Cap. I: Algebre di Banach

1 Definizioni e esempi principali

Un'*algebra di Banach* è uno spazio di Banach complesso $\mathcal{B}$ in cui è stata definita una moltiplicazione (tra vettori) con le seguenti proprietà. Per ogni $x, y, z \in \mathcal{B}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha

(a) $(xy)z = x(yz)$ [associatività],

(b) $x(y+z) = xy + xz$ e $(y+z)x = yx + zx$ [distributività],

(c) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$,

(d) $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$.

Si ricorda che la norma in $\mathcal{B}$ è completa nel senso che ogni successione di Cauchy in $\mathcal{B}$ è convergente in $\mathcal{B}$. È chiaro, in vista della proprietà (d), che le operazioni algebriche su $\mathcal{B}$ [cioè, l'addizione $(x, y) \mapsto x + y$, la moltiplicazione tra vettori $(x, y) \mapsto xy$, e la moltiplicazione scalare $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$] sono continue. Se $xy = yx$ per ogni $x, y \in \mathcal{B}$, l'algebra si dice *commutativa*.

Un elemento $e \in \mathcal{B}$ si dice *elemento unità* se $\|e\| = 1$ e $ex = xe = x$ per ogni $x \in \mathcal{B}$. In tal caso $\mathcal{B}$ si dice *algebra con unità*.

Esercizio. Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Banach senza unità. Sia $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \times \mathbb{C}$ con le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned}
(x, \lambda) + (y, \mu) &= (x + y, \lambda + \mu), \\
\gamma(x, \lambda) &= (\gamma x, \gamma\lambda), \\
(x, \lambda)(y, \mu) &= (xy + \mu x + \lambda y, \lambda\mu), \\
\|(x, \lambda)\| &= \|x\| + |\lambda|.
\end{aligned}$$

Si dimostri che $\mathcal{B}_1$ è un'algebra con unità (quale?) e che $x \mapsto (x, 0)$ è un'immersione isometrica di $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}_1$.

Una *sottoalgebra* $\mathcal{A}$ dell'algebra di Banach $\mathcal{B}$ è un sottospazio lineare dello spazio di Banach $\mathcal{H}$ che è chiuso per la moltiplicazione (tra vettori) in $\mathcal{B}$. In altre parole, se $x, y \in \mathcal{A}$, allora $xy \in \mathcal{A}$. Una *sottoalgebra chiusa* di un'algebra di Banach $\mathcal{B}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{B}$ che è chiuso rispetto alle operazioni e la norma di $\mathcal{B}$.

Concludiamo questo paragrafo con alcuni esempi di algebre di Banach.

(a) Sia K uno spazio compatto di Hausdorff e sia $C(K)$ l'insieme di tutte le funzioni continue $f : K \to \mathbb{C}$. Allora $C(K)$ è un'algebra di Banach commutativa con unità rispetto alle seguenti operazioni e alla seguente norma:

$$\begin{cases} (f+g)(t) = f(t) + g(t), & t \in K, \\ (\lambda f)(t) = \lambda f(t), & t \in K, \\ (fg)(t) = f(t)g(t), & t \in K, \\ \|f\| = \max_{t \in K} |f(t)|. \end{cases}$$

Qual'è l'elemento unità? Perché la norma è completa?

(b) Sia X uno spazio di Banach complesso e sia $\mathcal{L}(X)$ l'insieme di tutti gli operatori lineari limitati su X. Allora $\mathcal{L}(X)$ è un'algebra di Banach rispetto alle operazioni e alla norma

$$\begin{cases} (T+S)x = Tx + Sx, & x \in X, \\ (\lambda T)x = \lambda Tx, & x \in X, \\ (TS)x = T(Sx), & x \in X, \\ \|T\| = \sup_{0 \neq x \in X} (\|Tx\|/\|x\|). \end{cases}$$

Qual'è l'elemento unità? Dimostrare che$\mathcal{L}(X)$non è commutativa se $\dim X$ ≥ 2.

(c) Sia $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'insieme di tutti le successioni complesse $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tali che la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ è assolutamente convergente. Allora $\ell^1(\mathbb{Z})$ è un'algebra di Banach commutativa con unità rispetto alle operazioni e alla norma

$$\begin{cases} (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} + (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \\ \lambda(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}, & z_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{n-k}, \\ \|(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\| = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|. \end{cases}$$

Quindi la moltiplicazione tra vettori è il cosiddetto *prodotto convoluzione*. L'algebra $\ell^1(\mathbb{Z})$ si chiama l'*algebra di Wiener* (*discreta*). Domanda: Qual'è il suo elemento unità?

(d) Sia $L^1(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le funzioni sommabili $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ rispetto alla misura di Lebesgue[1]. Allora $L^1(\mathbb{R})$ è un'algebra di Banach commutativa senza unità rispetto alle operazioni e alla norma

$$\begin{cases} (f+g)(t) = f(t) + g(t), & t \in \mathbb{R}\ q.o., \\ (\lambda f)(t) = \lambda f(t), & t \in \mathbb{R}\ q.o., \\ (fg)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\, ds, & t \in \mathbb{R}\ q.o., \\ \|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt. \end{cases}$$

La moltiplicazione (tra vettori) si chiama il prodotto convoluzione (spesso indicata con $f * g$). All'algebra $L^1(\mathbb{R})$ si aggiunge l'elemento unità nella seguente maniera. Consideriamo $\mathcal{W} = \mathbb{C} \times L^1(\mathbb{R})$ con le seguenti operazioni e la seguente norma:

$$\begin{cases} (c,f) + (d,g) = (c+d, f+g), \\ \lambda(c,f) = (\lambda c, \lambda f), \\ (c,f)(d,g) = (cd, df + cg + (f*g)), \\ \|(c,f)\| = |c| + \|f\|. \end{cases}$$

Allora $\mathcal{W}$ è un'algebra di Banach commutativa con l'unità $(1,0)$ che si chiama l'*algebra di Wiener* (*continua*).

(e) Sia S un sottoinsieme compatto del piano complesso S con parte interna non vuota (per esempio, il disco unitario $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$). Allora l'insieme $\mathcal{A}(S)$ di tutte le funzioni continue $f : S \to \mathbb{C}$, che sono analitiche all'interno di S, è un'algebra di Banach commutativa con unità rispetto alle operazioni e alla norma

$$\begin{cases} (f+g)(t) = f(t) + g(t), & t \in S, \\ (\lambda f)(t) = \lambda f(t), & t \in S, \\ (fg)(t) = f(t)g(t), & t \in S, \\ \|f\| = \max_{t \in S} |f(t)|. \end{cases}$$

È evidente che $\mathcal{A}(S)$ è una sottoalgebra chiusa di $C(S)$.

[1]Identifichiamo due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che l'insieme $\{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq g(t)\}$ ha misura nulla. In tal caso si dice che $f(t) = g(t)$ *quasi ovunque* (q.o.).

(f) Una matrice complessa $n \times n$, $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, si dice *matrice circolante* se $a_{i,j} = a_{i-j}$ (cioè, a_{i-j} dipende soltanto dalla differenza $i - j$) e $a_{j+n} = a_j$ ($j = -n, \cdots, n$). Per $n = 5$ si ottiene una matrice del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_0 \end{pmatrix},$$

dove a_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) sono numeri complessi. Per $n \geq 1$ arbitrario si ha

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & & & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix},$$

dove a_j ($j = 0, 1, \cdots, n-1$) sono numeri complessi. Scriviamo $A = C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$. Si vede facilmente che

$$C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{pmatrix} = \hat{a}(z) \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad z^n = 1,$$

dove $\hat{a}(z) = a_0 + za_1 + z^2 a_2 + \cdots + z^{n-1} a_{n-1}$. Quindi gli autovettori della matrice circolante $C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ sono i valori $\hat{a}(z)$ del polinomio $\hat{a}(z)$ calcolati per gli z per cui $z^n = 1$. Ne consegue che le matrici circolanti di ordine n costituiscono un'algebra di Banach (rispetto a qualsiasi norma matriciale) commutativa con unità. Limitatamente alla struttura algebrica (cioè senza tener conto della norma e delle corrispondenti proprietà topologiche) essa può essere identificata con il $\mathbb{C}$-modulo quoziente $\mathbb{C}[x]/(x^n - 1)$ ootenuto identificando polinomi complessi la cui differenza sia divisibile per $x^n - 1$.

2 Proprietà principali

Un sottoinsieme $\mathcal{I}$ di un'algebra di Banach $\mathcal{B}$ si dice *ideale* in $\mathcal{B}$ se $\mathcal{I}$ è un sottospazio lineare dello spazio di Banach $\mathcal{B}$ e se xa e ax appartengono ad $\mathcal{I}$ per tutti i vettori $a \in \mathcal{I}$ e $x \in \mathcal{B}$. Un ideale $\mathcal{I}$ in $\mathcal{B}$ si dice *non banale* se $\mathcal{I} \neq \{0\}$ e $\mathcal{I} \neq \mathcal{B}$. Si dimostra facilmente che la chiusura di un ideale in $\mathcal{B}$ è un ideale in $\mathcal{B}$.

Discutiamo alcuni esempi (che corrispondono ai precedenti esempi di algebre di Banach).

(a) L'insieme di tutte le funzioni in $C(K)$ (essendo K uno spazio compatto di Hausdorff) che assumano il valore zero sul sottoinsieme non vuoto K_0 di K, è un ideale in $C(K)$. Questo ideale non è banale se e solo se K_0 non è un sottoinsieme denso in K [perché?].

(b) L'insieme di tutti gli operatori in $\mathcal{L}(X)$ di rango finito (cioè, con un immagine che ha dimensione finita) è un ideale in $\mathcal{L}(X)$. Questo ideale non è banale se e solo se X ha dimensione infinita[2].

(c) Siccome ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ conduce ad una serie assolutamente convergente $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$, anche la sua trasformata di Fourier discreta

$$\hat{x}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n x_n, \qquad z \in \mathbb{T},$$

dove $\mathbb{T}$ il cerchio unitario in $\mathbb{C}$, è una serie assolutamente convergente. Infatti,

$$|\hat{x}(z)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n x_n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| = \|(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|, \qquad z \in \mathbb{T}.$$

Si dimostra che, per ogni $z \in \mathbb{T}$, i vettori $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $\ell^1(\mathbb{Z})$ per cui $\hat{x}(z) = 0$ costituiscono un ideale chiuso e non banale in $\ell^1(\mathbb{Z})$.

(d) Per ogni $w = (c, f) \in \mathcal{W} = \mathbb{C} \times L^1(\mathbb{R})$ (l'algebra di Wiener continua), si definisce la sua trasformata di Fourier

$$\hat{w}(\lambda) = c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

[2] Anche gli operatori compatti su X costituiscono un ideale in $\mathcal{L}(X)$. Questo ideale è chiuso. È non banale se e solo se X ha dimensione infinita.

Siccome $f \in L^1(\mathbb{R})$, la funzione $\hat{w}$ è continua in $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\hat{w}(\lambda) \to c$ se $\lambda \to \pm\infty$ (in visto del Lemma di Riemann-Lebesgue). Si dimostra che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, tutti i vettori $w = (c, f)$ in $\mathcal{W}$ per cui $\hat{w}(\lambda) = 0$ costituiscono un ideale chiuso e non banale in $\mathcal{W}$. Anche $\{(0, f) : f \in L^1(\mathbb{R})\}$ è un ideale chiuso e non banale in $\mathcal{W}$.

(e) Sia S un sottoinsieme compatto del piano complesso $\mathbb{C}$ con parte interna non vuota e sia S_0 un sottoinsieme non vuoto di S. Allora l'insieme di tutte le funzioni in $\mathcal{A}(S)$ che si annullano per ogni punto di S_0, è un ideale in $\mathcal{A}(S)$.

(f) Sia z una radice n-esima dell'unità (cioè, sia $z^n = 1$). Allora l'insieme di tutte le matrici circolanti $C(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ per cui $\hat{a}(z) = a_0 + za_1 + \cdots + z^{n-1}a_{n-1} = 0$, è un ideale non banale nell'algebra di Banach delle matrici circolanti di ordine n.

Sia $\mathcal{I}$ un ideale chiuso nell'algebra di Banach $\mathcal{B}$. Dato $x \in \mathcal{B}$, l'insieme

$$[x] = \{x + m : m \in \mathcal{I}\}$$

si chiama il *laterale* che contiene x. Ovviamente, per $x, y \in \mathcal{B}$ si ha $[x] = [y]$ se e solo se $x - y \in \mathcal{I}$. La famiglia di tutti i laterali si scrive $\mathcal{B}/\mathcal{I}$. Le operazioni algebriche in $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ si definiscono nella seguente maniera:

$$[x] + [y] = [x + y], \qquad \lambda[x] = [\lambda x], \qquad [x][y] = [xy],$$

dove le definizioni hanno senso. Infatti, se $[x] = [x_1]$ e $[y] = [y_1]$, allora $x - x_1, y - y_1 \in \mathcal{I}$ e dunque $(x + y) - (x_1 - y_1) = (x - x_1) + (y - y_1) \in \mathcal{I}$, $(\lambda x - \lambda x_1) = \lambda(x - x_1) \in \mathcal{I}$ e

$$xy - x_1 y_1 = (x - x_1)y + x_1(y - y_1) \in \mathcal{I};$$

l'ultima unità segue dal fatto che $\mathcal{I}$ è un ideale in $\mathcal{B}$. L'insieme $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ è un'algebra, la cosiddetta *algebra quoziente*.

La proposizione seguente mostra come estendere in modo naturale a $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ una struttura di algebra di Banach.

Proposizione 2.1 *Sia $\mathcal{I}$ un ideale chiuso nell'algebra di Banach $\mathcal{B}$. Poniamo*

$$\|[x]\| = \textit{dist}(x, \mathcal{I}) = \inf\{\|x - m\| : m \in \mathcal{I}\}.$$

Allora $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ con questa norma è un'algebra di Banach.

Dimostrazione. Prima dimostriamo che $\|[xy]\| \leq \|[x]\| \, \|[y]\|$ per ogni $x, y \in \mathcal{B}$. Infatti, per ogni $u, v \in \mathcal{I}$ abbiamo $(x-u)(y-v) = xy - w$ per qualche $w \in \mathcal{I}$. Dunque

$$\begin{aligned} \|[x][y]\| = \|[xy]\| &= \text{dist}(xy, \mathcal{I}) \leq \|xy - w\| \\ &= \|(x-u)(y-v)\| \leq \|x-u\| \, \|y-v\|. \end{aligned}$$

Cercando l'estremo inferiore di $\|x-u\|$ per $u \in \mathcal{I}$ e l'estremo inferiore di $\|y-v\|$ per $v \in \mathcal{I}$, si trova

$$\|[x][y]\| \leq \|[x]\| \, \|[y]\|.$$

Bisogna ora dimostrare la completezza della norma in $\mathcal{B}/\mathcal{I}$. Sia $([x_n])_{n=1}^{\infty}$ una succesione di Cauchy in $\mathcal{B}/\mathcal{I}$. Allora esistono indici n_k tali che $\|[x_{n_{k+1}} - x_{n_k}]\| \leq 2^{-k}$. Per ogni $x_1 \in [x_{n_1}]$ esiste $v_2 \in [x_{n_2}]$ tale che

$$\|v_1 - v_2\| \leq 2\|x_{n_1} - x_{n_2}\|.$$

Costruiamo induttivamente una successione $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{B}$ tale che $v_k \in [x_{n_k}]$ ($k \in \mathbb{N}$) e

$$\|v_k - v_{k+1}\| \leq 2 \left\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\right\| \leq 2^{-(k-1)}.$$

Ovviamente (perché?) $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{B}$ e quindi esiste $v \in \mathcal{B}$ tale che $\|v_k - v\| \to 0$ se $k \to \infty$. Di conseguenza,

$$\|[x_{n_k}] - [v]\| = \|[v_k] - [v]\| = \|[v_k - v]\| \leq \|v_k - v\| \to 0$$

se $k \to \infty$. Abbiamo dimostrato che qualsiasi successione di Cauchy $([x_n])_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ ha una sottosuccessione convergente in $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ e quindi è convergente in $\mathcal{B}/\mathcal{I}$. In altre parole, abbiamo dimostrato la completezza della norma in $\mathcal{B}/\mathcal{I}$. $\square$

Se $\mathcal{B}$ è un'algebra di Banach con unità e, allora $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ è un'algebra di Banach con unità se $\mathcal{I} \neq \mathcal{B}$. Infatti, basta dimostrare che il suo elemento unità $[e]$ ha norma 1 in $\mathcal{B}/\mathcal{I}$. In prima luogo si vede che $1 = \|e\| \geq \text{dist}(e, \mathcal{I}) = \|[e]\|$. È poi chiaro che $\|[e]\|^2 \geq \|[e^2]\| = \|[e]\| \neq 0$, dove $\|[e]\| = 0$ viene escluso poiché implicherebbe che $e \in \mathcal{I}$ e dunque che $\mathcal{I} = \mathcal{B}$.

Se $\mathcal{K}(X)$ è l'ideale chiuso di tutti gli operatori compatti in $\mathcal{L}(X)$ (essendo X uno spazio di Banach complesso di dimensione infinita), allora l'algebra quoziente $\mathcal{L}(X)/\mathcal{K}(X)$ si chiama l'*algebra di Calkin*. Questa algebra è un'algebra con unità.

3 Elementi invertibili

Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Banach con unità e. Allora $x \in \mathcal{B}$ si dice essere *invertibile* in $\mathcal{B}$ se esiste iun elemento $y \in \mathcal{B}$ tale che $xy = yx = e$. In tal caso y si chiama l'*inverso* di x e si scrive $y = x^{-1}$.

Teorema 3.1 *Ogni elemento x di un'algebra di Banach $\mathcal{B}$ con unità e tale che $\|e - x\| < 1$ è invertibile. Inoltre l'insieme di tutti gli elementi invertibili in $\mathcal{B}$ è aperto in $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathcal{B}$ tale che $\|e-x\| < 1$. Poniamo $u_0 = e$, $u_1 = e-x$, $u_n = e + (e-x) + (e-x)^2 + \cdots + (e-x)^n$. Allora $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{B}$. Infatti, per $m > n$ si ha

$$\|u_m - u_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} (e-x)^j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|e-x\|^j \leq \frac{\|e-x\|^{n+1}}{1 - \|e-x\|},$$

dove $\|e-x\| < 1$. Quindi esiste $y \in \mathcal{B}$ tale che $\|u_n - y\| \to 0$ se $n \to \infty$. Prendendo il limite nella relazione

$$(e-x)u_n = u_n(e-x) = u_{n+1} - e,$$

risulta $(e-x)y = y(e-x) = y - e$ e quindi $xy = yx = e$. Di consequenza, x è invertibile e $x^{-1} = y$.

Sia ora x invertibile e sia $y \in \mathcal{B}$ tale che $\|x - y\| < (1/\|x^{-1}\|)$. In tal caso $\|e - x^{-1}y\| = \|x^{-1}(x-y)\| \leq \|x^{-1}\| \, \|x-y\| < 1$ e quindi $x^{-1}y$ è invertibile. Evidentemente y è invertibile. $\square$

Dall'ultima parte della dimostrazione consegue facilmente che

$$\|x^{-1} - y^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \, \left\|(e - x^{-1}(x-y))^{-1}\right\| \leq \frac{\|x^{-1}\|^2 \|x-y\|}{1 - \|x^{-1}\| \, \|x-y\|}.$$

Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Banach con unità e e sia $x \in \mathcal{B}$. Allora lo *spettro* $\sigma(x)$ di x è l'insieme di tutte le $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $\lambda e - x$ non è invertibile in $\mathcal{B}$. Il risolvente $\rho(x)$ è l'insieme di tutte le $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\lambda e - x$ è invertibile in $\mathcal{B}$. Evidentemente $\sigma(x)$ e $\rho(x)$ sono insiemi complementari in $\mathbb{C}$. Chiaramente l'insieme $\rho(x)$ è aperto in $\mathbb{C}$ e la funzione $\lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1}$ è analitica in $\rho(x)$.

Teorema 3.2 *Lo spettro di un elemento di un'algebra di Banach è un sottoinsieme compatto e non vuoto del piano complesso.*

Dimostrazione. Ovviamente $\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ invertibile}\}$ è aperto. Infatti, se $\lambda \in \rho(x)$ e quindi $\lambda e - x$ è invertibile, allora $\mu e - x$ è invertibile se

$$|\mu - \lambda| = \|(\mu e - x) - (\lambda e - x)\| < \left\|(\lambda e - x)^{-1}\right\|.$$

Inoltre la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-(j+1)} x^j$$

è totalmente convergente (cioè, è convergente la serie $\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^{-(j+1)} \|x^j\|$) se $|\lambda| > \|x\|$. D'altra parte, si vede subito che la somma della serie rappresenta $(\lambda e - x)^{-1}$, poiché $(\lambda e - x) \sum_{j=0}^{n} \lambda^{-(j+1)} x^j = e - \lambda^{-(n+1)} x^{n+1}$; quest'ultima espressione tende ad e se $n \to \infty$. Quindi $\sigma(x)$ è contenuto nella palla di raggio $\|x\|$ e centro zero.

Resta da dimostrare che $\sigma(x)$ non è vuoto. Supponiamo per assurdo che $\sigma(x)$ sia vuoto. In tal caso $\langle (\lambda e - x)^{-1}, \varphi \rangle$ è una funzione analitica per ogni funzionale lineare continuo φ; questa funzione tende a zero se $|\lambda| \to \infty$. Secondo il Teorema di Liouville[3], risulta $\langle (\lambda e - x)^{-1}, \varphi \rangle = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\varphi \in \mathcal{B}'$. Dunque $(\lambda e - x)^{-1} = 0$[4], una contraddizione. Di conseguenza, $\sigma(x) \neq \emptyset$. □

Corollario 3.3 [*Teorema di Gelfand-Mazur*] *Se $\mathcal{B}$ è un'algebra di Banach con unità e e ogni vettore diverso dallo zero in $\mathcal{B}$ è invertibile, allora $\mathcal{B} = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathcal{B}$. Secondo il teorema 3.2, esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\lambda e - x$ non è invertibile in $\mathcal{B}$ e quindi, nelle attuali ipotesi, $\lambda e - x = 0$. Quindi $x = \lambda e$. □

Siccome lo spettro $\sigma(x)$ è compatto e non è vuoto, esiste il valore $r(x) = \max_{t \in \sigma(x)} |t|$ che viene detto *raggio spettrale* di x. Ovviamente $r(x) \leq \|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{B}$.

---

[3]Che afferma che *ogni funzione analitica e limitata sull'intero piano complesso è costante*. Vedi Ist. Anal. Sup. Mod. 2.

[4]Secondo il Teorema di Hahn-Banach, i funzionali lineari continui su uno spazio di Banach X "separano" i punti di X.

Proposizione 3.4 *In un'algebra di Banach con unità il raggio spettrale di x viene dato dalla formula*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

Dimostrazione. L'uguaglianza

$$\mu^n e - x^n = (\mu e - x)y = y(\mu e - x), \qquad y = \mu^{n-1}e + \mu^{n-2}x + \cdots + x^{n-1},$$

implica che $\mu^n \in \sigma(x^n)$ se $\mu \in \sigma(x)$. Quindi $|\mu|^n \leq r(x^n) \leq \|x^n\|$. Siccome $\mu \in \sigma(x)$ è arbitrario, si ha

$$r(x) \leq \inf \|x^n\|^{1/n}.$$

Per dimostrare il viceversa, scegliamo un funzionale lineare continuo f su $\mathcal{B}$ e consideriamo $\phi(\lambda) = f((\lambda e - x)^{-1})$. Allora ϕ è analitica sul risolvente $\rho(x)$ e per $|\lambda| > \|x\|$ si ha

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} f\left(\left(e - \frac{1}{\lambda}x\right)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} f(x^n).$$

Siccome ϕ è analitica per $|\lambda| > r(x)$, la serie è assolutamente convergente per $|\lambda| > r(x)$. Dunque il suo termine generale deve tendere a zero se $n \to \infty$ e quindi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| f\left(\frac{1}{\lambda^n}x^n\right)\right| < +\infty.$$

Secondo il Teorema di Banach-Steinhaus[5], si ha

$$m_\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \frac{1}{\lambda^n}x^n \right\| < +\infty.$$

Ne consegue $\|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda| m_\lambda^{1/n}$ per $n \in \mathbb{N}$, per cui $\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq r(x)$. □

Discutiamo ora alcuni esempi.

[5]Il Teorema di Banach-Steinhaus (detto anche il "Principio della limitatezza uniforme", afferma che: *Se (T_α) è una famiglia di operatori lineari limitati su uno spazio di Banach X tali che $(\|T_\alpha x\|)$ sia limitata per ogni $x \in X$, allora la famiglia delle norme $(\|T_\alpha\|)$ è limitata.* Definendo gli operatori T_α sullo spazio duale X' con $T_\alpha(f) = f(x_\alpha)$, ciò implica; *Se (x_α) è una famiglia di vettori in uno spazio di Banach X e $(f(x_\alpha))$ è limitata per ogni funzionale lineare continuo f su X, allora $(\|x_\alpha\|)$ è limitata.*

(a) Sia K uno spazio compatto di Hausdorff. Consideriamo l'algebra di Banach $C(K)$. Se $f \in C(K)$ è invertibile e $g \in C(K)$ è il suo inverso, allora $f(t)g(t) = g(t)f(t) = 1$ per ogni $t \in K$ e quindi $f(t) \neq 0$ per ogni $t \in K$. In tal caso la funzione f^{-1} definita da $f^{-1}(t) = (1/f(t))$ ($t \in K$) è continua e quindi appartiene a $C(K)$. In altre parole, $f \in C(K)$ è invertibile se e solo se $f(t) \neq 0$ per ogni $t \in K$. È facile dimostrare che, per $f \in C(K)$ qualsiasi, $\sigma(f) = \{f(t) : t \in K\}$.

(b) Se $\mathcal{B} = \mathcal{L}(X)$ per uno spazio di Banach X, allora lo spettro di $T \in \mathcal{L}(X)$ nel senso descritto prima coincide con lo spettro di T come descritto nel corso di Ist. Fis. Mat. Mod. 1.

(c) Sia $\mathcal{B} = \ell^1(\mathbb{Z})$. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è invertibile in $\ell^1(\mathbb{Z})$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è il suo inverso, risulta

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{n-k} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Calcolando la trasformata discreta di Fourier, risulta

$$\hat{x}(z)\hat{y}(z) = 1, \qquad z \in \mathbb{T},$$

e quindi $\hat{x}(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{T}$ è una condizione necessaria affinché il vettore $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sia invertibile in $\ell^1(\mathbb{Z})$. In seguito vedremo che questa condizione è anche sufficiente. Dimostreremo anche che $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \{\hat{x}(z) : z \in \mathbb{T}\}$.

(d) Sia $\mathcal{W} = \mathbb{C} \times L^1(\mathbb{R})$ l'algebra di Wiener continua. Se $w = (c, f) \in \mathcal{W}$ è invertibile, allora esiste $(d, g) \in \mathcal{W}$ tale che $(cd, df + cg + (f * g)) = (c, f)(d, g) = (1, 0)$. In tal caso $c \neq 0$ e $d = (1/c)$. Inoltre, calcolando la trasformata di Fourier si ottiene

$$1 = \left[c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt\right] \left[d + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} g(t)\, dt\right], \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

ciò che comporta che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\hat{w}(\lambda) \neq 0$. Di conseguenza, se $w = (c, f) \in \mathcal{W}$ è invertibile, allora $c \neq 0$ e $\hat{w}(\lambda) \neq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Quest'ultima condizione è anche sufficiente per l'invertibilità di $w = (c, f)$ in $\mathcal{W}$. Dimostreremo anche che $\sigma(w) = \{\hat{w}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{c\}$.

(e) Sia S un sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}$ con parte interna non vuota. Allora $f \in \mathcal{A}(S)$ è invertibile in $\mathcal{A}(S)$ se e solo se $f(t) \neq 0$ per ogni $t \in S$ [lasciato come esercizio per il lettore].

(f) Se la matrice circolante $C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ ha una inversa che è una matrice circolante (diciamo $C(b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$), allora

$$\hat{a}(z)\hat{b}(z) = 1, \qquad z^n = 1.$$

Quindi $C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ è invertibile nell'algebra delle matrici circolanti di ordine n se e solo se il polinomio $\hat{a}(z)$ non ha alcuna radice n-esima dell'unità tra i suoi zeri. In tal caso l'inverso è la matrice circolante $C(b_0, b_1, \cdots, b_{n-1})$, dove $\hat{a}(z)\hat{b}(z) - 1$ è divisibile da $x^n - 1$ (in $\mathbb{C}[x]$). Da ciò consegue facilmente (perché?) che

$$\sigma(C(a_0, a_1, \cdots, a_{n+1})) = \{\hat{a}(z) : z^n = 1\}.$$

4 Funzionali lineari moltiplicativi

Un funzionale lineare φ definito su un'algebra di Banach $\mathcal{B}$ si dice *moltiplicitivo* se φ non è il funzionale zero e se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ per ogni $x, y \in \mathcal{B}$. Ovviamente, se $\mathcal{B}$ ha l'unità e, si ha $\varphi(e) = 1$.

Proposizione 4.1 *Ogni funzionale lineare moltiplicativo su un'algebra di Banach $\mathcal{B}$ con unità e è limitato e ha norma 1.*

Dimostrazione. Al contrario, se φ è un funzionale lineare moltiplicativo su $\mathcal{B}$ e se, per assurdo, $|\varphi(x)| > 1$ per qualche $x \in \mathcal{B}$ con $\|x\| = 1$, allora $\varphi(x)e - x$ è invertibile in $\mathcal{B}$ e $\varphi(\varphi(x)e - x) = 0$. Quindi

$$1 = \varphi(e) = \varphi(\varphi(x)e - x)\varphi((\varphi(x)e - x)^{-1}) = 0,$$

una contraddizione. Pertanto $\|zf(x)\| \leq 1$ se $x \in \mathcal{B}$ con $\|x\| = 1$. Siccome $\varphi(e) = 1$, otteniamo $\|\varphi\| = 1$. □

Un ideale M in $\mathcal{B}$ si dice *massimale* se $M \neq \mathcal{B}$ e non esistono $\mathcal{I}$ in $\mathcal{B}$ tra M e $\mathcal{B}$.

Proposizione 4.2 *Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Banach commutativa con unità e. Allora gli ideali massimali in $\mathcal{B}$ coincidono con i nuclei dei funzionali lineari moltiplicativi in $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Sia M un ideale massimale in $\mathcal{B}$. Siccome $M \neq \mathcal{B}$, M non contiene elementi invertibili in $\mathcal{B}$. $\overline{M}$ è anch'esso un ideale che, poiché si ha $\{x \in \mathcal{B} : \|e - x\| < 1\} \cap M = \emptyset$, non coincide con tutto $\mathcal{B}$. Pertanto $\overline{M} = M$.

L'algebra quoziente $\mathcal{B}/M$ è un'algebra di Banach commutative con unità. Sia $[x] \in \mathcal{B}/M$ diverso da zero. Consideriamo l'insieme $J_x = \{xy + z : y \in \mathcal{B}, z \in M\}$. Allora J_x è un ideale in $\mathcal{B}$ che contiene M e non è uguale ad M (poiché $x \notin M$). Dunque $J_x = \mathcal{B}$ e quindi esistono $y_1 \in \mathcal{B}$ e $z_1 \in M$ tali che $e = xy_1 + z_1$. Di conseguenza, $[x][y_1] = [e]$, che dimostra l'invertibilità di $[x]$ in $\mathcal{B}/M$.

Abbiamo dimostrato che ogni vettore in $\mathcal{B}/M$ diverso dallo zero è invertibile. Secondo il Teorema di Gelfand-Mazur, abbiamo $\mathcal{B}/M = \{\lambda[e] : \lambda \in \mathbb{C}\}$. In altre parole, per ogni $x \in \mathcal{B}$ esiste un unico scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\lambda e - x \in M$. La funzione $x \mapsto \lambda$ ovviamente è un funzionale lineare moltiplicativo con nucleo M.

Il contrario è più facile da dimostrare. Sia φ un funzionale lineare moltiplicativo e continuo e sia $M = \{x \in \mathcal{B} : \varphi(x) = 0\}$. Allora M è un ideale chiuso in $\mathcal{B}$ che non coincide con $\mathcal{B}$. Siccome $\varphi(x)e - x \in M$, si vede che, rispetto ad M, $[x] = \varphi(x)[e]$ per ogni $x \in \mathcal{B}$. La non esistenza di ideali non banali in $\mathbb{C}$ implica che M è massimale. $\square$

Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Banach commutativa con unità e. Utilizzando il Lemma di Zorn, si dimostra che ogni ideale $\mathcal{I}$ in $\mathcal{B}$ diverso da $\mathcal{B}$ (per esempio, l'ideale zero) può essere esteso ad un ideale massimale in $\mathcal{B}$. Quindi gli ideali massimali in $\mathcal{B}$ (e di conseguenza i funzionali lineari moltiplicativi su $\mathcal{B}$) esistono.

Nel futuro identificheremo gli ideali massimali e i funzionali moltiplicativi su un'algebra di Banach commutative con unità $\mathcal{B}$, utilizzando la notazione $\mathcal{M}$ per entrambi. Per esempio, l'insieme di tutti i funzionali massimali viene spesso detto lo *spazio degli ideali massimali*.

Teorema 4.3 *Un elemento y in un'algebra di Banach commutativa con unità $\mathcal{B}$ è invertibile se non esiste alcun funzionale lineare moltiplicativo φ tale che $\varphi(y) = 0$. Dunque si ha $\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{M}\}$ per ogni $x \in \mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Se y è invertibile in $\mathcal{B}$, allora $1 = \varphi(y)\varphi(y^{-1})$ per ogni $\varphi \in \mathcal{M}$. Dunque $\varphi(y) \neq 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{M}$.

Se y non è invertibile in $\mathcal{B}$, si può estendere l'ideale più piccolo in $\mathcal{B}$ che contiene l'elemento y (e che non coincide con $\mathcal{B}$, poiché y non è invertibile) ad un ideale massimale in $\mathcal{B}$. Se φ è il funzionale lineare moltiplicativo con quest'ideale massimale come nucleo, si ha $\varphi(y) = 0$. $\square$

Corollario 4.4 *Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Banach commutativa con unità. Allora, per ogni $x \in \mathcal{B}$,*

$$\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{M}\}.$$

Discutiamo ora alcuni esempi.

(a) Sia $\mathcal{B} = C(K)$, dove K è uno spazio compatto di Hausdorff. Allora, per ogni $t \in K$, le valutazioni $f \mapsto f(t)$ sono funzionali lineari moltiplicativi su $C(K)$. Se esistesse un altro funzionale lineare moltiplicativo $\varphi \in \mathcal{M}$ che non fosse una valutazione, allora per ogni $s \in K$ esisterebbe $f_s \in C(K)$ tale che $\varphi(f_s) = 0$ e $f_s(s) \neq 0$. Quindi per ogni $s \in K$ esisterebbe un intorno aperto U_s di s in K sul quale f_s non assume il valore zero. La compattezza di K implicherebbe l'esistenza di $s_1, \cdots, s_n \in K$ tale che

$$f(t) := \sum_{k=1}^{n} |f_{s_k}(t)|^2 > 0.$$

Sia $g = (1/f)$. Allora $g \in C(K)$, $fg = e$ e

$$1 = \varphi(fg) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} f_{s_k}\overline{f_{s_k}}g\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(f_{s_k})\varphi(\overline{f_{s_k}})\varphi(g) = 0,$$

una contraddizione. Quindi tutti gli elementi di $\mathcal{M}$ sono valutazioni.

(c) Consideriamo $\mathcal{B} = \ell^1(\mathbb{Z})$. Ogni $\varphi \in \mathcal{M}$ è certamente un funzionale lineare continuo sullo spazio di Banach $\ell^1(\mathbb{Z})$ e quindi esiste una successione complessa limitata $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tale che

$$\varphi((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n x_n, \qquad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z}).$$

La sua moltiplicatività implica che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{n-k} = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n x_n\right]\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} h_m y_m\right],$$

dove $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, che implica $h_{k+l} = h_k h_l$ per $k, l \in \mathbb{Z}$. Siccome $h_k = 0$ per qualche k implicherebbe $h_n = h_k h_{n-k} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha $h_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Inoltre $h_n = (h_1)^{-n}$ e la limitatezza della successione $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ implicano che $h_1 \in \mathbb{T}$. Ponendo $z = h_1$ (tale che $h_n = z^n$) otteniamo $\varphi((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n x_n = \hat{x}(z)$. In altre parole, i funzionali moltiplicativi su $\ell^1(\mathbb{Z})$ sono le valutazioni $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \hat{x}(z)$, dove $z \in \mathbb{T}$.

(d) Sia $\mathcal{B} = \mathcal{W} = \mathbb{C} \times L^1(\mathbb{R})$ l'algebra di Wiener continua. Allora le valutazioni $w = (c, f) \mapsto \hat{w}(\lambda)$ (per $\lambda \in \mathbb{R}$) e $w = (c, f) \mapsto c$ sono funzionali lineari moltiplicativi.

L'algebra di Banach $\mathcal{W}$ si può interpretare come $L^1(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, dove la misura è quella di Lebesgue su $\mathbb{R}$ e vale 1 per il punto "infinito" ∞. In tal caso, i funzionali lineari continui si possono rappresentare con (h_∞, h), dove $h_\infty \in \mathbb{C}$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R})$; l'azione del funzionale è

$$w = (c, f) \mapsto ch_\infty + \int_{-\infty}^{\infty} h(t)f(t)\, dt.$$

La moltiplicità del funzionale su $\{0\} \times L^1(\mathbb{R})$ implica che

$$h(t + s) = h(t)h(s) \; q.o.$$

Si può dimostrare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $h(t) = e^{i\lambda t}$ q.o. Quindi non ci sono altri funzionali lineari moltiplicativi su $\mathcal{W}$.

(f) Sia $\mathcal{B}$ l'algebra di Banach delle matrici circolanti di ordine n. Allora le funzioni $C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \mapsto \hat{a}(z)$, dove $z^n = 1$, determinano n suoi funzionali lineari moltiplicativi diversi. Siccome un polinomio di grado $n-1$ viene determinato in modo unico dai suoi valori in n punti diversi (i punti z con $z^n = 1$), questi funzionali sono linearmenti independenti. Siccome lo spazio lineare delle matrici circolanti di ordine n ha dimensione n, i suoi funzionali lineari (moltiplicativi e non moltiplicativi) sono esattamente le combinazioni lineari dei funzionali $C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \mapsto \hat{a}(z)$ ($z^n = 1$). Non ci sono altri funzionali lineari moltiplicativi sull'algebra delle matrici circolanti di ordine n.

Il Teorema 4.3 ha alcune implicazioni importanti. Applicando il Teorema 4.3 alle algebre $\ell^1(\mathbb{R})$ e $\mathcal{W} = \mathbb{C} \times L^1(\mathbb{R})$ si trovano i seguenti teoremi (vedi [4]).

Teorema 4.5 [*N. Wiener, 1933*] *Sia* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *una successione complessa tale che* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n| < \infty$. *Se* $\hat{x}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n x_n \neq 0$ *per ogni* $z \in \mathbb{T}$, *allora esiste una successione complessa* $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *con* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |y_n| < \infty$ *tale che* $\hat{y}(z) = (1/\hat{x}(z))$ *per ogni* $z \in \mathbb{T}$.

Sia

$$\tilde{w}(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

una serie di Fourier totalmente convergente nel senso che

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty.$$

Se $\tilde{w}(\theta) \neq 0$ per ogni $\theta \in [-\pi, \pi]$, allora esistono due successioni complesse $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ tali che

$$\frac{|p_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|p_n| + |q_n|) < \infty$$

e

$$\frac{1}{\tilde{w}(\theta)} = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_n \cos(n\theta) + q_n \sin(n\theta)\right], \qquad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Infatti, ponendo $z = e^{i\theta}$, $c_0 = (a_0/2)$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ e $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ per $n \in \mathbb{N}$, otteniamo $\tilde{w}(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$, con

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| \leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|.$$

Teorema 4.6 [*N. Wiener, 1933*] *Siano $c \in \mathbb{C}$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se $c \neq 0$ e $\hat{w}(\lambda) = c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt \neq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, allora esiste una funzione $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che*

$$\frac{1}{\hat{w}(\lambda)} = \frac{1}{c} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} g(t)\, dt, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5 La trasformata di Gelfand

Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Banach commutativa con unità e. Sia $\mathcal{M}$ l'insieme dei suoi funzionali lineari moltiplicativi. Allora $\mathcal{M}$ non è vuoto. Ad ogni $x \in \mathcal{B}$ si associa una funzione complessa $\hat{x}$ su $\mathcal{M}$, la cosiddetta *trasformata di Gelfand*, definita da

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x), \qquad \varphi \in \mathcal{M}.$$

La stima $|\hat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|x\|$ implica che $\hat{x}$ è una funzione complessa limitata su $\mathcal{M}$.

Per dimostrarne la continuità introduciamo su $\mathcal{M}$ una topologia, la cosiddetta *topologia di Gelfand*, per la quale $\mathcal{M}$ è uno spazio compatto di Hausdorff e $\hat{x} \in$

$C(\mathcal{M})$ per ogni $x \in \mathcal{B}$. La topologia di Gelfand si definisce come la topologia più debole rispetto a cui ogni $\hat{x}$ è continua su $\mathcal{M}$. In altre parole, tutti gli insiemi del tipo

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\varphi; x_1, \cdots, x_n, \varepsilon) &= \cap_{i=1}^n \{\psi \in \mathcal{M} : |\hat{x}_i(\varphi) - \hat{x}_i(\psi)| < \varepsilon\} \\ &= \cap_{i=1}^n \{\psi \in \mathcal{M} : |\varphi(x_i) - \psi(x_i)| < \varepsilon\},\end{aligned}$$

dove $\varphi \in \mathcal{M}$, $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{B}$ e $\varepsilon > 0$, costituiscono una base di questa topologia. In particolare, la topologia di Gelfand è di tipo Hausdorff. Lo spazio topologico così definito si chiama lo *spettro di Gelfand* di $\mathcal{B}$. Rispetto a questa topologia ogni $\hat{x} : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ è ovviamente continua.

Teorema 5.1 *Lo spettro di Gelfand di un'algebra di Banach commutativa con unità è uno spazio compatto di Hausdorff.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}$ lo spettro di Gelfand di $\mathcal{B}$. Per $x \in \mathcal{B}$, sia $C_x = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}$ e sia $S = \prod_{x \in \mathcal{B}} C_x$ con la topologia prodotto. Siccome ogni C_x è uno spazio compatto di Hausdorff, lo è anche S[6]. Ora osserviamo che ogni $\varphi \in \mathcal{M}$ corrisponde ad un singolo punto di S tramite $\varphi \mapsto (\varphi(x))_{x \in \mathcal{B}}$, poiché $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{B}$. Inoltre si ricorda che gli insiemi

$$\mathcal{N}(h; x_1, \cdots, x_n, \varepsilon) = \cap_{i=1}^n \{g \in S : |h(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon\},$$

dove $h \in S$, $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{B}$ e $\varepsilon > 0$, costituiscono una base della topologia prodotto di S. Quindi la topologia di Gelfand di $\mathcal{M}$ coincide con la topologia di $\mathcal{M}$ come sottospazio topologico di S. Quindi, per dimostrare la compattezza di $\mathcal{M}$, basta dimostrare che $\mathcal{M}$ è chiuso in S.

Sia h nella chiusura di $\mathcal{M}$ in S. Dati $\varepsilon > 0$ e $x, y \in \mathcal{B}$, esiste $\varphi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}(h; x, y, xy, e, \varepsilon)$, dove e è l'unità di $\mathcal{B}$. Dunque

$$\begin{aligned}|h(xy) - h(x)h(y)| &\leq |h(xy) - \varphi(xy)| + |\varphi(x)\varphi(y) - h(x)h(y)| \\ &< \varepsilon + |(\varphi(x) - h(x))\varphi(y)| + |h(x)(\varphi(y) - h(y))| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon\|y\| + \varepsilon\|x\| = \varepsilon(1 + \|x\| + \|y\|), \\ |h(e) - 1| &= |h(e) - \varphi(e)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, si ha $h(xy) = h(x)h(y)$ e $h(e) = 1$. In modo simile (con $\lambda x + \mu y$ al posto di xy) si dimostra che h è lineare. Quindi $h \in \mathcal{M}$. In altre parole, $\mathcal{M}$ è chiuso in S. $\square$

[6] Per il Teorema di Tychonoff, il prodotto topologico arbitrario di spazi compatti è compatto. Questo teorema è equivalente all'assioma di scelta.

Sia $\mathcal{M}$ lo spettro di Gelfand di un'algebra di Banach commutativa con unità $\mathcal{B}$. Allora la mappa

$$\Gamma : \mathcal{B} \to C(\mathcal{M}), \qquad \Gamma x = \hat{x},$$

si chiama la *rappresentazione di Gelfand* di $\mathcal{B}$. Ovviamente Γ è lineare e moltiplicativa, cioè $\Gamma(xy) = \Gamma(x)\Gamma(y)$. Ciò consegue infatti dalle uguaglianze

$$\widehat{xy}(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \hat{x}(\varphi)\hat{y}(\varphi) = (\hat{x}\hat{y})(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{M}.$$

Una trasformazione lineare moltiplicativa tra algebre si dice *omomorfismo* di algebre; un *isomorfismo* è un omomorfismo iniettivo.

Proposizione 5.2 *La rappresentazione Γ di un'algebra di Banach commutativa con unità è un omomorfismo e si ha inoltre*

$$\|\Gamma x\| = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \|x\|.$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}$ lo spettro di Gelfand di $\mathcal{B}$. Allora

$$\|\Gamma x\| = \|\hat{x}\| = \max_{\varphi\in\mathcal{M}} |\hat{x}(\varphi)| = \max_{\varphi\in\mathcal{M}} |\varphi(x)| = \max_{t\in\sigma(x)} |t| = r(x),$$

dove $r(x)$ è il cosiddetto raggio spettrale di x. Utilizzando la Proposizione 3.4 si conclude la dimostrazione. $\square$

Ci sono casi in cui la rapprasentazione di Gelfand $\Gamma : \mathcal{B} \to C(\mathcal{M})$ non è iniettiva. Se $\Gamma x = 0$ per qualche $x \in \mathcal{B}$, si ha

$$0 = \Gamma x(\varphi) = \hat{x}(\varphi) = \varphi(x), \qquad \varphi \in \mathcal{M},$$

e quindi x appartiene all'intersezione di tutti gli ideali massimali in $\mathcal{B}$. Si può anche dire che $\sigma(x) = \{0\}$ (cioè, che x è un elemento quasi nilpotente di $\mathcal{B}$). Si ha dunque l'equivalenza

$$\Gamma x = 0 \iff \varphi(x) = 0 \text{ per ogni } \varphi \in \mathcal{M} \iff r(x) = 0 \iff \sigma(x) = \{0\}.$$

Discutiamo alcuni esempi.

(a) Sia $\mathcal{B} = C(K)$ per lo spazio compatto di Hausdorff K. Allora $\mathcal{M} = \{\varphi_t : t \in K\}$, dove $\varphi_t(f) = f(t)$ per ogni $f \in C(K)$. Quindi

$$\Gamma(f)(\varphi_t) = \hat{\varphi}_t(f) = f(t).$$

La mappa $\eta : K \to \mathcal{M}$ definita da $\eta(t) = \varphi_t$ è ovviamente surgettiva; la sua iniettività segue dal fatto che per ogni paio di punti diversi $t_1, t_2 \in K$ esiste $g \in C(K)$ tale che $g(t_1) \neq g(t_2)$[7]. Siccome

$$\eta^{-1}[\mathcal{N}(\varphi_{t_0}; f_1, \cdots, f_n, \varepsilon)] = \cap_{j=1}^{n} \{t \in K : |f_j(t_0) - t_j(t)| < \varepsilon\},$$

dove $\varphi_{t_0} \in \mathcal{M}$, $f_1, \cdots, f_n \in C(K)$ e $\varepsilon > 0$, è aperto in K, segue che η è continua. Infatti, η è un omeomorfismo[8]. Utilizzando η per identificare $\mathcal{M}$ e K, si vede che $\Gamma : C(K) \to C(\mathcal{M})$ è la funzione unità. Più precisamente, $\Gamma(f)(\eta(t)) = f(t)$ per $f \in C(K)$ e $t \in K$.

(c) Sia $\mathcal{B} = \ell^1(\mathbb{Z})$. Allora $\mathcal{M}$ consiste delle valutazioni delle trasformate discrete di Fourier. In altre parole, per ogni $z \in \mathbb{T}$ esiste un elemento $\varphi_z \in \mathcal{M}$ tale che

$$\varphi_z((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \hat{x}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n x_n.$$

La rappresentazione di Gelfand $\Gamma : \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathcal{M})$ è la seguente:

$$\Gamma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}})(\varphi_z) = \varphi_z((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \hat{x}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n x_n.$$

Siccome $\eta : \mathbb{T} \to \mathcal{M}$ definita da $\eta(z) = \varphi_z$ è un omeomorfismo [vedi nota 8], Γ manda una successione in $\ell^1(\mathbb{Z})$ nella sua trasformata discreta di Fourier. Quindi Γ è iniettiva e la sua immagine è densa. Ciò consegue dall'esistenza di funzioni continue su $\mathcal{M}$ che non si possono rappresentare come una somma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n c_n$, dove $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$. Per esempio,

$$f(z) = \frac{1}{2i} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\log(n)} (z^n - z^{-n}), \qquad |z| = 1.$$

(d) Sia $\mathcal{B} = \mathcal{W} = \mathbb{C} \times L^1(\mathbb{R})$ l'algebra di Wiener continua. Allora $\mathcal{M}$ consiste delle valutazioni della trasformata di Fourier. Quindi se $w = (c, f) \in \mathcal{W}$, allora i funzionali lineari moltiplicativi sono $\varphi_\infty((c, f)) = c$ e

$$\varphi_\lambda((c, f)) = c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt$$

[7]Per dimostrarlo si utilizzi il fatto che ogni spazio compatto di Hausdorff è normale. Il Lemma di Urysohn afferma che *in uno spazio normale X esiste, per ogni punto x fuori di un sottoinsieme chiuso F, una funzione continua $g : X \to [0, 1]$ tale che $g(x) = 0$ e $g[F] = \{1\}$.*

[8]Una funzione continua da uno spazio compatto su uno spazio di Hausdorff è un omeomorfismo.

per $\lambda \in \mathbb{R}$. Con i soliti argomenti si dimostra che $\mathcal{M}$ è uno spazio omeomorfo alla compattificazione di Alexandrov della retta reale (cioè, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$); questa compattificazione è topologicamente equivalente a $\mathbb{T}$ (tramite l'omeomorfismo $z = (\lambda - i)/(\lambda + i)$). La rappresentazione di Gelfand viene data dalla formula

$$\Gamma(c, f)(\phi_\lambda) = \phi_\lambda((c, f)) = \begin{cases} c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ c, & \lambda = \infty. \end{cases}$$

Come nell'esempio (d), si dimostra che Γ è iniettiva, ma non è surgettiva. Esistono funzioni complesse continue $f(t)$ su $\mathbb{R}$ che tendono a zero per $t \to \pm\infty$, che non si possono esprimere come la trasformata di Fourier di una funzione in $L^1(\mathbb{R})$.

(f) Sia $\mathcal{B}$ l'algebra delle matrici circolanti di ordine n. Allora gli elementi di $\mathcal{M}$ sono le mappe

$$\varphi_z(C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})) = \hat{a}(z) = a_0 + z a_1 + \cdots + z^{n-1} a_{n-1},$$

dove z è una radice n-esima dell'unità. Quindi la rappresentazione di Gelfand ha la forma

$$\Gamma(C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}))(\phi_z) = \hat{a}(z) = a_0 + z a_1 + \cdots + z^{n-1} a_{n-1},$$

dove $z^n = 1$. Lo spettro di Gelfand $\mathcal{M}$ si può identificare con l'insieme finito delle radici n-esime dell'unità dotato dalla topologia discreta (cioè, quella per cui ogni sottoinsieme dello spazio è un aperto e quindi anche un chiuso).

6 Algebre di tipo C^*

Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Banach. Un'*involuzione* è una mappa $* : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $x \mapsto x^*$ che gode delle seguenti proprietà:

(a) $(x + y)^* = x^* + y^*$,

(b) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda}\, x^*$,

(c) $(xy)^* = y^* x^*$,

(d) $(x^*)^* = x$.

Se $\mathcal{B}$ ha l'unità e, risulta

$$e^* = e^*e = e^*(e^*)^* = (e^*e)^* = (e^*)^* = e.$$

Un'algebra di Banach $\mathcal{B}$ con un'involuzione $*$ si dice *algebra* C^* se $\|x^*x\| = \|x\|^2$ per ogni $x \in \mathcal{B}$.

Consideriamo alcuni esempi.

(a) Se K è uno spazio compatto di Hausdorff, l'algebra $C(K)$ è di tipo C^*. L'involuzione è $f \mapsto \overline{f}$.

(b) Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert complesso, l'algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ è di tipo C^*. L'involuzione è la mappa $T \mapsto T^*$, dove

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

In tal caso, se $\|x\| = 1$ si ha

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*T\| \leq \|T\|\,\|T^*\| = \|T\|^2.$$

Prendendo l'estremo superiore al variare dei vettori $x \in \mathcal{H}$ tali che $\|x\| = 1$, risulta $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T\|^2$, e quindi $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Proposizione 6.1 *Sia $\mathcal{B}$ un'algebra C^* con unità. Allora $\|x\| = \|x^*\|$ per ogni $x \in \mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Per $x \in \mathcal{B}$ si ha

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\,\|x\|, \qquad \|x^*\|^2 \leq \|(x^*)^*x\| = \|xx^*\| \leq \|x\|\,\|x^*\|,$$

e quindi $\|x\| = \|x^*\|$. $\square$

Teorema 6.2 *In un'algebra di Banach commutativa $\mathcal{B}$ di tipo C^* con unità si ha $r(x) = \|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Facciamo il seguente calcolo:

$$\|x^2\|^2 = \|(x^2)^*x^2\| = \|(x^*x)(x^*x)\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4,$$

e quindi $\|x^2\| = \|x\|^2$. Applicando la Proposizione 3.4 per $n = 2^k$, si ha

$$\|x^{2^k}\|^{1/2^k} = \|x^{2^{k-1}}\|^{1/2^{k-1}} = \cdots = \|x^2\|^{1/2} = \|x\|,$$

e quindi $r(x) = \|x\|$. $\square$

Proposizione 6.3 *Sia $\mathcal{B}$ un'algebra C^* con unità. Si ha*

(a) *se x è invertibile in $\mathcal{B}$ e $x^{-1} = x^*$, allora $\sigma(x) \subset \mathbb{T}$,*

(b) *se $x^* = x$, allora $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$,*

(c) *$\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$ per ogni funzionale lineare moltiplicativo φ su $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. (a) Se x è invertibile in $\mathcal{B}$ e $x^{-1} = x^*$, si ha $x^*x = xx^* = e$. Allora $1 = \|e\| = \|x^*x\| = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$, quindi $\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$. Secondo il Teorema 6.2, $r(x) = \|x\| = 1$ e $r(x^{-1}) = \|x^{-1}\| = 1$. Dall'espressione $\lambda^{-1}e - x^{-1} = -\lambda^{-1}x^{-1}(\lambda e - x)$ segue che $\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(x)\}$. Quindi $\sigma(x) \subset \mathbb{T}$.

(b) Sia $x^* = x$. Per $c > \|x\|$ l'elemento $y = (x - cie)(x + cie)^{-1}$ è invertibile e soddisfa $y^{-1} = y^*$. Quindi $\sigma(y) \subset \mathbb{T}$. Dall'espressione

$$\frac{\lambda - ic}{\lambda + ic}e - y = \frac{2ic}{\lambda + ic}(x + ice)^{-1}(\lambda e - x)$$

segue che $((\lambda - ic)/(\lambda + ic)) \in \sigma(y)$ se e solo se $\lambda \in \sigma(x)$. Quindi $\sigma(x) \in \mathbb{R}$.

(c) Sia $x \in \mathcal{B}$. Ponendo $y = \frac{1}{2}(x + x^*)$ e $z = \frac{1}{2i}(x - x^*)$, si vede che $y^* = y$ e $z^* = z$, quindi $\sigma(y) \cup \sigma(z) \subset \mathbb{R}$. In tal caso $\varphi(y) \in \mathbb{R}$ e $\varphi(z) \in \mathbb{R}$ per ogni funzionale lineare moltiplicativo φ su $\mathcal{B}$. Dunque $\frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(x^*)] \in \mathbb{R}$ e $\frac{1}{2i}[\varphi(x) - \varphi(x^*)] \in \mathbb{R}$. Quindi $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$. □

Dimostriamo ora il Teorema di Gelfand-Naimark.

Teorema 6.4 [*Gelfand-Naimark*] *Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Banach commutativa con unità e di tipo C^*. Allora la rappresentazione di Gelfand è biunivoca* (*e è infatti un'isometria*).

Dimostrazione. Abbiamo visto che l'insieme dei vettori $x \in \mathcal{B}$ per cui $\Gamma x = 0$ è l'insieme dei vettori quasi nilpotenti, cioè dei vettori x con $r(x) = 0$. Ma tali vettori soddisfano $\|x\| = r(x) = 0$, quindi $x = 0$.

Ovviamente, per $x \in \mathcal{B}$ si ha

$$\|\Gamma x\| = \|\hat{x}\| = r(x) = \|x\|,$$

e dunque Γ è un'isometria da $\mathcal{B}$ in $C(\mathcal{M})$.

Siccome $\Gamma[\mathcal{B}]$ è necessariamente chiuso in $C(\mathcal{M})$, basta dimostrare che è denso in $C(\mathcal{M})$. Prima osserviamo [vedi il Teorema 6.3(c)] che

$$(\Gamma x^*)(\varphi) = \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} = \overline{(\Gamma x)(\varphi)} = (\overline{\Gamma x})(\varphi) = ((\Gamma x)^*)(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{M},$$

dove l'ultimo asterisco riguarda l'involuzione naturale $f \mapsto \overline{f}$ su $C(\mathcal{M})$. Dunque $\Gamma(x^*) = (\Gamma x)^*$ per ogni $x \in \mathcal{B}$. Inoltre si vede subito che $(\Gamma e)(\varphi) = \varphi(e) = 1$ per ogni $\varphi \in \mathcal{M}$ e quindi che $\Gamma e = 1$, l'elemento unità in $C(\mathcal{M})$. Si conclude che $\{\Gamma x : x \in \mathcal{B}\}$ è un sottospazio lineare di $C(\mathcal{M})$ chiuso rispetto alla moltiplicazione tra vettori (quindi una sottoalgebra di $C(\mathcal{M})$) che contiene tutte le funzioni costanti su $\mathcal{M}$ e è chiuso rispetto al coniugio $f \mapsto \overline{f}$. Inoltre, per ogni paio di punti distinti $x, y \in \mathcal{B}$ esiste $\varphi \in \mathcal{M}$ tale che $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Altrimenti, $\varphi(x-y) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{M}$, dunque $r(x-y) = 0$, e dunque $\|x-y\| = 0$ e $x = y$. Poiché Γ è iniettiva, per ogni coppia di punti diversi $x, y \in \mathcal{B}$ (e quindi $\Gamma x \neq \Gamma y$) esiste $\varphi \in \mathcal{M}$ tale che $(\Gamma)(\varphi) \neq (\Gamma y)(\varphi)$; quindi gli elementi di $\{\Gamma x : x \in \mathcal{B}\}$ "separano" i punti di $\mathcal{M}$. Secondo il Teorema di Stone-Weierstrass[9], l'algebra $\{\Gamma x : x \in \mathcal{B}\}$ è densa in $C(\mathcal{M})$. Essendo anche chiusa in $C(\mathcal{M})$, deve coincidere con $C(\mathcal{M})$. Di conseguenza, Γ è surgettiva. $\square$

Il Teorema di Gelfand-Naimark dimostra che tutte le algebre di Banach commutative con unità e di tipo C^* sono isometricamente isomorfe alle algebre $C(\mathcal{M})$, dove $\mathcal{M}$ è lo spettro di Gelfand. Ciò implica che, per due spazi compatti di Hausdorff K_1 e K_2, $C(K_1)$ e $C(K_2)$ sono isometricamente isomorfe se e solo se K_1 e K_2 sono topologicamente equivalenti.

Nel 1933 Wiener ha dimostrato due teoremi fondamentali sulle trasformate di Fourier. Il teorema relativo al caso discreto era già stato pubblicato nel 1932 [Ann. Math. **33**, 1-100 (1932)]. Questi due teoremi sono stati generalizzati da Gelfand [Dokl. Akad. Nauk SSSR **23**, 430-432 (1939); **25**, 570-572 (1939)]. Il Teorema di Gelfand-Naimark si trova in un lavoro di Gelfand e Naimark [Matem. Sbornik **12**, 197-213 (1943)] sulle algebre C^*.

La teoria di Gelfand (1939) non ci dà la struttura delle algebre di Banach commutative con unità che non sono di tipo C^*. La teoria di Gelfand ci consente di "tradurre" molte proprietà algebriche e funzionali delle algebre di Banach commutative con unità in proprietà topologiche e algebrico-topologiche di opportuni spazi compatti di Hausdorff. Questa teoria è stata generalizzata alle algebre di Banach commutative senza unità, ma in tal caso gli spazi localmente compatti di Hausdorff prendono il posto degli spazi compatti di Hausdorff. Certi risultati si possono anche trasportare alle algebre di Banach non commutative. Tuttavia in tal caso non esiste una teoria generale, solo una teoria per particolari classi di algebre.

[9]Che recita: *Sia K uno spazio compatto di Hausdorff. Allora un'algebra $\mathcal{A}$ di funzioni in $C(K)$ è denso in $C(K)$ se* (*i*) *contiene tutte le funzioni costanti,* (*ii*) *è chiusa rispetto al coniugio $f \mapsto \overline{f}$ e* (*iii*) *separa i punti di K* (*cioè per $x, y \in K$ diversi esiste $f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x) \neq f(y)$*).

Esercizi

1. Sia $\mathcal{B} = C^1[0,1]$ con la norma $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Si dimostri che:

(a) $C^1[0,1]$ è un'algebra di Banach commutativa con unità, ma non è di tipo C^*.

(b) Le valutazioni $t \mapsto f(t)$, $t \in [0,1]$, sono gli unici funzionali lineari moltiplicativi.

(c) La rappresentazione di Gelfand $\Gamma : C^1[0,1] \to C[0,1]$ è continua e iniettiva, ma non è surgettiva.

2. Sia $\mathcal{B} = \ell^1(\mathbb{Z}_+)$, dove $\mathbb{Z}_+$ sono gli interi non negativi. Dimostrare quanto segue:

(a) $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$ con le operazioni e la norma prese da $\ell^1(\mathbb{Z})$ è un'algebra di Banach commutativa con unità.

(b) Per ogni $(x_n)_{n=0}^\infty \in \ell^1(\mathbb{Z}_+)$ poniamo

$$\hat{x}(z) = \sum_{n=0}^\infty z^n x_n, \qquad |z| \leq 1.$$

Le mappe $(x_n)_{n=0}^\infty \mapsto \hat{x}(z)$ sono i funzionali lineari moltiplicativi in $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$, qualunque sia z con $|z| \leq 1$. Non ci sono altri funzionali lineari moltiplicativi[10].

(c) Lo spettro $\mathcal{M}$ di $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$ è topologicamente equivalente al disco unitario chiuso nel piano complesso.

(d) Se $(x_n)_{n=0}^\infty$ è una successione complessa tale che $\sum_{n=0}^\infty |x_n| < \infty$ e tale che $\hat{x}(z) \neq 0$ per $|z| \leq 1$, allora esiste una successione complessa $(y_n)_{n=0}^\infty$ con $\sum_{n=0}^\infty |y_n| < \infty$ tale che

$$\frac{1}{\hat{x}(z)} = \sum_{n=0}^\infty z^n y_n, \qquad |z| \leq 1.$$

3. Sia $\mathcal{B} = \mathbb{C} \times L^1(0,\infty)$ con la norma $\|(c,f)\| = |c| + \int_0^\infty |f(t)|\,dt$. Dimostrare che:

[10] Si sfrutti il fatto che la successione complessa $(z^n)_{n=0}^\infty$ è limitata se e solo se $|z| \leq 1$.

(a) $\mathcal{B}$ è un'algebra di Banach commutativa con unità.

(b) Tutte le mappe

$$(c, f) \mapsto c + \int_0^\infty e^{i\lambda t} f(t)\, dt, \qquad \text{Im}\, \lambda \geq 0,$$

(come pure la mappa $(c, f) \mapsto c$) sono funzionali lineari moltiplicativi su $\mathcal{B}$.

(c) Non ci sono altri funzionali lineari moltiplicativi su $\mathcal{B}$[11].

(d) Se $c \neq 0$, $f \in L^1(0, \infty)$ e $c + \int_0^\infty e^{i\lambda t} f(t)\, dt \neq 0$ per Im $\lambda \geq 0$, allora esiste $g \in L^1(0, \infty)$ tale che per Im $\lambda \geq 0$

$$\frac{1}{c + \int_0^\infty e^{i\lambda t} f(t)\, dt} = \frac{1}{c} + \int_0^\infty e^{i\lambda t} g(t)\, dt.$$

4. Sia K uno spazio di Tychonoff[12]; sia $\mathcal{B} = BC(K)$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni complesse continue e limitate su K con la norma $\|f\| = \sup_{t \in K} |f(t)|$. Dimostrare che:

(a) $BC(K)$ è un'algebra di Banach commutativa con unità di tipo C^*. Se inoltre K è uno spazio compatto di Hausdorff, allora $BC(K) = C(K)$.

(b) Per $t \in K$, le mappe $\varphi_t(f) = f(t)$ definiscono funzionali lineari moltiplicativi su $BC(K)$.

(c) La mappa $\eta : K \to \mathcal{M}$, $\eta(t) = \varphi_t$, è iniettiva e continua. È surgettiva se e solo se K è uno spazio compatto di Hausdorff.

(d^*) η è un'immersione di K nello spazio compatto di Hausdorff $\mathcal{M}$ e $\eta[K]$ è denso in $\mathcal{M}$[13].

5. Sia $\mathcal{B} = L^\infty(0, 1)$. Dimostrare che:

(a) $L^\infty(0, 1)$ è un'algebra di Banach commutativa con unità di tipo C^*.

---

[11] Si sfrutti la seguente proprietà: *Se $h \in L^\infty(0, \infty)$, $h(t) \not\equiv 0$ q.o. e $h(t + s) = h(t)h(s)$ q.o., allora esiste λ con Im $\lambda \geq 0$ tale che $h(t) = e^{i\lambda t}$.*

[12] Ad esempio, uno spazio metrico non compatto.

[13] $\mathcal{M}$ coincide con la compattificazione di Čech-Stone βK di K. Per il Teorema di Gelfand-Naimark si ha $BC(K) \simeq C(\beta K)$.

(b) Le valutazioni $f \mapsto f(t)$, per $t \in (0,1)$, non sono funzionali lineari moltiplicativi su $L^\infty(0,1)$. Perché?

(c) Per il Teorema di Gelfand-Naimark, si ha $L^\infty(0,1) \simeq C(\mathcal{M})$[14].

Lo stesso discorso vale se $\mathcal{B} = L^\infty(E, d\mu)$, dove μ è una misura qualsiasi su uno spazio di misura E. Soltanto le valutazioni $t \mapsto f(t)$, dove $\{t\}$ è μ-misurabile e $\mu(\{t\}) > 0$, sono funzionali lineari moltiplicativi su $L^\infty(E, d\mu)$.

A Funzioni analitiche

Nel presente corso faremo uso di alcune proprietà (da discutere in questo paragrafo) delle funzioni analitiche, la cui teoria [1] si studia nel corso di Istituzioni di Analisi Superiore.

Sia $f : G \to \mathbb{C}$, dove G è un aperto in $\mathbb{C}$. Allora f si dice *analitica* se è derivabile rispetto alla variabile complessa $z \in G$ e la sua derivata f' è continua. In altre parole, per ogni $w \in G$ esiste un numero complesso $f'(w)$ tale che

$$f(z) = f(w) + (z-w)\left[f'(w) + \varepsilon(z)\right],$$

dove $|\varepsilon(z)| \to 0$ se $|z-w| \to 0$ per $z \in G$; inoltre, la funzione $f' : G \to \mathbb{C}$ è continua. Una funzione analitica è continua. Inoltre valgono le regole per l'analiticità della somma, del prodotto e della composta di due funzioni analitiche analoghe quelle che valgono per le funzioni derivabili in una variabile reale.

Sia $f : G \to \mathbb{C}$ una funzione definita su un aperto G in $\mathbb{C}$ che è rappresentabile come la somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza positiva in ogni punto $w \in G$. Ciòe, per ogni $w \in G$ esistono coefficienti $\{a_n(w)\}_{n=0}^\infty$ ed un numero positivo $R(w)$ tali che

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(w)(z-w)^n, \qquad |z-w| < R(w). \tag{A.1}$$

In tal caso f è analitica indefinitamente derivabile:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^\infty (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a_{n+k}(w)(z-w)^n, \qquad |z-w| < R(z_0),$$

[14] $\mathcal{M}$ risulta uno spazio compatto di Hausdorff che è estremamente sconnesso.

mentre $a_n(w) = f^{(n)}(w)/(n!)$. D'altra parte, una funzione analitica $f : G \to \mathbb{C}$ si può scrivere nella forma (A.1) per un opportuno $R(w) > 0$ per ogni $w \in G$.

Sia $f : G \to \mathbb{C}$ una funzione analitica su un aperto G in $\mathbb{C}$. All'aperto $G \subset \mathbb{C}$ facciamo corrispondere un aperto $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$ tale che $(x, y) \in \tilde{G}$ se e solo se $x + i\,y \in G$. Ora definiamo $u, v : \tilde{G} \to \mathbb{R}$ dalla formula

$$f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y), \qquad (x, y) \in \tilde{G}.$$

Allora $u, v : \tilde{G} \to \mathbb{R}$ sono differenziabili (nel senso del corso di Analisi Matematica II), esiste un numero infinito di derivate parziali successive di u e v rispetto ad x ed y, e valgono le cosiddette *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{A.2}$$

In tal caso, abbiamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0. \tag{A.3}$$

Usando l'uguaglianza (simbolica) $(u + iv)(dx + i\,dy) = (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy)$, si vede facilmente (dalla (A.2)) che le forme differenziali $u\,dx - v\,dy$ e $v\,dx + u\,dy$ sono ambedue chiuse. Quindi, se $\tilde{G}$ (oppure G) è semplicemente connesso, queste due forme differenziali sono esatte. Di conseguenza, se G è semplicemente connesso e γ è una curva chiusa e rettificabile (cioè, di lunghezza ben definita e finita) in G, allora

$$\int_{\tilde{\gamma}} (u\,dx - v\,dy) = 0, \qquad \int_{\tilde{\gamma}} (v\,dx + u\,dy) = 0,$$

dove $\tilde{\gamma} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + i\,y \in \gamma\}$. Ciò implica che

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\tilde{\gamma}} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{\tilde{\gamma}} (v\,dx + u\,dy) = 0. \tag{A.4}$$

L'affermazione (A.4) si chiama il *Teorema di Cauchy*. È il risultato più importante della teoria delle funzioni analitiche. Osserviamo che purtroppo il ragionamento seguito non è una dimostrazione esaustiva e quindi completamente rigorosa.

Enunciamo adesso due altri importanti teoremi (collegati al precedente).

Teorema A.1 *Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni analitiche sull'aperto G che converga ad una funzione $f : G \to \mathbb{C}$ uniformemente in $z \in K$ per un qualunque compatto K in G. Allora f è analitica.*

Teorema A.2 *Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni analitiche sull'aperto G tale che la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converga uniformemente in $z \in K$ per un qualunque compatto K in G. Allora la sua somma rappresenta una funione analitica su G.

Ora discutiamo due risultati semplici ed importanti per le funzioni analitiche.

Teorema A.3 *Siano $f, g : G \to \mathbb{C}$ due funzioni analitiche sull'aperto connesso G tali che $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in E$, dove E è un sottoinsieme di G con almeno un punto di accumulazione all'interno di G. Allora $f(z) = g(z)$ per ogni $z \in G$.*

In particolare, applicando il Teorema A.3 per $g(z) \equiv 0$, si vede facilmente che una funzione analitica $f \not\equiv 0$ ha un numero finito di zeri oppure i suoi zeri si accumulano sulla frontiera di G.

Adesso enunciamo il fondamentale *Teorema di Liouville*.

Teorema A.4 *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione analitica definita sull'intero piano complesso. Allora f è non limitata oppure costante.*

La dimostrazione è abbastanza facile. Ne diamo lo schema qui di seguito. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e sia C_R il cerchio di centro 0 e raggio R in $\mathbb{C}$ con orientamento positivo. Allora $(2\pi i)^{-1} \int_{C_R} (z - w)^{-1}\, dz = 1$ per $w \in \mathbb{C}$ con $|w| < R$ (lo si controlli!) implica[15] che

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - w}\, dz, \qquad |w| < R.$$

Ciò comporta [perché?] che

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - w)^2}\, dz, \qquad |w| < R.$$

[15] Si scriva $f(z) = f(w) + [f(z) - f(w)]$ e si osservi che $[f(z) - f(w)]/(z - w)$ è analitica in $z \in \mathbb{C}$. Poi si applichi il Teorema di Cauchy.

Di conseguenza, se $|f(z)| \leq M$ per $z \in \mathbb{C}$, risulterebbe

$$|f'(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \, 2\pi R \, \frac{M}{(R - |w|)^2}, \qquad R > |w|,$$

e quindi $f'(w) = 0$. Siccome $w \in \mathbb{C}$ è arbitrario, f deve essere una funzione costante.

Come corollario si afferma che una funzione analitica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con limite zero per $|z| \to +\infty$ deve annularsi in ogni $z \in \mathbb{C}$.

Definiamo ora le funzioni meromorfe e discutiamo le loro singolarità.

In primo luogo una funzione analitica $f : G \to \mathbb{C}$ con $f \not\equiv 0$ ha un numero finito o un'infinità numerabile di zeri. Un numero complesso z_0 si dice *zero di ordine* m per f se $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ per $g : G \to \mathbb{C}$ una funzione analitica e $g(z_0) \neq 0$. In altri termini, z_0 è uno zero di ordine m se e solo se $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Se G è un aperto in $\mathbb{C}$, $w \in G$ e f è analitica su $G \setminus \{w\}$, il punto w si dice *polo di ordine* m se esiste una funzione analitica $g : G \to \mathbb{C}$ con $g(w) \neq 0$ tale che $f(z) = g(z)/(z - w)^m$ per $z \in G \setminus \{w\}$.

Sia G un aperto in $\mathbb{C}$. Una funzione f si dice *meromorfa* su G se esiste un sottoinsieme finito oppure numerabile E di G senza punti di accumulazione all'interno di G tale che f sia analitica in $G \setminus E$ ed ogni punto di E sia un polo della f.

Teorema A.5 [*Principio dell'argomento*] *Sia f una funzione meromorfa nell'aperto G. Sia γ una curva chiusa, semplice e rettificabile in G che non passa per i poli e per gli zeri di f, con un orientamento tale che il sottodominio Ω di G racchiuso da γ si trova alla sinistra di γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{k=1}^{n} N(z_k) - \sum_{j=1}^{m} P(p_j),$$

dove $z_1, \cdots, z_n$ sono gli zeri in Ω, $p_1, \cdots, p_m$ sono i poli in Ω, $N(z_k)$ è l'ordine dello zero z_k e $P(p_j)$ è l'ordine del polo p_j.

Dimostrazione. Posta

$$f(z) = g(z) \frac{\prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{N(z_k)}}{\prod_{j=1}^{m} (z - p_j)^{P(p_j)}},$$

dove $g(z)$ è una funzione meromorfa in G che non ha zeri nè poli in Ω, si ha

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{N(z_k)}{z - z_k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{P(p_j)}{z - p_j} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

dove $g'(z)/g(z)$ è continua in $\Omega \cup \gamma$ e analitica in Ω. Il teorema segue quindi dal Teorema di Cauchy. $\square$

Corollario A.6 [*Teorema di Rouché*] *Siano f e g funzioni meromorfe nell'aperto G. Sia γ una curva chiusa, semplice e rettificabile in G che non passa per i poli e per gli zeri di f e g, con un orientamento tale che il sottodominio Ω di G racchiuso da γ si trova alla sinistra di γ. Se*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \qquad z \in \gamma, \tag{A.5}$$

allora

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g,$$

dove Z_f e P_f sono il numero degli zeri e dei poli della f in Ω e Z_g e P_g sono il numero degli zeri e dei poli della g in Ω.

Dimostrazione. L'ipotesi (A.5) implica che f/g manda γ nella palla $\{w \in \mathbb{C} : |w - 1| < 1\}$. In questa palla si può definire $\log(w)$ come funzione analitica tale che $\log(w) \to 0$ se $w \to 1$. In tal caso, $(\log(f/g))' = (f/g)'/(f/g) = (f'/f) - (g'/g)$. Quindi, utilizzando il Teorema di Cauchy e il Teorema A.5, si ha

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g).$$

$\square$

Usando il Teorema di Rouché si trova facilmente una dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Sia $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ un polinomio complesso di grado n e con coefficiente principale 1. Applichiamo il Teorema di Rouché per $f(z) = p(z)$ e $g(z) = z^n$. Siccome esiste $R > 0$ tale che

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| = \left| 1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \right| < 1, \qquad |z| = R,$$

si può applicare il Teorema di Rouché per $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Abbiamo $Z_g = n$ e $P_f = P_g = 0$. Quindi $Z_f = n$; di conseguenza $p(z)$ ha n zeri nel dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Riferimenti bibliografici

[1] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics **11**, Springer, Berlin, 1975.

[2] I.M. Gelfand, D.A. Raikov, and G.E. Shilov, *Commutative Normed Rings*, Chelsea Publ., New York, 1964 [Nauka, Moscow, 1960, in Russian].

[3] I. Gohberg, S. Goldberg, and M.A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators*, Vol. II, Birkhäuser OT **63**, Basel-Boston, 1993.

[4] N. Wiener, *The Fourier Integral and Certain of its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1933; Dover Publ., New York, 1958.