Applicazioni ad Alcuni Problemi al Contorno Semplici

In questo capitolo risolviamo alcuni problemi al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziale, dove il dominio ci permette di eseguire una separazione delle variabili.

1 L'equazione di Laplace nel disco e fuori del disco

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0, \tag{1.1}$$

sia nel disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < L\}$ sia nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, sotto le condizioni al contorno

$$\begin{cases} u = f \text{ sul bordo } \partial D \\ u \text{ limitata all'infinito (nel caso del dominio esterno).} \end{cases} \tag{1.2}$$

Ponendo $G = D$ (per il problema interno) e $G = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ (per il problema esterno), assumiamo che f sia continua sul cerchio ∂D, e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$. In coordinate polari l'equazione di Laplace ha la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

dove $0 \leq \theta < 2\pi$ (con periodicità) e $0 < r < L$ con continuità della soluzione per $r \to 0^+$ (per il problema interno) e $r > L$ con limitatezza se $r \to +\infty$. La separazione delle variabili conduce alle soluzioni $u_0(r)$, $u_m(r)\cos m\theta$ e $u_m(r)\sin m\theta$, dove $m = 0, 1, 2, \ldots$ e la funzione $u_m(r)$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_m}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2}u_m(r) = 0. \tag{1.3}$$

L'equazione (1.3) è un'equazione di Eulero $[r^2 u_m''(r) + r u_m'(r) - m^2 u_m(r) = 0]$ con la soluzione generale

$$u_m(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln(r), & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2\, r^{-m}, & m = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie. Per il problema interno la continuità se $r \to 0^+$ conduce ad una soluzione costante se $m = 0$ e una proporzionale a r^m se $m = 1, 2, \ldots$. Per il problema esterno la limitatezza se $r \to +\infty$ conduce ad una soluzione costante se $m = 0$ e una proporzionale a r^{-m} se $m = 1, 2, \ldots$. Quindi la soluzione generale ha la forma

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right); \qquad \text{[problema interno]} \tag{1.4}$$

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right); \quad \text{[problema esterno]}, \tag{1.5}$$

dove $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ sono opportune costanti.

Per il problema interno sostituiamo $r = L$ in (1.4) e applichiamo la condizione al contorno $u(L,\theta) = f(\theta)$. Risulta

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right). \tag{1.6}$$

Applicando la teoria delle serie di Fourier [Vedi: Pagani-Salsa II, Giusti II] abbiamo for $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta \\ a_n L^n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \qquad b_n L^n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta\, d\theta, \end{cases}$$

dove la serie (1.6) è uniformente convergente in $\theta \in [-\pi, \pi]$ (e anche totalmente convergente) se $f(\theta)$ è continua (con $f(-\pi) = f(\pi)$) e regolare a tratti. Per il problema esterno sostituiamo $r = L$ in (1.5) e applichiamo la condizione al contorno $u(L,\theta) = f(\theta)$. Risulta

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^{-n} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right). \tag{1.7}$$

Applicando la teoria delle serie di Fourier [Vedi: Pagani-Salsa II, Giusti II] abbiamo

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,d\theta \\ [2mm] a_n L^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \qquad b_n L^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta, \end{cases}$$

where $n = 1, 2, \ldots$.

Sostituiamo ora le espressioni per i coefficienti di Fourier nell'espressione per la $u(r,\theta)$. Per il problema interno otteniamo

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{L}\right)^n\left[\cos n\theta\cos n\hat{\theta}+\sin n\theta\sin n\hat{\theta}\right]\right) f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{L}\right)^n\cos n(\theta-\hat{\theta})\right] f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{r}{L}e^{i(\theta-\hat{\theta})}\right)^n+\left(\frac{r}{L}e^{-i(\theta-\hat{\theta})}\right)^n\right\}\right] f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[1+\left\{\frac{e^{i(\theta-\hat{\theta})}\dfrac{r}{L}}{1-e^{i(\theta-\hat{\theta})}\dfrac{r}{L}}+\frac{e^{-i(\theta-\hat{\theta})}\dfrac{r}{L}}{1-e^{-i(\theta-\hat{\theta})}\dfrac{r}{L}}\right\}\right] f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\left(\dfrac{r}{L}\right)^2}{1-2\dfrac{r}{L}\cos(\theta-\hat{\theta})+\left(\dfrac{r}{L}\right)^2} f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta}. \end{aligned}$$

Così siamo arrivati all'integrale di Poisson per la soluzione del problema interno. Il calcolo della soluzione del problema esterno non è molto diverso. Basta cambiare r/L in L/r. Il risultato finale per la soluzione di ambedue problemi al contorno è il seguente *integrale di Poisson*:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|L^2-r^2|}{L^2-2rL\cos(\theta-\hat{\theta})+r^2} f(\hat{\theta})\,d\hat{\theta}, \tag{1.8}$$

dove il numeratore del nucleo di Poisson nella (1.7) è L^2-r^2 per il problema interno e r^2-L^2 per il problema esterno. Osserviamo che il nucleo di Poisson

$$\frac{|L^2-r^2|}{L^2-2rL\cos(\theta-\hat{\theta})+r^2}$$

è simmetrico in r e L e simmetrico in θ e $\hat{\theta}$. Inoltre, questo nucleo è strettamente positivo; le sue uniche singolarità si trovano sulla circonferenza $r = L$ per $\theta = \hat{\theta}$.

Discutiamo adesso le proprietà delle funzioni $u(r, \theta)$.

Proposizione 1.1 *Sia $f \in L_2(-\pi, \pi)$. Allora $u \in L_2(D)$ per la soluzione del problema interno. Inoltre,*

$$\lim_{r \to L^-} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - u(r, \theta)|^2 \, d\theta = 0. \tag{1.9}$$

Dimostrazione. Applicando l'uguaglianza di Parseval alla (1.6) si ha

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^{2n}(|a_n|^2 + |b_n|^2) < +\infty.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \|u\|_{L_2(G)}^2 &= \int_0^L \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r|u(r, \theta)|^2 \, d\theta \, dr \\
&= \frac{L^2 |a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^{2n+2}}{2n+2} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \\
&\leq \frac{L^2}{2} \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} L^{2n}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \right] = \frac{1}{\pi} \frac{L^2}{2} \|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}.
\end{aligned}$$

In altre parole, $u \in L_2(G)$.

Per dimostrare la (1.9), si calcoli

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - u(r, \theta)|^2 \, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left(L^{2n} - r^{2n}\right) \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right),$$

implicando la (1.9). ∎

Sia $f \in L_2(-\pi, \pi)$. Allora per la soluzione del problema esterno si ha

$$\lim_{r \to L^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - u(r, \theta)|^2 \, d\theta = \lim_{r \to L^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left(L^{-2n} - r^{-2n}\right) \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = 0.$$

2 L'equazione di Laplace nel cilindro

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{2.1}$$

nel cilindro $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < L,\ 0 < z < h\}$ sotto la condizione al contorno

$$u = f \text{ sul bordo } \partial G \text{ del cilindro.}$$

Assumiamo che f sia continua sul bordo ∂G del cilindro e cerchiamo una soluzione $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ del problema al contorno. Tale soluzione è unica (perchè?). Suddividendo ∂G nei tre insiemi $\partial_L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} = L,\ 0 \le z \le h\}$, $\partial_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le L,\ z = 0\}$ e $\partial_h = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le L,\ z = h\}$, scriviamo f come la somma $f_L + f_0 + f_h$ di tre funzioni con supporto in ∂_L, ∂_0 e ∂_h, rispettivamente. Le corrispondenti soluzioni u_L, u_0 e u_h dell'equazione di Laplace (2.1) con condizione al contorno $u_L = f_L$, $u_0 = f_0$ e $u_h = f_h$ su ∂G soddisfano

$$u_l + u_0 + u_h = u,$$

grazie alla linearità del problema al contorno.

Risolviamo i tre problemi (per u_L, u_0 e u_h) separatamente, utilizzando le coordinate cilindriche (r,θ,z). In queste coordinate si ha $G = \{(r,\theta,z) : 0 < r < L,\ 0 < z < h\}$. Applicando la separazione delle variabili all'equazione di Laplace in coordinate cilindriche

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{2.2}$$

cioè sostituendo $u(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ nella (2.1) e utilizzando la condizione di periodicità $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$, otteniamo

$$\frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0, \tag{2.3}$$

dove $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\Theta(\theta)$ è costante per $m = 0$ e $\Theta(\theta)$ è una combinazione lineare di $\cos m\theta$ e $\sin m\theta$ per $m = 1, 2, \ldots$.

Prima risolviamo il problema al contorno per u_L. Per convenienza scriviamo u al posto di u_L e f invece di f_L. In coordinate cilindriche si ha

$$u(r,\theta,0) = u(r,\theta,h) = 0 \implies Z(0) = Z(h) = 0,$$

mentre $\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2}$ è una costante C. Affinché $Z(z)$ sia non banale, questa costante C deve essere non positiva. Si ottiene

$$Z(z) \sim \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right), \qquad C = -\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Dalla (2.3) e dal valore di C troviamo

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \left(\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \frac{m^2}{r^2}\right) R(r) = 0.$$

Sostituendo $R(r) = \tilde{R}(\rho)$ per $\rho = n\pi r/h$, otteniamo l'equazione di Bessel immaginaria di ordine m

$$\frac{d^2\tilde{R}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\tilde{R}}{d\rho} - \left(1 + \frac{m^2}{\rho^2}\right) \tilde{R}(\rho) = 0. \tag{2.4}$$

L'unica soluzione della (2.4) (tranne un fattore costante) limitata se $\rho \to 0^+$ è la funzione di Bessel immaginaria $I_m(\rho)$. Questa funzione è reale per $\rho > 0$, è proporzionale a $J_m(i\rho)$, e non ha nessuno zero in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ciò segue dal fatto che la funzione di Bessel $J_m(\rho)$ non ha zeri non reali. Quindi $J_m(\rho) > 0$ per $\rho > 0$.

In variabili separate abbiamo trovato le soluzioni

$$\begin{cases} I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right), & m = 0,\ n = 1, 2, \dots, \\ [2mm] I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)[c_1\cos m\theta + c_2 \sin m\theta], & m = 1, 2, \dots,\ n = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Dunque la soluzione $u(r, \theta, z)$ si può sviluppare nella serie di Fourier

$$\begin{aligned} u(r,\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \Bigg[& \frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\, I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove

$$\begin{aligned} f(\theta,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \Bigg[& \frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta)\, I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Discutiamo ora la convergenza della serie (2.6). Supponiamo che f sia di classe C^1 su ∂_L e si annulli su $\partial_L \cap [\partial_0 \cup \partial_h]$. Allora, per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, $f(\theta, \cdot)$ è di classe C^1 in $[0, h]$, soddisfa $f(\theta, 0) \equiv f(\theta, h) \equiv 0$ e $f(0, z) \equiv f(2\pi, z)$ e è di classe C^1 in $\theta \in [0, 2\pi]$. Quindi la sua serie di Fourier in z è totalmente convergente e i suoi coefficienti di Fourier sono funzioni di θ di classe C^1 che hanno gli stessi valori per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{a_{0n}}{2} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{mn}\cos m\theta + b_{mn}\sin m\theta\right) I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) \\ = \frac{2}{h}\int_0^h f(\theta,z)\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\,dz. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Ci ricordiamo ora la teoria degli operatori di Sturm-Liouville monodimensionali. Sia $Lu = -u''$ su $[0,2\pi]$ con condizioni periodiche $u(0) = u(2\pi) = 0$ e $u'(0) = u'(2\pi)$. Allora ogni $g \in C^1[0,2\pi]$ con $g(0) = g(2\pi)$ e $g'(0) = g'(2\pi)$ ha uno sviluppo uniformemente convergente

$$g(\theta) = \frac{g_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(g_{mc}\cos(m\theta) + g_{ms}\sin(m\theta)\right),$$

dove

$$g_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta, \qquad g_{mc} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(m\theta)\,d\theta,$$
$$g_{ms} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(m\theta)\,d\theta, \qquad \|g\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \frac{|g_0|^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(|g_{mc}|^2 + |g_{ms}|^2\right).$$

Torniamo al problema originale. Dalle (2.7) si ha

$$\begin{aligned} a_{0n} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right) &= \frac{2}{\pi h}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,z)\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\,d\theta dz; \\ a_{mn} I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) &= \frac{2}{\pi h}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,z)\cos m\theta\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\,d\theta dz; \\ b_{mn} I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right) &= \frac{2}{\pi h}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta,z)\sin m\theta\sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right)\,d\theta dz, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2} I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right)^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2\right) I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right)^2\right) \\ &= \frac{2}{\pi h}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta,z)|^2\,d\theta dz.\end{aligned}$$

Nel modo analogo si ottiene dalla (2.5)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2}I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)^2+\sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_{mn}|^2+|b_{mn}|^2\right)I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)^2\right)$$
$$=\frac{2}{\pi h}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}|u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dz,$$

e dalla (2.5) e (2.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a_{0n}|^2}{2}\left[I_0\left(\frac{n\pi L}{h}\right)-I_0\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\right]^2\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\left(|a_{mn}|^2+|b_{mn}|^2\right)\left[I_m\left(\frac{n\pi L}{h}\right)-I_m\left(\frac{n\pi r}{h}\right)\right]^2\right)$$
$$=\frac{2}{\pi h}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta,z)-u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dz.$$

Quindi

$$\lim_{r\to L^-}\int_0^h\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta,z)-u(r,\theta,z)|^2\,d\theta dz=0. \tag{2.8}$$

Adesso risolviamo i problemi al contorno per la u_0 e u_h, cioè sotto l'ipotesi che $f(L,\theta,z)\equiv 0$ e ponendo $u=u_0+u_h$ e $f=f_0+f_h$. In tal caso sfruttiamo il fatto che dalla separazione delle variabili segue:

$$\frac{1}{R(r)}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}=C$$

è costante. Affinché ci sia una soluzione non banale limitata se $r\to 0^+$ e con uno zero per $r=L$, bisogna scegliare la costante C tale che risulta l'equazione di Bessel [cioè, $C<0$] invece dell'equazione di Eulero [$C=0$] e l'equazione di Bessel immaginaria [$C>0$]. Ponendo $C=-\nu^2$ con $\nu>0$, risulta

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\nu^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0.$$

La sostituzione $\tilde{R}(\rho)=R(r)$ e $\rho=r\nu$ conduce all'equazione di Bessel di ordine m

$$\frac{d^2\tilde{R}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\tilde{R}}{d\rho}+\left(\nu^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\tilde{R}(\rho)=0.$$

Affinché la sua soluzione sia limitata se $\rho\to 0^+$, bisogna richiedere $\tilde{R}(\rho)\sim J_m(\rho)$. Siano $0<\nu_{m1}<\nu_{m2}<\ldots$ gli infiniti zeri della funzione di Bessel

$J_m(\cdot)$ in $(0, +\infty)$. Allora la condizione al contorno

$$u(L, \theta, z) = 0 \implies R(L) = 0$$

implica che $\nu L = \nu_{mn}$ per qualche $n = 1, 2, \ldots$. Di conseguenza,

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \nu^2 = \left(\frac{\nu_{mn}}{L}\right)^2.$$

In tal caso

$$Z(z) \sim \sinh\left(\frac{\nu_{mn} z}{L}\right) \qquad \begin{cases} u = u_h, \ f = f_h, \\ \text{quindi se } u(r, \theta, 0) = 0 \text{ e } f(r, \theta) = 0; \end{cases}$$

$$Z(z) \sim \sinh\left(\frac{\nu_{mn}(h - z)}{L}\right) \qquad \begin{cases} u = u_0, \ f = f_0, \\ \text{quindi se } u(r, \theta, h) = 0 \text{ e } f(r, \theta) = 0. \end{cases}$$

Nel primo caso $[u(r, \theta, 0) = 0$ e $f(r, \theta) = 0]$ si ha lo sviluppo

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} & \left[\frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{0n} z}{L}\right)\right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta\right) J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{mn} z}{L}\right)\right], \end{aligned} \tag{2.9}$$

dove

$$\begin{aligned} f(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} & \left[\frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right) \sinh(\nu_{0n})\right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta\right) J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right)\right], \end{aligned} \tag{2.10}$$

mentre nel secondo caso $[u(r, \theta, h) = 0$ e $f(r, \theta) = 0]$ si ha lo sviluppo

$$\begin{aligned} u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} & \left[\frac{a_{0n}}{2} J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{0n}(L - z)}{L}\right)\right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta\right) J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) \sinh\left(\frac{\nu_{mn}(h - z)}{L}\right)\right], \end{aligned} \tag{2.11}$$

dove

$$f(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_{0n}}{2}J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{L}\right)\sinh(\nu_{0n})\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{mn}\cos m\theta+b_{mn}\sin m\theta\right)J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{mn}h}{L}\right)\right], \quad (2.12)$$

Discutiamo ora la convergenza delle serie (2.10) e (2.12). Supponiamo che f sia di classe C^1 su ∂_h [rispettivamente, ∂_0] e si annulli su $\partial_h \cap \partial_L$ [rispettivamente, $\partial_0 \cap \partial_L$]. Allora, per ogni $r \in [0,L]$, $f(r,\cdot)$ è di classe C^1 in $[-\pi,\pi]$, soddisfa $f(r,-\pi)\equiv f(r,\pi)$, è di classe C^1 in $r\in[0,L]$ e si annulla per $r=L$. Quindi la sua serie di Fourier è totalmente convergente e i suoi coefficienti di Fourier sono funzioni di r di classe C^1 che si annullano per $r=L$. Si ha Analogamente alle (2.7) si ha in ambedue casi

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{0n}J_0\left(\frac{\nu_{0n}r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{0n}h}{L}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\theta)\,d\theta; \quad (2.13)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{mn}h}{L}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\theta)\cos m\theta\,d\theta; \quad (2.14)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{mn}J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)\sinh\left(\frac{\nu_{mn}h}{L}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\theta)\sin m\theta\,d\theta. \quad (2.15)$$

Ci ricordiamo ora la teoria degli operatori di Sturm-Liouville. Sia $Lu = -(ru')'+(m^2/r)$ con condizioni al contorno $u(r)=O(1)$ per $m=0$, $u(r)=O(r)$ per $m=1,2,\ldots$, e $u(L)=0$, e problema agli autovalori $(Lu)(r)=\nu r u(r)$ [Vedi appunti sui problemi di Sturm-Liouville, (3.24)-(3.25)]. Allora gli autovalori sono ν_{mn}^2 e le autofunzioni sono $J_m(\nu_{mn}r/L)$ dove μ_{mn} è lo zero positivo n-esimo delle $J_m(\cdot)$ $(n=1,2,\ldots)$. Essi sono ortogonali nello spazio di Hilbert $L_2([0,L];r\,dr)$. Inoltre,

$$\int_0^L rJ_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)^2dr=L^2\int_0^1 xJ_m(\nu_{mn}x)^2\,dx=\frac{L^2}{2}J_m'(\mu_{mn})^2$$

[Vedi la dimostrazione del Teorema 3.2 degli appunti sui problemi di Sturm-Liouville]. Allora ogni $g\in C^2((0,L])$ che soddisfa le condizioni al contorno in $r=0$ ed $r=L$ e la condizione $-(rg')'+(m^2/r)g\in L_2([0,L];r\,dr)$ [cioè, $g\in\mathcal{M}_{L_m}$ nelle notazioni degli appunti sulle funzioni di Bessel], si può sviluppare nella serie uniformemente convergente

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}g_nJ_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right),$$

dove

$$g_n = \frac{2}{L^2 J_m'(\nu_{mn})^2} \int_0^L g(r) J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) dr;$$
$$\|g\|^2_{L_2([0,L];r\,dr)} = \frac{L^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2 J_m'(\nu_{mn})^2.$$

Partendo dalle (2.13)-(2.15), si ha

$$a_{0n} \sinh\left(\frac{\nu_{0n} h}{L}\right) = \frac{2}{\pi L^2 J_0'(\nu_{0n})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r,\theta) J_0 \left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right) d\theta dr; \tag{2.16}$$
$$a_{mn} \sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right) = \frac{2}{\pi L^2 J_m'(\nu_{mn})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r,\theta) \cos m\theta J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) d\theta dr; \tag{2.17}$$
$$b_{mn} \sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right) = \frac{2}{\pi L^2 J_m'(\nu_{mn})^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r f(r,\theta) \sin m\theta J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) d\theta dr, \tag{2.18}$$

dove

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|a_{0n}|^2}{2} J_0'(\mu_{0n})^2 \sinh^2\left[\frac{\nu_{0n} h}{L}\right] + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J_m'(\mu_{mn})^2 \sinh^2\left[\frac{\nu_{mn} h}{L}\right] \right]$$
$$= \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |f(r,\theta)|^2 \, d\theta dr.$$

Nel modo analogo si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|a_{0n}|^2}{2} J_0'(\mu_{0n})^2 \sinh^2\left[\frac{\nu_{0n} z}{L}\right] + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J_m'(\mu_{mn})^2 \sinh^2\left[\frac{\nu_{mn} z}{L}\right] \right]$$
$$= \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |u(r,\theta,z)|^2 \, d\theta dr;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_{0n}|^2}{2} J_0'(\mu_{0n})^2 \left[\sinh\left(\frac{\nu_{0n} h}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\nu_{0n} z}{L}\right)\right]^2 \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2) J_m'(\mu_{mn})^2 \left[\sinh\left(\frac{\nu_{mn} h}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\nu_{mn} z}{L}\right)\right]^2 \right)$$
$$= \frac{2}{\pi L^2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r |f(r,\theta) - u(r,\theta,z)|^2 \, d\theta dr.$$

Di consequenza, se f ha il suo supporto su ∂_0 (∂_h, rispettivamente), allora

$$\int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} r|f(r,\theta) - u(r,\theta,z)|^2 \, d\theta dr$$

tende a zero se $z \to 0^+$ ($z \to h^-$, rispettivamente).

3 L'equazione del calore e le sue generalizzazioni

L'equazione del calore (la cui soluzione rappresenta la temperatura come funzione della posizione-tempo (x,t))

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f,$$

dove $x \in G \subset \mathbb{R}^3$, $a > 0$ e $t > 0$, ha le seguenti condizioni iniziali [2]:

a. La condizione iniziale $u(x, t = 0) = u_0(x)$ per $x \in G$;

b. La condizione al contorno $u|_S = u_S$ [specificando la temperatura al bordo], oppure $(\partial u/\partial n)|_S = -(u_1/k)$ [specificando il flusso di calore attraversa il bordo], oppure $k(\partial u/\partial n) + h(u - u_{\text{amb}})|_S = 0$ [dove u_{amb} è la temperatura dell'ambiente e h il coefficiente di scambio di calore]. In quest'equazione G è una regione con bordo S regolare a tratti.

L'equazione del calore si può generalizzare come

$$\frac{du}{dt} = -Lu(t) + f(t), \qquad t > 0, \tag{3.1}$$

con condizione iniziale

$$u(t = 0) = u_0, \tag{3.2}$$

dove L è un operatore di Sturm-Liouville autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $L_2(G)$, u_0 è un vettore in $L_2(G)$ [modellizzando la temperatura iniziale], $f(t)$ è un vettore in $L_2(G)$ continuo nel tempo $t \geq 0$ [modelizzando i sorgenti di calore al momento t], e $u(t)$ è un vettore di $L_2(G)$ [modellizzando la temperatura al momento t]. Supponiamo che L abbia un numero infinito di autovalori λ_n con base ortonormale di corrispondenti autofunzioni φ_n: $L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, dove $n = 1, 2, \ldots$. In tal caso ogni $u \in L_2(G)$ soddisfa l'identità di Parseval

$$\|u\|^2_{L_2(G)} = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 .$$

Da questa impostazione segue subito

$$\frac{d}{dt}(u(t),\varphi_n) = -\lambda_n(u(t),\varphi_n) + (f(t),\varphi_n)$$

con condizione iniziale

$$(u(t=0),\varphi_n) = (u_0,\varphi_n),$$

dove $n = 1, 2, \ldots$ e il prodotto scalare è quello complesso di $L_2(G)$. Utilizzando Pagani-Salsa 2 [cioè, la formula della variazione delle costanti] si trova immediatamente

$$(u(t),\varphi_n) = e^{-\lambda_n t}(u_0,\varphi_n) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)}(f(s),\varphi_n)\,ds.$$

Quindi

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n t}(u_0,\varphi_n) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)}(f(s),\varphi_n)\,ds\right]\varphi_n. \tag{3.3}$$

La (3.3) si può scrivere nella forma

$$u(t) = e^{-tL}u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)L}f(s)\,ds,$$

dove

$$e^{-tL}u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}(u_0,\varphi_n)\varphi_n.$$

L'espressione e^{-tL} è un cosiddetto semigruppo fortemente continuo sullo spazio di Banach $L_2(G)$, cioè

a. $e^{-(t+s)L} = e^{-tL}e^{-sL}$ per $t, s \geq 0$, mentre e^{-tL} è l'identità se $t = 0$;

b. per ogni $u_0 \in L_2(G)$ si ha

$$\left\|\left[e^{-tL} - e^{-sL}\right]u_0\right\| = o(|t-s|), \qquad s \to t;$$

c. per ogni $u_0 \in L_2(G)$ si ha $\|u_0 - e^{-tL}u_0\| \to 0$ se $t \to 0^+$.

Facciamo alcuni esempi. Prima facciamo $G = (0,1)$ e $Lu = -u''$ con condizioni di Dirichlet, cioè il problema al contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < 1,\ t > 0;$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad u(x,0)=u_0(x).$$

In tal caso gli autovalori sono $\lambda_n=(n\pi)^2$ e le corrispondenti autofunzioni ortonormalizzate in $L_2(0,1)$ sono $\varphi_n(x)=\sqrt{2}\,\sin(n\pi x)$, dove $n=1,2,\ldots$. Quindi la soluzione ha la forma

$$u(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)\int_0^1 u_0(y)\,dy\sin(n\pi y)\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int_0^1 e^{-n^2\pi^2(t-s)}f(y,s)\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)\,dy\,ds\right].$$

Adesso discutiamo il caso $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{x^2+y^2}<L\}$ e $L=-\Delta$ con la condizione di Dirichlet al bordo. In tal caso gli autovalori $\lambda>0$. Infatti, cambiando la parte a destra in (2.2) in $-\lambda u(r,\theta)$ e applicando la solita separazione delle variabili arriviamo, per $\lambda>0$, alla equazione differenziale

$$\frac{d^2R}{d(r\sqrt{\lambda})^2}+\frac{1}{r\sqrt{\lambda}}\frac{dR}{d(r\sqrt{\lambda})}+\left(1-\frac{m^2}{(r\sqrt{\lambda})^2}\right)R(r)=0,$$

dove $m=0,1,2,\ldots$ e $R(r)$ è limitato se $r\to 0^+$. Allora $R(r)\sim J_m(r\sqrt{\lambda})$, mentre $R(L)=0$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_{mn}=(\nu_{mn}/L)^2$ [essendo ν_{mn} lo zero positivo n-esimo della $J_m(x)$], dove $m=0,1,2,\ldots$ e $n=1,2,3,\ldots$. Le autofunzioni normalizzate in $L_2(G)\simeq L_2([0,L]\times[0,2\pi];r dr\,d\theta)$ sono

$$\begin{cases}\varphi_{0n}(r,\theta)=\dfrac{1}{L\sqrt{\pi}|J_0'(\nu_{0n})|}J_0\left(\dfrac{\nu_{0n}r}{L}\right), & n=1,2,3,\ldots\\ \varphi_{mn}^c(r,\theta)=\dfrac{\sqrt{2}\,\cos m\theta}{L\sqrt{\pi}|J_m'(\nu_{mn})|}J_m\left(\dfrac{\nu_{mn}r}{L}\right), & m=1,2,3,\ldots,\ n=1,2,\ldots\\ \varphi_{mn}^s(r,\theta)=\dfrac{\sqrt{2}\,\sin m\theta}{L\sqrt{\pi}|J_m'(\nu_{mn})|}J_m\left(\dfrac{\nu_{mn}r}{L}\right), & m=1,2,3,\ldots,\ n=1,2,\ldots.\end{cases}$$

Le costanti di normalizzazione seguono dall'identità

$$\int_0^L\int_0^{2\pi} rJ_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)\cos m\theta\,d\theta dr=(1+\delta_{m0})\pi\int_0^L rJ_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{L}\right)\,dr$$
$$=(1+\delta_{m0})\frac{L^2}{2}J_m'(\nu_{mn})^2,$$

e ugualmente con $\sin m\theta$ al posto di $\cos m\theta$ se $m\geq 1$.

Risulta

$$(e^{-tL}u_0)(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\nu_{0n}^2 t/L^2} \frac{\int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi} \hat{r}u_0(\hat{r},\hat{\theta}) J_0\left(\frac{\nu_{0n} r}{L}\right) J_0\left(\frac{\nu_{0n}\hat{r}}{L}\right) \, d\hat{r} d\hat{\theta}}{\pi L^2 J_0'(\nu_{0n})^2} \right.$$

$$\left. + \; 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\nu_{mn}^2 t/L^2} \frac{\int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi} \hat{r}u_0(\hat{r},\hat{\theta}) J_m\left(\frac{\nu_{mn} r}{L}\right) J_m\left(\frac{\nu_{mn}\hat{r}}{L}\right) \cos[m(\theta-\hat{\theta})] d\hat{r} d\hat{\theta}}{\pi L^2 J_m'(\nu_{mn})^2} \right],$$

dove abbiamo utilizzato la formula

$$\cos(m[\theta-\hat{\theta}]) = \cos m\theta \cos m\hat{\theta} - \sin m\theta \sin m\hat{\theta}.$$

4 L'equazione di Schrödinger

L'equazione di Schrödinger descrive (nell'ambito della meccanica quantistica non relativistica) la probabilità che una particella si trova in una regione dello spazio al momento t. Se m è la massa della particella e $h = 2\pi\hbar$ la costante di Planck, si ha per la funzione onda $\psi(x,t)$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi(x,t), \qquad x\in\mathbb{R}^3,\ t>0; \tag{4.1}$$

$$\psi(x,t=0) = \psi_0(x), \tag{4.2}$$

con condizioni al contorno. La funzione $V(x)$ è reale e rappresenta il potenziale. Scegliendo unità fisiche tali che $\hbar = 1$ e $2m = 1$, risulta invece della (4.1)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi + V(x)\psi(x,t), \qquad x\in\mathbb{R}^3,\ t>0. \tag{4.3}$$

Se $E \subset \mathbb{R}^3$ è misurabile, $\int_E |\psi(x,t)|^2\,dx$ (sotto la condizione di normalizzazione $\psi(\cdot,t)\in L_2(\mathbb{R}^3)$) è la probabilità di trovare la particella in E al momento t.

Noi studiamo esclusivamente il problema stazionario, dove l'energia λ prende il posto dell'operatore $i(\partial/\partial t)$, cioè

$$-\Delta\psi + V(x)\psi(x) = k^2\psi(x), \qquad x\in\mathbb{R}^3, \tag{4.4}$$

dove $\lambda = k^2$ con $\operatorname{Im} k \geq 0$. Ci sono due problemi di rilevante importanza:

1. il problema degli stati limite: $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$. In tal caso l'energia $\lambda = k^2$ è un valore discreto negativo.

2. il problema di scattering: in tal caso si impone la condizione di Sommerfeld

$$\psi(k,x) = e^{ik\theta\cdot x} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|} A\left(k,\theta,\frac{x}{|x|}\right) + o\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad |x| \to +\infty,$$

dove $A(k,\theta,\theta')$ è l'ampiezza (come funzione dell'energia $\lambda = k^2$ e le direzioni $\theta,\theta' \in S^2$); $e^{ik\theta\cdot x}$ rappresenta un'onda piana nella direzione θ. Nel problema di scattering si ha l'energia $\lambda > 0$.

Consideriamo il caso di simmetria sferica, dove

$$V(x) = V(r), \qquad r = |x|.$$

In tal caso l'ampiezza dipende da k e dall'angolo tra le direzioni θ e θ': $A(k,\theta,\theta') = A(k,\theta\cdot\theta')$. Per risolvere il problema di scattering bisogno separare le variabili in coordinate cilindriche, dove la direzione di θ prende il posto dall'asse z positivo. Noi discutiamo ora soltanto il problema degli stati limite. In tal caso si esprime l'equazione di Schrödinger in coordinate sferiche:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} - V(r)\psi = -\lambda\psi,$$

dove $x = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \in \mathbb{R}^3$. Sostituendo

$$\psi(x) = R(r)X(\varphi,\theta)$$

e moltiplicando da $r^2/R(r)X(\varphi,\theta)$ si ottiene

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{X(\varphi,\theta)}\left[\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial X}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 X}{\partial\theta^2}\right] \\ - r^2V(r) = -\lambda r^2.$$

Come al solito, seguono le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[-\frac{C}{r^2} + \lambda - V(r)\right]R(r) = 0; \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial X}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 X}{\partial\theta^2} = -CX(\varphi,\theta), \tag{4.6}$$

dove C è una costante. L'equazione (4.6) si chiama spesso l'equazione di Beltrami.

Grazie alle (C1.2) degli appunti sulle funzioni sferiche, esiste una soluzione non banale della (4.6) se e solo se $C = l(l+1)$ per qualche $l = 0, 1, 2, \ldots$, ed in tal caso $X(\varphi, \theta)$ è una combinazione lineare delle funzioni sferiche $Y_l^m(\varphi, \theta)$, dove $m = -l, \ldots, l$. Infatti, eseguendo un'ulteriore separazione delle variabili nella (4.6), $X(\varphi, \theta) = \mathcal{P}(\xi)\Theta(\theta)$ dove $\xi = \cos\varphi$ e $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$, risultano

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1 \cos m\theta + c_2 \sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \ldots; \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{d\mathcal{P}}{d\xi}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]\mathcal{P}(\xi). \tag{4.7}$$

La (4.7) è l'equazione differenziale per le funzioni di Legendre associate: $\mathcal{P}(\xi) \sim \mathcal{P}_l^m(\xi)$, dove $l = m, m+1, m+2, \ldots$ e $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Discutiamo ora la (4.5). Sostituendo $R(r) = r^\alpha S(r)$ nella (4.5) [con $C = l(l+1)$] per un'opportuna α (da stabilire successivamente) e dividendo da r^α, si trova

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \frac{2(\alpha+1)}{r}\frac{dS}{dr} + \left[\frac{\alpha(\alpha+1) - l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r)\right]S(r) = 0. \tag{4.8}$$

Per far somigliare la (4.8) all'equazione di Bessel si scelga α tale che $2(\alpha+1) = 1$, cioè $\alpha = -1/2$:

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dS}{dr} + \left[-\frac{(l+\frac{1}{2})^2}{r^2} + \lambda - V(r)\right]S(r) = 0. \tag{4.9}$$

Per far sparire il termine con la derivata prima dalla (4.8), ci vuole $\alpha = -1$.

Per $\alpha = 0$ otteniamo dalla (4.8)

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + \lambda - V(r)\right]R(r) = 0, \tag{4.10}$$

dove $l = 0, 1, 2, \cdots$. Noi imporremo le seguenti due condizioni al contorno:

$$\begin{cases} R(r) = O(r^l), & r \to 0^+ \\ \displaystyle\int_0^\infty r|R(r)|^2\,dr < +\infty. \end{cases} \tag{4.11}$$

I seguenti casi sono di rilevante interesse:

1. L'oscillatore armonico. In tal caso $V(r) = (\gamma/2)r^2$ per un'opportuna costante γ.

2. L'atomo di idrogeno. In tal caso $V(r) = -e^2/r$, dove e è la carica dell'elettrone.

3. Il pozzo di potenziale. Il tal caso $V(r) = -V_0$ (con $V_0 > 0$) per $0 \leq r < L$ e $V(r) = 0$ per $r > L$.

L'equazione (4.5) può essere risolta esattamente in tutti e tre casi.

4.1 Il pozzo di potenziale

Consideriamo soltanto l'equazione di Schrödinger unidimensionale

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = \lambda\psi(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

dove scelgiamo unità fisiche tali che $\hbar = 1$ e $2m = 1$. In altre parole,

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = \lambda\psi(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

Per il pozzo di potenziale si ha

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -V_0, & 0 < r < L \\ 0, & r > L, \end{cases}$$

dove $V_0 > 0$. Per $\lambda = -\kappa^2 < 0$ le soluzione della (4.12) in $L_2(\mathbb{R})$ hanno la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} ae^{\kappa x}, & x < 0 \\ be^{ipx} + ce^{-ipx}, & 0 < x < L \\ de^{-\kappa x}, & x > L, \end{cases}$$

dove $p^2 = V_0 - \kappa^2$ e a, b, c, d sono costanti. Richiedendo che ψ sia continua e derivabile in $x = 0$ e $x = L$, risulta il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ \kappa & -ip & ip & 0 \\ 0 & e^{ipL} & e^{-ipL} & -e^{-\kappa L} \\ 0 & ipe^{ipL} & -ipe^{-ipL} & \kappa e^{-\kappa L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il determinante del sistema è

$$2ie^{-\kappa L}\left[(p^2 - \kappa^2)\sin(pL) - 2p\kappa\cos(pL)\right],$$

il quale si annulla se e solo se

$$\tan(pL) = \frac{2p\kappa}{p^2 - \kappa^2}, \qquad p = \sqrt{V_0 - \kappa^2}, \qquad 0 < \kappa < \sqrt{V_0}.$$

In questi casi (un numero finito) si trova una soluzione non banale in $L_2(\mathbb{R})$.

4.2 L'oscillatore armonico

In tal caso

$$V(r) = \frac{1}{2}\gamma r^2, \tag{4.13}$$

dove $\gamma > 0$ è una costante. Ponendo $\gamma = 2$ e $R(r) = e^{-r^2/2}\phi(r)$, la (4.10) si riduce all'equazione differenziale

$$\phi''(r) + \left(\frac{2}{r} - 2r\right)\phi'(r) + \left(k^2 - 3 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\phi(r) = 0. \tag{4.14}$$

Sostituendo la serie di potenze

$$\phi(r) = r^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} c_s r^s, \tag{4.15}$$

dove α è un parametro da stabilire, troviamo

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty} &\left[\{(\alpha+s)(\alpha+s-1) + 2(\alpha+s) - l(l+1)\}c_s\right.\\ &\left.+ \{(k^2-3) - 2(\alpha+s-2)\}c_{s-2}\right] r^{\alpha+s-2} = 0,\end{aligned}$$

dove $c_{-1} = c_{-2} = 0$. Supponendo che il coefficiente di $r^{\alpha-2}$ sia diverso da zero, si trova

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - l(l+1) = 0,$$

e quindi $\alpha = l$ oppure $\alpha = -(l+1)$. La condizione al contorno (4.11) se $r \to 0^+$ implica che $\alpha = l$. In tal caso $c_1 = 0$ e

$$s(s+2l+1)c_s + \{(k^2-3) - 2(s+l-2)\}c_{s-2} = 0. \tag{4.16}$$

Dunque $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ e

$$c_s = \frac{2(s+l-2) - (k^2-3)}{s(s+2l+1)} c_{s-2},$$

dove $s = 2, 4, 6, \cdots$. Il rapporto $c_s r^2/c_{s-2} \sim (2r^2/s)$ se $s \to +\infty$. Quindi scegliamo k^2 tale che $c_s =$ per qualche $s = 2, 4, 6, \cdots$, cioè

$$k^2 = 2(s+l-2) + 3, \qquad s = 2, 4, 6, \cdots .$$

Quindi abbiamo trovato gli autovalori e le autofunzioni

$$\begin{cases} k_{l,n}^2 = 2n+3, & n = l, l+1, \cdots,\ l = 0, 1, 2, \cdots, \\ \psi_{l,n}(r,\theta,\varphi) = e^{-r^2/2}\phi_{l,n}(r)Y_l^m(\theta,\varphi), & m = -l, -l+1, \cdots, l, \end{cases} \tag{4.17}$$

dove $\phi_{l,n}(r) = r^l v_{l,n}(r)$ e $v_{l,n}(r)$ è un polinomio in r^2 di grado $n-l$. Quel polinomio soddisfa l'equazione

$$r^2 v''(r) + 2r(l+1-r^2)v'(r) + 2(n-l)r^2 v(r) = 0.$$

Ponendo $t = r^2$ e $w(t) = v(r)$ otteniamo l'equazione differenziale

$$tw''(t) + (l + \frac{3}{2} - t)w'(t) + \frac{1}{2}(n-l)w(t) = 0, \tag{4.18}$$

dove $w(t)$ è un polinomio in t di grado $n-l$.

Potremmo studiare l'oscillatore armonico in una maniera completamente diversa. Siccome $V(r) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, l'equazione di Schrödinger è anche separabile in coordinate Cartesiane. Infatti, scrivendo $\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ otteniamo le tre equazioni

$$\begin{cases} X''(x) + (k_x^2 - x^2)X(x) = 0, \\ Y''(y) + (k_y^2 - y^2)Y(y) = 0, \\ Z''(z) + (k_z^2 - z^2)Z(z) = 0, \end{cases} \tag{4.19}$$

dove $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Studiamo ora una delle equazioni in una variabile. Ponendo $X(x) = e^{-x^2/2}\phi(x)$, l'equazione $X''(x) + (k_x^2 - x^2)X(x) = 0$ si riduce all'equazione

$$\phi''(x) - 2x\phi'(x) + (k_x^2 - 1)\phi(x) = 0. \tag{4.20}$$

Sostituendo $\phi(x) = x^\alpha \sum_{s=0}^\infty c_s x^s$, otteniamo

$$\sum_{s=0}^\infty \left[(\alpha+s)(\alpha+s-1)c_s + \{(k_x^2 - 1) - 2(\alpha+s-2)\}c_{s-2}\right] x^{\alpha+s-2} = 0, \tag{4.21}$$

dove $c_{-1} = c_{-2} = 0$. Scegliendo $\alpha = 0$, troviamo $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ e

$$\frac{c_s}{c_{s-2}} = \frac{2(s-2) - (k_x^2 - 1)}{s(s-1)}, \qquad s = 2, 4, 6, \cdots,$$

risultando in polinomi in x di grado $n = 0, 2, 4, \cdots$ se $k_x^2 = 2n+1$. Scegliendo $\alpha = 1$, troviamo $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ e

$$\frac{c_s}{c_{s-2}} = \frac{2(s-1) - (k_x^2 - 1)}{s(s+1)}, \qquad s = 2, 4, 6, \cdots,$$

risultando in polinomi in x di grado $n = 1, 3, 5, \cdots$ se $k_x^2 = 2n+1$. Insieme troviamo le seguenti soluzioni $X_n(x) = \phi_n(x)e^{-x^2/2}$, dove $\phi_n(x)$ ùn polinomio di grado $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ e $k_x^2 = 2n+1$. Raccogliendo X, Y e Z risulta

$$\begin{cases} k^2 = 2n+3, & n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \\ \psi(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)/2}\phi_{n_1}(x)\phi_{n_2}(y)\phi_{n_3}(z), \end{cases} \tag{4.22}$$

dove $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Torniamo ai polinomi trovati.

I polinomi $\phi_n(x)$ soddisfano l'equazione $\phi_n''(x) - 2x\phi_n'(x) + 2n\phi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$). Queste equazioni si possono riscrivere nella forma

$$-\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\phi_n'\right) = 2n\, e^{-x^2}\phi_n(x), \tag{4.23}$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\phi_m(x)e^{-x^2}\,dx = N_n\delta_{n,m}. \tag{4.24}$$

Questi polinomi sono proporzionali ai polinomi di Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x^2}).$$

I polinomi $w_m(t)$ ($m = n - l$) soddisfano l'equazione differenziale $tw_m''(t) + (l + \frac{3}{2} - t)w_m'(t) + \frac{1}{2}mw_m(t) = 0$. Questa equazione si può mettere nella forma

$$-\frac{d}{dt}\left(t^{l+(3/2)}e^{-t}w_m'\right) = \frac{1}{2}m\, t^{l+(1/2)}e^{-t}w_m(t), \tag{4.25}$$

e quindi

$$\int_0^{\infty} w_m(t)w_n(t)t^{l+(1/2)}e^{-t}\,dt = N_m\delta_{m,n}. \tag{4.26}$$

Questi polinomi sono proporzionali ai polinomi di Laguerre $L_m^{\alpha}(t)$, dove $\alpha = l + \frac{1}{2}$.

4.3 L'atomo d'idrogeno

In tal caso $V(r) = -e^2/r$, dove e è la carica dell'elettrone. Per convenienza consideriamo $V(r) = -2/r$ per energia $E = k^2$ negativa. Ponendo $E = -\kappa^2$ per $\kappa > 0$, l'equazione di Schrödinger ha la seguente forma:

$$R''(r) + \left(-\kappa^2 + \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r) = 0, \tag{4.27}$$

dove $l = 0, 1, 2, \cdots$. Sostituendo $R(r) = e^{-\kappa r}w(r)$ otteniamo

$$w''(r) - 2\kappa w'(r) + \left(\frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)w(r) = 0. \tag{4.28}$$

In tal caso

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left[\{(\alpha+s)(\alpha+s-1)-l(l+1)\}c_s+2\{1-\kappa(\alpha+s-1)\}c_{s-1}\right]r^{\alpha+s-2}=0. \tag{4.29}$$

Scegliamo $\alpha = l+1$ (escludendo $\alpha = -l$). Otteniamo

$$\frac{c_s}{c_{s-1}} = \frac{2[\kappa(s+l)-1]}{s(s+2l+1)}, \qquad s = 1,2,3,\cdots. \tag{4.30}$$

Se $\kappa = 1/n$ per $n = l+1, l+2, \cdots$, risulta $c_{n-l} = c_{n+1-l} = \cdots = 0$; dunque $w(r) = r^{l+1}v(r)$, dove $v(r)$ è un polinomio in r di grado $n-l-1$. In altre parole,

$$\begin{cases} \kappa_n^2 = \dfrac{1}{n^2}, & n = l+1, l+2, \cdots, \\ \psi(x) = r^{l+1}e^{-r/n}\, v_{l,n-l-1}(r)Y_l^m(\theta,\varphi), & m = -l, -l+1, \cdots, l. \end{cases} \tag{4.31}$$

Ponendo $w(r) = r^{l+1}v(r)$, $\kappa = (1/n)$, $t = 2r/n$ e $\tilde{v}(t) = v(r)$, otteniamo

$$t\tilde{v}''(t) + (2l+2-t)\tilde{v}'(t) + (n-l-1)\tilde{v}(t) = 0. \tag{4.32}$$

Quest'equazione è l'equazione differenziale per i polinomi di Laguerre (con peso $t^{2l+1}e^{-t}$ in $\mathbb{R}^+$).

References

[1] A.N. Tichonov e A.A. Samarskij, *Equazioni della Fisica Matematica*, Ed. Mir, Mosca, 1981.

[2] V.S. Vladimirov, *Equazioni della Fisica Matematica*, Ed. Mir, Mosca, 1987.