



# ISTITUZIONI DI FISICA MATEMATICA

Corso di 6 Crediti  
Corso di Laurea Specialistica in  
Matematica  
A.A. 2008-2009

Cornelis VAN DER MEE

Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università di Cagliari

Viale Merello 92, 09123 Cagliari

070-6755605 (studio), 070-6755601 (FAX), 335-5287988 (cell.)

[cornelis@krein.unica.it](mailto:cornelis@krein.unica.it)

<http://bugs.unica.it/~cornelis>

**oppure:** <http://krein.unica.it/~cornelis>



L'altra condizione  $u(L) = 0$  conduce alla condizione

$$\cos(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quindi gli autovalori  $\lambda_n = k_n^2 = \left((n - \frac{1}{2})\pi/L\right)^2$  e le autofunzioni  $\varphi_n(x) \sim \cos\left((n - \frac{1}{2})\pi x/L\right)$  per  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Ortonormalizzando le autofunzioni in  $L^2(0, L)$  otteniamo

$$\lambda_n = \left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L}\right), \quad (\text{I.21})$$

dove  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Le autofunzioni formano una base ortonormale di  $L^2(0, L)$ .

**e. Condizioni periodiche.** Le soluzioni non banali sono quelle periodiche. Dunque abbiamo la base ortonormale di autofunzioni (con corrispondenti autovalori)

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, & \lambda_0 = 0, \\ \varphi_n^c(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2, \\ \varphi_n^s(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), & \lambda_n = \left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2, \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

dove  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Quindi l'autovalori zero è semplice mentre gli altri autovalori hanno molteplicità 2.

**f. Condizione di Dirichlet in  $x = 0$  e mista in  $x = L$ .** Per trovare una soluzione non banale del problema al contorno supponiamo che  $k \geq 0$ . Utilizzando la condizione  $u(0) = 0$  si ottiene

$$u(x) \sim \sin(kx).$$

L'altra condizione  $(\cos \alpha)u(L) + (\sin \alpha)u'(L) = 0$  conduce alla condizione

$$\cos \alpha \sin(kL) + k \sin \alpha \cos(kL) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Escludendo i casi già trattati, cioè  $\alpha = 0$  [Dirichlet] e  $\alpha = (\pi/2)$  [Dirichlet in  $x = 0$  e Neumann in  $x = L$ ], risultano  $k > 0$ ,  $\sin(kL) = 0$  e  $\cos(kL) \neq 0$ . Arriviamo all'equazione trascendentale

$$\tan(kL) = -k \tan \alpha, \quad (\text{I.23})$$

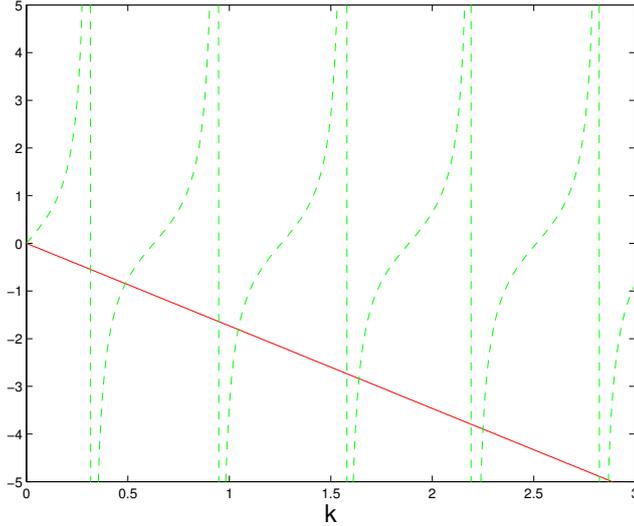


Figura I.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni  $y = \tan(xL)$  e  $y = -k \tan \alpha$  per  $L = 5$  e  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Gli autovalori sono i valori di  $k > 0$  corrispondenti ai loro punti di intersezione.

dove  $\tan \alpha > 0$ . Cercando i punti di intersezione positivi tra il grafico della funzione  $k \mapsto \tan(kL)$  e la retta  $k \mapsto -k \tan \alpha$  con coefficiente angolare negativo, troviamo una successione infinita di autovalori  $\lambda_n = k_n^2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Le corrispondenti autofunzioni si possono normalizzare in  $L^2(0, L)$ , risultando in una base ortonormale di  $L^2(0, L)$ .

**g. Condizioni Miste Diverse.** Ci limitiamo al caso in cui  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . In tal caso la soluzione

$$u(x) \sim c_1 \cos(kx) + c_2 \frac{\sin(kx)}{k}$$

per le opportune costanti  $c_1, c_2$  e per  $k > 0$  soddisfa alle due condizioni

$$c_1 \cos \beta - c_2 \sin \beta = 0, \tag{I.24}$$

$$c_1 [\cos \alpha \cos(kL) - k \sin \alpha \sin(kL)] + c_2 \left[ \cos \alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin \alpha \cos(kL) \right] = 0. \tag{I.25}$$

L'esistenza di una soluzione non banale conduce alla condizione

$$\begin{aligned} & \cos \beta \left[ \cos \alpha \frac{\sin(kL)}{k} + \sin \alpha \cos(kL) \right] \\ & + \sin \beta [\cos \alpha \cos(kL) - k \sin \alpha \sin(kL)] = 0, \end{aligned}$$

e dunque [vedi la (A.10) nell'Appendice A]

$$\begin{aligned} W[J_\nu, J_{-\nu}](x) &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} + \underbrace{O(x)}_{=0} \\ &= \frac{-2\nu}{x\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{-2 \sin(\nu\pi)}{\pi x}. \end{aligned}$$

Quindi  $J_\nu(x)$  e  $J_{-\nu}(x)$  sono linearmente indipendenti [cioè, il Wronskiano non si annulla per  $x \neq 0$ ] se e solo se  $\nu$  non è un intero. Se  $\nu \in \mathbb{Z}$ , risulta  $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$ .

Per  $\nu = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) esiste una soluzione dell'equazione di Bessel linearmente indipendente della  $J_n(x)$ . Per trovarla definiamo la *funzione di Bessel di seconda specie*

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

per  $\nu \notin \mathbb{Z}$ . Siccome sia il numeratore che il denominatore sono funzioni analitiche di  $\nu \in \mathbb{C}$  e  $(d/d\nu) \sin(\nu\pi) = \pi \cos(\nu\pi) \neq 0$  per  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ , il limite di  $Y_\nu(x)$  per  $\nu \rightarrow n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  esiste ed è uguale all'espressione

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[ \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}.$$

Calcolando la derivata della serie di potenza per  $J_\nu(x)$  rispetto a  $\nu$  ed introducendo la funzione  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  otteniamo per  $x \geq 0$

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2} \left[ \log \frac{z}{2} - \psi(k+1) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} J_0(x) \log \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2} \psi(k+1), \\ Y_n(x) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k-n} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[ 2 \log \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)]. \end{aligned}$$

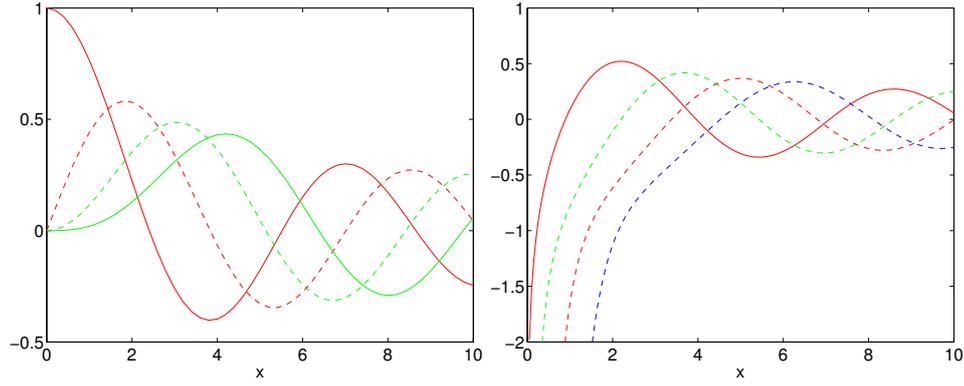


Figura III.1: Pannello sinistro: le funzioni di Bessel  $J_\nu(x)$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3$ .  
Pannello destro: le funzioni di Neumann  $Y_\nu(x)$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3$ .

Quest'espressione conduce alle rappresentazioni asintotiche per  $x \rightarrow 0^+$

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2}, & n = 0 \\ -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

implicando che  $|Y_n(x)| \rightarrow +\infty$  se  $x \rightarrow 0$ .

Per ragioni di linearità le funzioni di Bessel di seconda specie soddisfano alle stesse formule di ricorrenza di quelle di prima specie. In particolare

$$Y'_\nu(x) = Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x);$$

$$\frac{d}{dx} [x^\nu Y_\nu(x)] = x^\nu Y_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} Y_\nu(x)] = -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x);$$

$$Y'_0(x) = -Y_1(x); \quad Y_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) + Y_{\nu-1}(x) = 0.$$

### 4.3 Ortogonalità e zeri

La seguente proposizione ci importa nei casi  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  (cercando gli zeri) e  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$  (cercando i valori estremi).

**Proposizione III.4** Per  $\alpha, \beta \geq 0$  con  $\alpha + \beta > 0$ , siano  $\mu_1$  e  $\mu_2$  zeri reali dell'equazione

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0, \quad (\text{III.43})$$

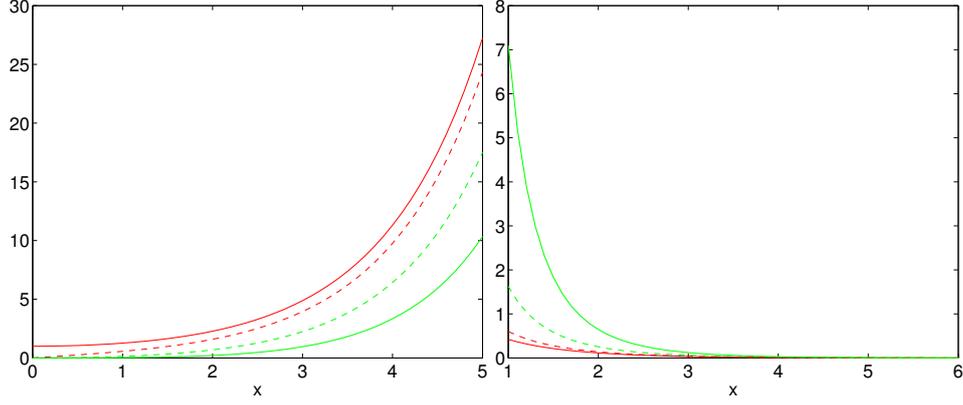


Figura III.2: Pannello sinistro: le funzioni di Bessel immaginarie  $I_\nu(x)$  per  $\nu = 0, 1, 2, 3$ . Pannello destro: le funzioni di MacDonald  $K_\nu(x)$  per  $\nu = 0, 1, 2, 3$ .

Le dimostrazioni delle formule asintotiche (III.52)-(III.56) si trovano nell'Appendice B. Analogamente, utilizzando la (III.39), si ottiene per  $x \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} H_0^{(1)}(x) \approx -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & H_0^{(2)}(x) \approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x}, \\ Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x}, & K_0(x) \approx \ln \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} (I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)) &= \frac{\pi}{2} (e^{\nu\pi i/2} J_{-\nu}(iz) - e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(iz)) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2} (J_{-\nu}(iz) - e^{-\nu\pi i} J_\nu(iz)) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2} (-[J_\nu(iz) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(iz)] + i \sin(\nu\pi) J_\nu(iz)) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\nu\pi i/2} \sin(\nu\pi) (J_\nu(iz) + iY_\nu(iz)) \\ &= \frac{\pi i}{2} e^{\nu\pi i/2} H_\nu^{(1)}(iz) \sin(\nu\pi) = K_\nu(z) \sin(\nu\pi), \end{aligned}$$

implicando che<sup>5</sup>

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}.$$

<sup>5</sup>In [22, Sec. 17.71] la funzione di MacDonald  $K_\nu(z)$  viene definita in modo diverso:  $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} (I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)) \cot(\nu\pi)$ .

Per  $\nu = n \in \mathbb{Z}$  bisogna calcolare il limite se  $\nu \rightarrow n$ .

Troviamo ora le equazioni differenziali per le funzioni  $I_\nu(x)$  e  $K_\nu(x)$ . Sostituendo  $x \mapsto ix$  nella (III.34), otteniamo l'equazione differenziale

$$\boxed{x^2 u'' + x u' - (x^2 + \nu^2) u = 0.} \quad (\text{III.57})$$

Dal Teorema III.5 segue che per  $\nu > -1$  le funzioni di Bessel immaginarie  $I_\nu(x)$  e le loro derivate prime non hanno zeri reali (con l'eccezione di  $x = 0$  se  $\nu > 0$ ).

## 4.5 Funzioni sferiche di Bessel

Le funzioni di Bessel  $J_{\pm(l+\frac{1}{2})}(x)$ , dove  $l = 0, 1, 2, \dots$ , appaiono nello studio dello scattering quantistico e dello scattering della luce. Per questo motivo vengono introdotte le seguenti funzioni:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+\frac{1}{2}}(z), \quad (\text{III.58})$$

$$y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{l+\frac{1}{2}}(z), \quad (\text{III.59})$$

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + i y_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(z), \quad (\text{III.60})$$

$$h_l^{(2)}(z) = j_l(z) - i y_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(z). \quad (\text{III.61})$$

Le funzioni  $j_l(z)$ ,  $y_l(z) = (-1)^{l+1} n_l(z)$  e  $h_l^{(1,2)}(z)$  si dicono *funzioni sferiche di Bessel* di prima, seconda e terza specie. Quindi

$$j_0(z) = \frac{\sin(z)}{z},$$

$$j_1(z) = \frac{\sin(z)}{z^2} - \frac{\cos(z)}{z},$$

$$j_2(z) = \left( \frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \sin(z) - \frac{3}{z^2} \cos(z),$$

$$y_0(z) = -n_0(z) = -\frac{\cos(z)}{z},$$

$$y_1(z) = n_1(z) = -\frac{\cos(z)}{z^2} - \frac{\sin(z)}{z},$$

$$y_2(z) = -n_2(z) = \left( -\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z} \right) \cos(z) - \frac{3}{z^2} \sin(z).$$

Consideriamo ora le funzioni sferiche sulla sfera  $S^2$  ( $n = 3$ ). In coordinate sferiche abbiamo per  $y_l(x) = r^l Y_l(\theta, \varphi)$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial Y_l}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \theta^2} + l(l+1)Y_l(\theta, \varphi) = 0, \quad (\text{III.71})$$

dove  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$  e  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Cerchiamo le soluzioni della (III.71) in  $C^\infty(S^2)$ . Introduciamo prima  $\xi = \cos \varphi$  e scriviamo (III.71) nella forma

$$\frac{1}{1-\xi^2} \frac{\partial^2 Y_l}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( (1-\xi^2) \frac{\partial Y_l}{\partial \xi} \right) + l(l+1)Y_l(\theta, \xi) = 0. \quad (\text{III.72})$$

Applicando la separazione delle variabili

$$Y_l(\theta, \varphi) = \mathcal{P}(\xi)\Theta(\theta),$$

otteniamo

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ c_1 \cos m\theta + c_2 \sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

dove abbiamo sfruttato la periodicit  della  $\Theta(\theta)$ :  $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$ . Dunque  $\Theta''(\theta) = -m^2\Theta(\theta)$ . Risulta l'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1-\xi^2) \frac{d\mathcal{P}}{d\xi} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2} \right] \mathcal{P}(\xi) = 0. \quad (\text{III.73})$$

Quest'equazione si pu  scrivere nella forma

$$- [(1-\xi^2)\mathcal{P}']' + \frac{m^2}{1-\xi^2}\mathcal{P} = l(l+1)\mathcal{P}.$$

Le soluzioni di quest'equazione nei punti  $\pm 1$  debbono assumere valori finiti.

## 5.2 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre  $P_l(\xi)$  si possono definire nei seguenti modi:

1. tramite la formula generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\xi h+h^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\xi)h^l, \quad |h| < 1,$$

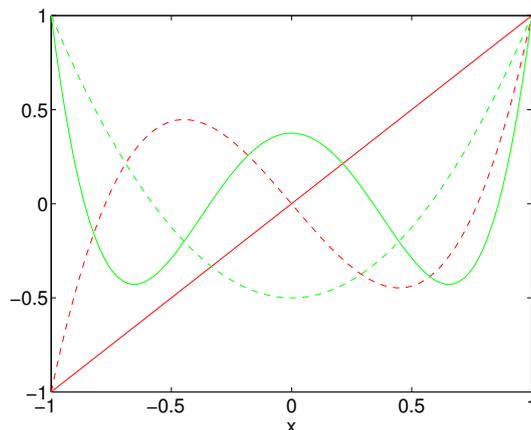


Figura III.3: I polinomi di Legendre di grado 1, 2, 3 e 4. Si osservi che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

2. tramite l'equazione differenziale,

$$\boxed{-[(1-x^2)P_l']'(x) = l(l+1)P_l(x), \quad -1 < x < +1; \quad \boxed{P_l(1) = 1,}}$$

3. tramite l'ortogonalità:  $P_l(\xi)$  sono i polinomi in  $\xi$  di grado  $l$  con coefficiente principale positivo tali che

$$\boxed{\int_{-1}^1 P_l(\xi)P_{l'}(\xi) d\xi = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1},}$$

4. tramite la formula di Rodrigues

$$\boxed{P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{d\xi} \right)^l (\xi^2 - 1)^l,}$$

5. tramite la formula di ricorrenza

$$\boxed{(2l+1)\xi P_l(\xi) = (l+1)P_{l+1}(\xi) + lP_{l-1}(\xi), \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi.}$$

Noi dimostriamo l'equivalenza tra queste definizioni.

**4**  $\Rightarrow$  **2**. Consideriamo l'equazione differenziale

$$-[(1-x^2)u']'(x) = \lambda u(x), \quad -1 < x < +1, \quad (\text{III.74})$$

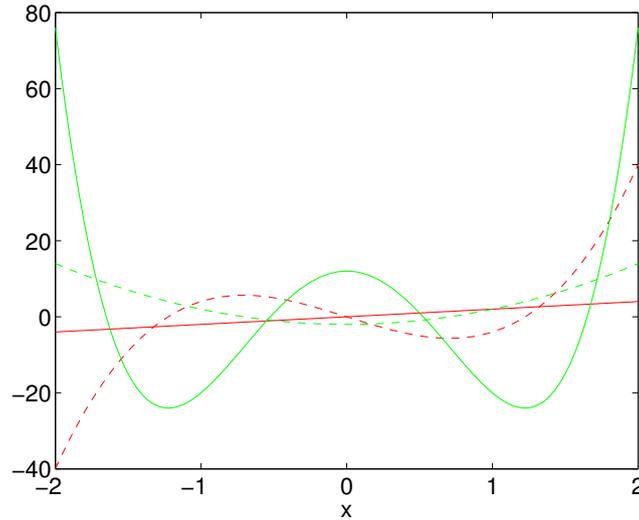


Figura III.4: I polinomi di Hermite di grado 1, 2, 3 e 4. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio.

dove  $H_0(z) = 1$  e  $H_1(z) = 2z$ .

Dimostriamo ora la formula generatrice

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (\text{III.95})$$

Infatti, ponendo  $F(z, t) = e^{2zt-t^2}$  e scrivendo

$$F(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(z)}{n!} t^n \quad (\text{III.96})$$

per opportuni coefficienti  $h_n(z)$ , risultano

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= 2tF(z, t), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h'_n(z)}{n!} t^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h_{n-1}(z)}{(n-1)!} t^n. \end{aligned}$$

Quindi  $h_n(z)$  è un polinomio in  $z$  di grado  $n$  e

$$h'_n(z) = 2nh_{n-1}(z). \quad (\text{III.97})$$

Dalla (III.96) risulta che  $h_n(0)$  coincide con la derivata  $n$ -esima di  $e^{-t^2}$  per  $t = 0$ , cioè con 0 se  $n$  è dispari, e con  $(-1)^{n/2}(n!)/(n/2)!$  se  $n$  è pari. Dalla

formula di Rodriguez (III.89) si vede facilmente che  $H_n(0) = h_n(0)$  per  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Utilizzando le espressioni (III.93) e (III.97) arriviamo alla identità  $H_n(z) = h_n(z)$  e quindi alla formula generatrice (III.95).

## 7 Polinomi di Laguerre

I *polinomi di Laguerre* si definiscono tramite la seguente formula di Rodriguez:

$$\boxed{L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}.} \quad (\text{III.98})$$

Si dimostra facilmente che la (III.98) rappresenta un polinomio di grado  $n$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La regola di Leibnitz ci dà subito la rappresentazione  $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^n/n!) + \dots$ . Ci limitiamo al caso  $\alpha > -1$ .

La funzione  $w(x) = x^{n+\alpha} e^{-x}$  soddisfa l'equazione differenziale

$$xw' + (x - n - \alpha)w = 0. \quad (\text{III.99})$$

Derivando la (III.99)  $n + 1$  volte e ponendo  $u = w^{(n)}$  si arriva all'equazione differenziale

$$xu'' + (x + 1 - \alpha)u' + (n + 1)u = 0.$$

Sostituendo  $u = x^\alpha e^{-x} v$  in quest'ultima equazione si ottiene la seguente *equazione differenziale di Laguerre*:

$$\boxed{xv'' + (\alpha + 1 - x)v' + \nu v = 0.} \quad (\text{III.100})$$

Di conseguenza,  $L_n^{(\alpha)}(x)$  è una soluzione dell'equazione (III.100).

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$xv'' + (\alpha + 1 - x)v' + \nu v = 0. \quad (\text{III.101})$$

Sostituendo  $v(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l$  si trova la seguente espressione per il coefficiente di  $x^l$ :

$$(l + 1)(l + \alpha + 1)c_{l+1} + (\nu - l)c_l = 0.$$

Quindi abbiamo trovato la formula di ricorrenza

$$\frac{c_{l+1}}{c_l} = \frac{l - \nu}{(l + 1)(l + \alpha + 1)}, \quad (\text{III.102})$$

che ci consente a calcolare tutti i coefficienti  $c_l$  dal coefficiente iniziale  $c_0 = v(0)$ ; bisogna richiedere  $\alpha > -1$  per garantire la positività del denominatore nella

Calcoliamo ora il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
C_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\} dx \\
&= \left[ \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1-j} \{x^{n+1+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty \left( \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+1+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[ \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (n+1-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n+1-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\
&\quad + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left( \left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) \int_0^\infty x^{n+1+\alpha} e^{-x} dx \\
&= -\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato  $x L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n (x^{n+1}/n!) + \dots$ . Poi calcoliamo l'integrale:

$$D_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x)^2 x^\alpha e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!} \int_0^\infty x L_n^{(\alpha)}(x) \left( \frac{d}{dx} \right)^n \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} dx \\
&= \left[ \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) \left( \frac{d}{dx} \right)^{n-j} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} \right]_{x=0}^\infty \\
&+ \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left( \left( \frac{d}{dx} \right)^n \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \left[ \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (x L_n^{(\alpha)})^{(j-1)}(x) (-1)^{n-j} (n-j)! x^{\alpha+j} e^{-x} L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) \right]_{x=0}^\infty \\
&+ \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty \left( \left( \frac{d}{dx} \right)^n \{x L_n^{(\alpha)}(x)\} \right) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty ((n+1)! x - n(n+\alpha)n!) x^{n+\alpha} e^{-x} dx \\
&= \frac{(n+1)\Gamma(n+\alpha+2) - n(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \\
&= \frac{(2n+1+\alpha)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato  $x L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n ((x^{n+1} - n(n+\alpha)x^n)/n!) + \dots$ . Dalla (III.106) e le espressioni per  $C_n^{(\alpha)}$  e  $D_n^{(\alpha)}$  seguono  $A_n^{(\alpha)} = -(n+1)$ ,  $B_n^{(\alpha)} = 2n+1+\alpha$  e  $C_n^{(\alpha)} = -(n+\alpha)$ . Dunque risulta la formula di ricorrenza

$$\boxed{(2n+1+\alpha-x)L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}, \quad \text{(III.107)}$$

dove  $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$  e  $L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x$ .

Per dimostrare la validità della formula generatrice

$$(1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n, \quad |t| < 1, \quad \text{(III.108)}$$

partiamo dalla serie di funzioni

$$F(x, t) = (1-t)^{-(1+\alpha)} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) t^n, \quad |t| < 1, \quad \text{(III.109)}$$

dove  $c_n(x) n!$  è la derivata parziale  $n$ -esima di  $F(x, t)$  rispetto a  $t$  per  $t = 0$ . Sostituendo la serie (III.109) nella equazione

$$(1-t)^2 \frac{\partial F}{\partial t} + [x - (1+\alpha)(1-t)] F = 0,$$

otteniamo le seguenti espressioni per i coefficienti  $t^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) e per il coefficiente di  $t^0$ :

$$\begin{cases} (n+1)c_{n+1}(x) + (x-2n-\alpha-1)c_n(x) + (n+\alpha)c_{n-1}(x), \\ c_1(x) + (x-\alpha-1)c_0(x) = 0, \end{cases}$$

dove  $c_0(x) = 1$ . Quindi  $c_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$  per  $n = 0, 1, 2, \dots$  (vedi la (III.107)).

Infine, per esprimere i polinomi di Hermite in quelli di Laguerre riscriviamo i prodotti scalari tra quest'ultimi utilizzando la trasformazione  $x = t^2$ :

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x} dx = \int_{-\infty}^\infty L_n^{(\alpha)}(t^2)L_m^{(\alpha)}(t^2)|t|^{2\alpha+1}e^{-t^2} dt, \quad (\text{III.110})$$

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x} dx = \int_{-\infty}^\infty tL_n^{(\alpha)}(t^2)tL_m^{(\alpha)}(t^2)|t|^{2\alpha-1}e^{-t^2} dt. \quad (\text{III.111})$$

Per fare scomparire i fattori  $|t|^{2\alpha\pm 1}$  in (III.110) e (III.111) scegliamo  $\alpha = -\frac{1}{2}$  in (III.110) e  $\alpha = \frac{1}{2}$  in (III.111). Quindi  $H_{2n}(t)$  è proporzionale a  $L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2)$  e  $H_{2n+1}(t)$  è proporzionale a  $tL_n^{(\frac{1}{2})}(t^2)$ . Confrontando i coefficienti principali otteniamo

$$H_{2n}(t) = 2^{2n} n! (-1)^n L_n^{(-\frac{1}{2})}(t^2), \quad (\text{III.112})$$

$$H_{2n+1}(t) = 2^{2n+1} n! (-1)^n t L_n^{(\frac{1}{2})}(t^2). \quad (\text{III.113})$$

## 8 Polinomi di Chebyshev

I polinomi di Chebyshev di prima specie  $T_n(x)$  e di seconda specie  $U_n(x)$  si definiscono nel seguente modo:<sup>8</sup>

$$\boxed{T_n(x) = \cos(nt)}, \quad \boxed{U_n(x) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t}}, \quad (\text{III.114})$$

where  $x = \cos(t)$ . In tal caso  $T_n(x)$  e  $U_n(x)$  sono polinomi di  $x$  di grado  $n$  che hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x), \\ U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, & U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= 2xU_n(x). \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Per  $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$  si hanno le definizioni alternative  $T_n(x) = \cosh(nt)$  e  $U_n(x) = \sinh((n+1)t)/\sinh t$  per  $x = \cosh t$ .

La formula di ricorrenza è facile da verificare:

$$\begin{aligned}
 T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t) \\
 &= 2 \cos(t) \cos(nt) = 2xT_n(x), \\
 U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+2)t)}{\sin(t)} + \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \\
 &= \frac{2 \cos(t) \sin((n+1)t)}{\sin(t)} = 2xU_n(x).
 \end{aligned}$$

Si vede subito che  $-1 \leq T_n(x) \leq +1$  per  $x \in [-1, 1]$ , mentre  $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$  e  $U_n(x) = 2^n x^n + \dots$  per  $n \in \mathbb{N}$ .

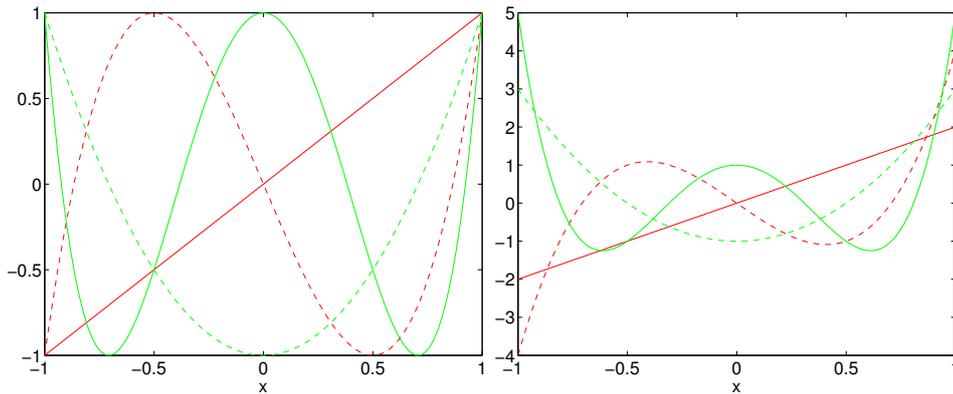


Figura III.6: I polinomi di Chebyshev di prima e seconda specie di grado 1, 2, 3 e 4. Nel pannello sinistro si trovano i grafici dei polinomi di Chebyshev di prima specie e nel pannello destro quelli di seconda specie. Osserviamo che il numero degli zeri è uguale al grado del polinomio. Inoltre, i polinomi di Chebyshev di prima specie hanno  $\pm 1$  come i loro valori estremi.

Sono verificate le relazioni di ortogonalità

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \cos(nt) \cos(mt) dt &= \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,m}, \\
 \int_0^\pi \sin((n+1)t) \sin((m+1)t) dt &= \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}.
 \end{aligned}$$

Sostituendo  $x = \cos(t)$  otteniamo

$$\boxed{\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,m}} \quad (\text{III.115})$$

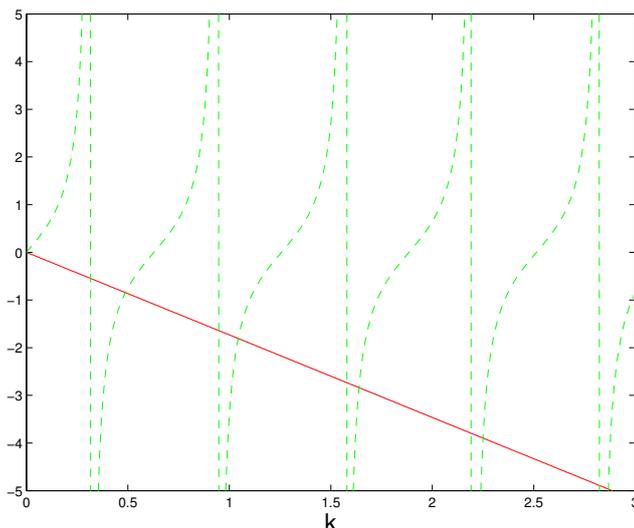


Figura V.1: Il plot contiene i grafici delle funzioni  $y = \tan(xL)$  e  $y = -k \tan \alpha$  per  $L = 5$  e  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Gli autovalori sono i valori di  $k > 0$  corrispondenti ai loro punti di intersezione.

con la condizione che  $\lambda = 0$  non sia un autovalore dell'operatore  $L$  è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy + \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)f(y) dy, \quad u \in L^2(0, \ell), \quad (\text{V.18})$$

dove  $\mathcal{G}(x, y)$  è la funzione di Green dell'operatore  $L$ . Inoltre, le soluzioni  $u$  dei problemi equivalenti (V.17) e (V.18) appartengono ad  $\mathcal{M}_L$ .

*Dimostrazione.* Se  $u(x)$  è una soluzione del problema al contorno (V.17), allora

$$u(x) = (G[\lambda u + f])(x) = \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)[\lambda u(y) + f(y)] dy, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

cioè  $u(x)$  soddisfa l'equazione integrale (V.18).

Inversamente, supponiamo che la funzione  $u_0 \in L^2(0, \ell)$  soddisfi l'equazione integrale (V.18). Se  $G$  denota l'operatore integrale con nucleo  $\mathcal{G}(x, y)$ , allora  $u_0 = G(\lambda u_0 + f) \in D(\bar{L})$  e  $\bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$ . Dall'uguaglianza

$$u_0(x) = - \frac{v_1(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}$$

segue che  $u_0 \in C[0, \ell]$ , poichè le funzioni sotto il segno degli integrali appartengono ad  $L^1(0, \ell)$ . In tal caso segue dall'equazione precedente che  $u_0 \in C^1[0, \ell]$  con derivata

$$u_0'(x) = - \frac{v_1'(x) \int_x^\ell v_2(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy + v_2'(x) \int_0^x v_1(y)[\lambda u_0(y) + f(y)] dy}{p(0)w(0)}.$$

Da quell'ultima equazione segue che  $u_0 \in C^2[0, \ell]$ . Inoltre, dalla (V.6) segue che  $u_0(x)$  soddisfa le condizioni al contorno (V.2). Dunque  $u_0 \in \mathcal{M}_L$ . Di conseguenza,  $Lu_0 = \bar{L}u_0 = \lambda u_0 + f$ .  $\square$

Applicando il teorema precedente al caso  $f = 0$ , concludiamo che ogni autofunzione dell'operatore  $L$  (in principio appartenente a  $D(\bar{L})$ ) appartiene ad  $\mathcal{M}_L$ . Inoltre, tutte le autofunzioni appartengono a  $C[0, \ell]$ . Quindi il problema al contorno per  $f = 0$  (cioè, il problema agli autovalori) è equivalente a quello agli autovalori dell'equazione integrale omogenea

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell \mathcal{G}(x, y)u(y) dy \quad (\text{V.19})$$

in  $C[0, \ell]$  oppure in  $L^2(0, \ell)$ , a condizione che  $\lambda = 0$  non sia autovalore dell'operatore  $L$ .

Eliminiamo ora l'ipotesi che  $\lambda = 0$  non sia un autovalore dell'operatore  $L$ . Per farlo, sia  $\mu_0 \in \mathbb{R}$  un numero che non è un autovalore. Allora  $\mu = 0$  non è un autovalore del problema di Sturm-Liouville

$$L_1 u \equiv -(pu')' + (q - \mu_0)u = \mu u, \quad (\text{V.20})$$

$$h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad H_1 u(\ell) + H_2 u'(\ell) = 0. \quad (\text{V.21})$$

Ma  $\mathcal{M}_L = \mathcal{M}_{L_1}$  e  $D(\bar{L}) = D(\bar{L}_1)$ . Quindi il problema di Sturm-Liouville (V.1)-(V.2) è equivalente all'equazione integrale

$$u(x) = (\lambda - \mu_0) \int_0^\ell \mathcal{G}_1(x, y)u(y) dy, \quad (\text{V.22})$$

dove  $\mathcal{G}_1(x, y)$  è la funzione di Green dell'operatore  $L_1$ .

### 1.3 Proprietà degli autovalori e delle autofunzioni

Abbiamo dunque stabilito l'equivalenza tra il problema di Sturm-Liouville omogeneo ed il problema agli autovalori per l'equazione integrale omogenea (V.22) con nucleo integrale  $\mathcal{G}_1(x, y)$  reale, simmetrico e continuo. Gli autovalori

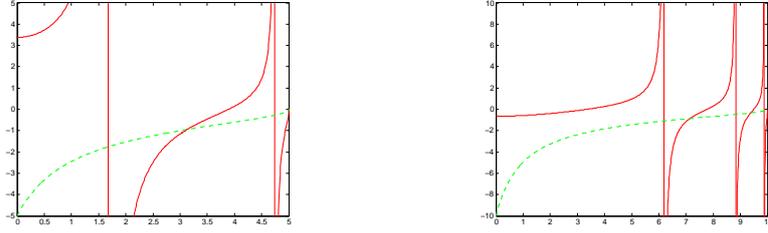


Figura C.1: Per  $l = 0$  e per  $r_0\sqrt{V_0} = 5$  (pannello sinistro) o  $10$  (pannello destro) vengono calcolati graficamente i valori di  $z = \kappa r_0$  per cui l'equazione di Schrödinger per la buca sferica ha stato limite.

e quindi  $(S'/S)(r_0) = (1/r_0) > 0$ . Di conseguenza, siamo costretti a limitarci al caso  $0 < \kappa < \sqrt{V_0}$ . In tal caso la condizione  $S(0) = 0$  conduce a  $S(r) \sim \sin(r\sqrt{V_0 - \kappa^2})$  per  $0 < r < r_0$ . Dalla condizione di derivabilità continua in  $r = r_0$  si trova

$$\sqrt{V_0 - \kappa^2} \frac{\cos(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})}{\sin(r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2})} = -\kappa.$$

Per studiare quest'ultima equazione, poniamo  $\xi = r_0\sqrt{V_0 - \kappa^2}$  (che appartiene all'intervallo  $(0, r_0\sqrt{V_0})$ ) e scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{\xi}{\tan(\xi)} = -\sqrt{V_0 r_0^2 - \xi^2}, \quad 0 < \xi < r_0\sqrt{V_0},$$

oppure

$$\tan(\xi) = -\frac{\xi}{\sqrt{V_0 r_0^2 - \xi^2}}, \quad 0 < \xi < r_0\sqrt{V_0}.$$

Per  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $(n - \frac{1}{2})\pi < r_0\sqrt{V_0} \leq (n + \frac{1}{2})\pi$  ci sono  $n$  soluzioni  $\xi$  di quest'equazione e quindi  $n$  stati limite.

## 2 Oscillatore armonico

a. Utilizzando le coordinate sferiche. In tal caso

$$V(r) = \frac{1}{2}\gamma r^2, \quad (\text{C.20})$$

dove  $\gamma > 0$  è una costante. Ponendo  $c = \sqrt{\gamma/8}$  e  $R(r) = e^{-cr^2}\phi(r)$ , la (C.11) si riduce all'equazione differenziale

$$\phi''(r) + \left(\frac{2}{r} - 4cr\right)\phi'(r) + \left(k^2 - 6c - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\phi(r) = 0. \quad (\text{C.21})$$

Sostituendo la serie di potenze

$$\phi(r) = r^\alpha \sum_{s=0}^{\infty} c_s r^s, \quad (\text{C.22})$$

dove  $\alpha$  è un parametro da stabilire, troviamo

$$\sum_{s=0}^{\infty} [\{(\alpha+s)(\alpha+s-1) + 2(\alpha+s) - l(l+1)\}c_s + \{(k^2 - 6c) - 4c(\alpha+s-2)\}c_{s-2}] r^{\alpha+s-2} = 0,$$

dove  $c_{-1} = c_{-2} = 0$ . Supponendo che il coefficiente di  $r^{\alpha-2}$  sia diverso da zero, si trova

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - l(l+1) = 0,$$

e quindi  $\alpha = l$  oppure  $\alpha = -(l+1)$ . La condizione al contorno (C.12) se  $r \rightarrow 0^+$  implica che  $\alpha = l$ . In tal caso  $c_1 = 0$  e

$$s(s+2l+1)c_s + \{(k^2 - 6c) - 4c(s+l-2)\}c_{s-2} = 0. \quad (\text{C.23})$$

Dunque  $c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$  e

$$c_s = \frac{4c(s+l-2) - (k^2 - 6c)}{s(s+2l+1)}c_{s-2},$$

dove  $s = 2, 4, 6, \dots$ . Il rapporto  $c_s r^2 / c_{s-2} \sim (4cr^2/s)$  se  $s \rightarrow +\infty$ . Quindi scegliamo  $k^2$  tale che  $c_s = 0$  per qualche  $s = 2, 4, 6, \dots$ , cioè

$$k^2 = 4c(s+l-2) + 6c, \quad s = 2, 4, 6, \dots$$

Quindi abbiamo trovato gli autovalori e le autofunzioni

$$\begin{cases} k_{l,n}^2 = 2c(2n+3), & l = n, n-2, n-4, \dots, l = 0, 1, 2, \dots, \\ \psi_{l,n}(r, \theta, \varphi) = e^{-cr^2} \phi_{l,n}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), & m = -l, -l+1, \dots, l, \end{cases} \quad (\text{C.24})$$