sen} m\theta, & m = 1, 2, 3, \cdots , \end{cases}
$$

dove abbiamo sfruttato la periodicità della $\Theta(\theta)$: $\Theta(\theta+2\pi) \equiv \Theta(\theta)$. Dunque $\Theta''(\theta) = -m^2\Theta(\theta)$. Risulta l'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}}{d\xi}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]\mathcal{P}(\xi) = 0. \qquad \text{(III.4)}$$

Quest'equazione si può scrivere nella forma

$$-\left[(1-\xi^2)\mathcal{P}'\right]' + \frac{m^2}{1-\xi^2}\mathcal{P} = l(l+1)\mathcal{P}.$$

Le soluzioni di quest'equazione nei punti ± 1 debbono assumere valori finiti.

2 Funzioni di Legendre associate

Sostituiamo $\mathcal{P}(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}z(\xi)$ nella (III.3). Risulta

$$(1-\xi^2)z''(\xi) - 2(m+1)\xi z'(\xi) + (l-m)(l+m+1)z(\xi) = 0. \qquad \text{(III.5)}$$

Molteplicando la (III.5) per $(1-\xi^2)^m$, otteniamo per $\mathcal{P} = \mathcal{P}_l$

$$\left[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_l'\right]' = -(l-m)(l+m+1)(1-\xi^2)^m\mathcal{P}_l. \qquad \text{(III.6)}$$

Per $m = 0$ risulta l'equazione differenziale per il polinomio di Legendre di grado l:

$$(1-\xi^2)P_l''(\xi) - 2\xi P_l'(\xi) + l(l+1)P_l(\xi) = 0.$$

Calcolando la derivata m-esima $z = P_l^{(m)}$ di quest'equazione otteniamo

$$(1-\xi^2)z''(\xi) - 2(m+1)z'(\xi) + (l-m)(l+m+1)z(\xi) = 0.$$

Quindi le funzioni $(d/d\xi)^m P_l(\xi)$ sono soluzioni della (III.5). Molteplicando la (III.6) per $P_{l'}(\xi)$ e la (III.6) con l' invece di l per $P_l(\xi)$ e sottraendo, otteniamo

$$\begin{aligned}[(l-l')(l+l'+1)]\,(1-\xi^2)^m\mathcal{P}_l(\xi)\mathcal{P}_{l'}(\xi) = \mathcal{P}_l(\xi)\left[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_{l'}'\right]' \\ - \mathcal{P}_{l'}(\xi)\left[(1-\xi^2)^{m+1}\mathcal{P}_l'\right]'.\end{aligned}$$

Integrando quest'equazione tra -1 e $+1$ e applicando l'integrazione per parti risulta

$$[(l-l')(l+l'+1)]\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^m\mathcal{P}_l(\xi)\mathcal{P}_{l'}(\xi)\,d\xi = 0.$$

Quindi, se $P_l(\xi)$ sono i polinomi di Legendre, i polinomi $(d/d\xi)^m P_{l+m}(\xi)$ $(l = 0, 1, 2, \cdots)$ sono un sistemi di polinomi ortogonali (di grado l) rispetto al peso $w(\xi) = (1-\xi^2)^m$.

Troviamo ora la costante di normalizzazione. Si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) P_{l'}^{(m)}(\xi)\, d\xi \\
&= \Big[(1-\xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi) P_{l'}^{(m-1)}(\xi)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{l'}^{(m-1)}(\xi) \Big[(1-\xi^2)^m P_l^{(m)}(\xi)\Big]'\, d\xi \\
&= (l-m-1)(l+m) \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{m-1} P_l^{(m-1)}(\xi) P_{l'}^{(m-1)}(\xi)\, d\xi \\
&= (l+m)(l-m+1)(l+m-1)(l-m+2)\times \\
&\times \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{m-2} P_l^{(m-2)}(\xi) P_{l'}^{(m-2)}(\xi)\, d\xi \\
&= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{1} P_l(\xi) P_{l'}(\xi)\, d\xi = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l.l'}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left(\frac{2(l+m)+1}{2} \frac{l!}{(l+2m)!}\right)^{1/2} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m P_{l+m}(\xi), \qquad l = 0, 1, 2, \cdots,$$

è il sistema ortonormale dei polinomi rispetto al peso $(1-\xi^2)^m$ [con coefficiente di ξ^l positivo].

3 Le funzioni sferiche per $n = 3$: Completezza

Nella letteratura ci sono diverse normalizzazioni delle funzioni sferiche in $\mathbb{R}^3$. Qui ne scegliamo una. Poniamo

$$Y_l^m(\varphi, \theta) = \begin{cases} P_l^m(\cos\varphi)(\operatorname{sen}\varphi)^m \cos(m\theta), & m = 0, 1, \cdots, l; \\ P_l^{|m|}(\cos\varphi)(\operatorname{sen}\varphi)^m \operatorname{sen}(|m|\theta), & m = -1, -2, \cdots, -l, \end{cases}$$

dove $l = 0, 1, 2, \cdots$. Le funzioni sferiche Y_l^m $(m = 0, \pm 1, \cdots, \pm l)$ di ordine l sono linearmente indipendenti e le loro combinazioni lineari

$$Y_l(s) = \sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)} Y_l^m(s)$$

a coefficienti arbitrari $a_l^{(m)}$ sono anch'esse funzioni sferiche di ordine l.

Le funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ formano un sistema ortogonale e completo in $L_2(S^2)$, ed inoltre

$$\|Y_l^m\|^2_{L_2(S^2)} = 2\pi \frac{1+\delta_{0,m}}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{l-|m|)!}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}\|Y_l^m\|^2 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_l^m(\theta,\varphi)|^2 \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_{-1}^1 P_l^{|m|}(\xi)^2 (1-\xi^2)^m \, d\xi \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos^2 m\theta \\ \operatorname{sen}^2 m\theta \end{Bmatrix} d\theta = 2\pi \frac{1+\delta_{0,m}}{2l+1} \frac{l+|m|)!}{(l-|m|)!}.\end{aligned}$$

La completezza di un sistema ortogonale di funzioni sferiche $\{Y_l^m\}$ significa che ogni funzione f appartenente a $L_2(S^2)$ può essere sviluppata in serie di Fourier di queste funzioni:

$$f(s) = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)} Y_l^m(s) = \sum_{l=0}^\infty Y_l(s),$$

convergente in $L_2(S^2)$. I coefficienti $a_l^{(m)}$ sono calcolati mediante la formula

$$a_l^{(m)} = \frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{0,m})} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi) Y_l^m(\theta,\varphi) \operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\varphi.$$

Le funzioni sferiche Y_l^m, $m = 0, \pm 1, \cdots, \pm l$, sono autofunzioni dell'operatore di Beltrami,

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

che corrisponde all'autovalore $\lambda = l(l+1)$ di molteplicità $2l+1$.

A Un'espressione per una funzione di Bessel

Si può mostrare che

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen}\theta) \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\theta} \, d\theta.$$

Infatti, scrivendo $y(x)$ per la parte a destra si ha

$$\begin{aligned}
x\,[y''(x)+y(x)] &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(x\cos\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos^2 x\;\cos(x\cos\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\mathrm{sen}^{\,2} x\;\cos(x\cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,(x\cos\theta)\right]_{\theta=0}^{\pi} \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\theta\,\mathrm{sen}\,(x\cos\theta)\,d\theta = -y'(x),
\end{aligned}$$

mentre $y(0)=1$ e $y'(0)=0$. Quindi y soddisfa l'equazione differenziale di Bessel. Dunque $y(x)=J_0(x)$. Infine, per la periodicità delle funzioni di θ si ha

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x\cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\theta}\,d\theta.$$

Riferimenti bibliografici

[1] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, 2 vols., Hermann, Paris, 1966.

[2] V.S. Vladimirov, *Equazioni della Fisica Matematica*, Ed. Mir, Mosca, 1987.