Cap II: Equazioni di Toeplitz e Equazioni Integrali di Wiener-Hopf

1 Sistemi lineari di Toeplitz

In questo paragrafo discutiamo i sistemi lineari (semi-infiniti) di Toeplitz

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} x_j = b_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

dove $(x_i)_{i=0}^{\infty}, (b_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell^p(\mathbb{Z}_+)$ per qualche $p \geq 1$ e $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. In forma matriciale si ha

$$\boldsymbol{T}_a \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

dove $\boldsymbol{T}_a = (a_{i-j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ è la *matrice* (semi-infinita) *di Toeplitz*

$$\boldsymbol{T}_a = (a_{i-j})_{i,j \in \mathbb{Z}_+} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots & & \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots & \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Consideriamo prima i sistemi lineari (bi-infiniti) di Laurent

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{i-j} x_j = b_i, \qquad i = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

dove $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (b_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ e $(T_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. In forma matriciale si ha

$$\boldsymbol{L}_a (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \tag{1.5}$$

dove $\boldsymbol{L}_a$ è la matrice (bi-infinita) di Laurent

$$\boldsymbol{L}_a = (a_{i-j})_{i,j\in\mathbb{Z}}. \tag{1.6}$$

L'equazione (1.5) si può scrivere nella forma

$$(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} * (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}},$$

dove $*$ è il prodotto convoluzione. Introducendo le trasformate di Fourier discrete

$$\hat{x}(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} z^i x_i, \quad \hat{b}(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} z^i b_i, \quad \hat{a}(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} z^i a_i,$$

otteniamo l'equazione algebrica

$$\hat{a}(z)\hat{x}(z) = \hat{b}(z), \qquad z \in \mathbb{T}.$$

Se è verificata la condizione

$$\hat{a}(z) \neq 0, \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{1.7}$$

risulta

$$\hat{x}(z) = \frac{\hat{b}(z)}{\hat{a}(z)}, \qquad z \in \mathbb{T}.$$

Applicando il Teorema di Wiener segue l'esistenza di $c \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tale che

$$\hat{c}(z) = \frac{1}{\hat{a}(z)}, \qquad z \in \mathbb{T}.$$

Ciò implica che

$$x_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{i-j} b_j, \qquad i = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots.$$

Se si verifica la condizione (1.7), l'equazione (1.4) ha la soluzione unica $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ per qualsiasi $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Lo stesso risultato segue se $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ e

$(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ e si richiede $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$. In tal caso, il fatto che il prodotto convoluzione tra una successione in $\ell^1(\mathbb{Z})$ e una successione in $\ell^p(\mathbb{Z})$ è una successione in $\ell^p(\mathbb{Z})$, conduce ad una soluzione unica $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ per qualsiasi $(b_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$. La funzione $\hat{a}(z)$ si chiama il *simbolo* della matrice di Toeplitz $\boldsymbol{T}_a$.

Studiamo ora l'equazione di Toeplitz (1.1) sotto la condizione (1.7). In tal caso non si può ridurre il sistema lineare semi-infinito ad una equazione algebrica, poiché la moltiplicatività della convoluzione vale soltanto in $\ell^1(\mathbb{Z})$, non per le successioni semi-infinite.

Estendiamo (1.1) ad una equazione per tutti gli indici interi, introducendo x_i e b_i per $i = \cdots, -2, -1$. Infatti, ponendo

$$x_i = -\sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j}x_j, \quad b_i = 0, \quad i = \cdots, -2, -1, \tag{1.8}$$

arriviamo all'equazione (1.1) valida per ogni $i \in \mathbb{Z}$, ma dove gli ignoti sono x_i per $i \in \mathbb{Z}$.

Consideriamo ora l'equazione di Toeplitz (1.1) per $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ e $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ in $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$, indicando le modifiche per $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ e $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ in $\ell^p(Z_+)$ dopo. Si vede subito che[1]

$$\ell^1(\mathbb{Z}) = \ell^1(-\mathbb{N}) \dot{+} \ell^1(\mathbb{Z}_+) = \ell^1(\mathbb{Z}_-) \dot{+} \ell^1(\mathbb{N}) = \ell^1(-\mathbb{N}) \dot{+} \mathbb{C} \dot{+} \ell^1(\mathbb{N}). \tag{1.9}$$

Definiamo le immersioni naturali $\imath_+ : \ell^1(\mathbb{Z}_+) \to \ell^1(\mathbb{Z})$ e $\imath_- : \ell^1(-\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{Z})$ con

$$\begin{cases} (\imath_+\boldsymbol{x})_i = x_i, & i = 0, 1, 2, \cdots, \\ (\imath_+\boldsymbol{x})_i = 0, & i = \cdots, -2, -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\imath_-\boldsymbol{x})_i = 0, & i = 0, 1, 2, \cdots, \\ (\imath_-\boldsymbol{x})_i = x_i, & i = \cdots, -2, -1, \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^{\infty}$, e le "proiezioni" naturali $\pi_+ : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \ell^1(\mathbb{Z}_+)$ e $\pi_- : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \ell^1(-\mathbb{N})$ con

$$\begin{cases} (\pi_+\boldsymbol{x})_i = x_i, & i = 0, 1, 2, \cdots, \\ (\pi_-\boldsymbol{x})_i = x_i, & i = \cdots, -2, -1, \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Ovviamente $\pi_+\imath_+$ è l'operatore unità su $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$, $\pi_-\imath_-$ è l'operatore unità su $\ell^1(-\mathbb{N})$, $\imath_+\pi_+$ è la proiezione di $\ell^1(\mathbb{Z})$ su $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$ lungo $\ell^1(-\mathbb{N})$, e

[1]Notazioni: $\mathbb{N}$ interi positivi, $-\mathbb{N}$ interi negativi, $\mathbb{Z}_+$ interi non negativi, $\mathbb{Z}_-$ interi non positivi.

$\imath_-\pi_-$ è la proiezione di $\ell^1(\mathbb{Z})$ su $\ell^1(-\mathbb{N})$ lungo $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$. L'equazione di Toeplitz (1.1) si può rappresentare nella forma

$$\pi_+(a * \imath_+ \boldsymbol{x}) = (b_i)_{i=0}^{\infty},$$

dove $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^{\infty}$.

Introducendo le trasformate di Fourier discrete

$$\hat{x}_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i x_i, \ \hat{b}_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i b_i, \ \hat{b}_-(z) = \sum_{i=-\infty}^{-1} z^i b_i, \ \hat{a}(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} z^i a_i,$$

si trova il *problema di Riemann-Hilbert*

$$\hat{a}(z)\hat{x}_+(z) + \hat{x}_-(z) = \hat{b}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}. \tag{1.10}$$

Le funzioni $\hat{x}_+(z)$ e $\hat{b}_+(z)$ sono continue per $|z| \leq 1$ e analitiche per $|z| < 1$. D'altra parte la funzione $\hat{x}_-(z)$ è continua per $|z| \geq 1$, tende a zero se $z \to \infty$ ed è analitica per $|z| > 1$. Supponiamo ora che esista una *fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica*

$$\hat{a}(z) = \hat{a}_-(z)\hat{a}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{1.11}$$

dove i fattori $\hat{a}_\pm(z)$ hanno le seguenti proprietà:

(a) Esistono le successioni $(w_i^+)_{i=0}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z}_+)$ e $(w_i^-)_{i=-\infty}^{0} \in \ell^1(\mathbb{Z}_-)$ tali che

$$\hat{a}_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i w_i^+, \qquad \hat{a}_-(z) = \sum_{i=-\infty}^{0} z^i w_i^-;$$

dunque la funzione $\hat{a}_+(z)$ è continua per $|z| \leq 1$ e analitica per $|z| < 1$, e la funzione $\hat{a}_-(z)$ è continua per $|z| \geq 1$, tende a zero se $z \to \infty$ ed è analitica per $|z| > 1$.

(b) $\hat{a}_+(z) \neq 0$ per $|z| \leq 1$ e $\hat{a}_-(z) \neq 0$ per $|z| \geq 1$ e nel limite se $z \to \infty$.

Il Teorema di Wiener implica l'esistenza di $(u_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z}_+)$ e $(\ell_i)_{i=-\infty}^{0} \in \ell^1(\mathbb{Z}_-)$ tali che

$$\hat{a}_+(z)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \ell_i, \qquad \hat{a}_-(z)^{-1} = \sum_{i=-\infty}^{0} z^i u_i.$$

Sostituendo (1.11) in (1.10) e dividendo per $\hat{a}_-(z)$ arriviamo all'uguaglianza

$$\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) + \hat{a}_-(z)^{-1}\hat{x}_-(z) = \hat{x}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{1.12}$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{x}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} z^i \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} u_{i-j} b_j \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left[\sum_{j=i}^{\infty} u_{i-j} b_j \right] + \sum_{i=-\infty}^{-1} z^i \left[\sum_{j=0}^{\infty} u_{i-j} b_j \right]. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Separando (1.12) in un termine analitico nel disco unitario e un termine analitico fuori del disco unitario e nullo all'infinito, si trovano

$$\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left[\sum_{j=i}^{\infty} u_{i-j} b_j \right], \quad \hat{a}_-(z)^{-1}\hat{x}_-(z) = \sum_{i=-\infty}^{-1} z^i \left[\sum_{j=0}^{\infty} u_{i-j} b_j \right].$$

Togliendo le trasformate di Fourier discrete si arriva all'espressione

$$x_i = \sum_{r=0}^{i} \ell_{i-r} \sum_{j=r}^{\infty} u_{r-j} b_j, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.14}$$

Abbiamo dimostrato il seguente risultato (vedi [4]).

Teorema 1.1 *Se il simbolo $\hat{a}(z)$ ha una fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica, allora per qualsiasi $(b_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z}_+)$ il sistema di Toeplitz* (1.1) *ha la soluzione unica*

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{i,j} b_j, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.15}$$

in $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$, dove

$$\gamma_{i,j} = \sum_{r=0}^{\min(i,j)} \ell_{i-r} u_{r-j}.$$

Il teorema è stato dimostrato soltanto per $p = 1$, ma la formula risolvente (1.15) ci dà una soluzione $(x_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell^p(\mathbb{Z}_+)$ per qualsiasi $(b_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell^p(\mathbb{Z}_+)$.

Scriviamo $L = (\ell_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$ e $U = (\ell_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$, dove $\ell_{-1} = \ell_{-2} = \cdots = 0$ e $u_1 = u_2 = \cdots = 0$. Allora L è la matrice di Toeplitz sottotriangolare con simbolo $\hat{a}_+(z)^{-1}$, U è la matrice di Toeplitz sovratriangolare con simbolo $\hat{a}_-(z)^{-1}$ e vale la rappresentazione moltiplicativa

$$(\boldsymbol{T}_a)^{-1} = LU. \tag{1.16}$$

Siccome $L^{-1} = (w_{i-j}^{+})_{i,j=0}^{\infty}$ è la matrice di Toeplitz sottotriangolare con simbolo $\hat{a}_+(z)$ [dove $w_{-1}^{+} = w_{-2}^{+} = \cdots = 0$] e $U^{-1} = (w_{i-j}^{-})_{i,j=0}^{\infty}$ è la matrice di Toeplitz sovratriangolare con simbolo $\hat{a}_-(z)$ [dove $w_1^{-} = w_2^{-} = \cdots = 0$], abbiamo infatti la cosiddetta *fattorizzazione* UL

$$\boldsymbol{T}_a = U^{-1}L^{-1}, \tag{1.17}$$

dove U^{-1} è sovratriangolare e L^{-1} è sototriangolare. Il nostro compito, in risolvere l'equazione di Toeplitz (1.1), è di calcolare le inverse dei fattori in una fattorizzazione UL della matrice di Toeplitz del sistema (1.1).

Consideriamo ora il caso particolare in cui $b_0 = 1$ e $b_1 = b_2 = \cdots = 0$. In tal caso, se $\boldsymbol{e}$ è il vettore colonna semi-infinito $(1, 0, 0, 0, \cdots)^T$, risulta $U^{-1}\boldsymbol{e} = u_0\boldsymbol{e}$. Quest'ultimo seque dal fatto che la colonna zero-esima di U^{-1} è $(u_0, 0, 0, 0, \cdots)^T$. Quindi la soluzione $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^{\infty}$ del corrispondente sistema di Toeplitz (1.1) viene espressa come

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{T}_a)^{-1}\boldsymbol{e} = LU\boldsymbol{e} = L(u_0\boldsymbol{e}) = u_0L\boldsymbol{e} = u_0(\ell_i)_{i=0}^{\infty}.$$

Quindi per trovare la fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica di $\hat{a}(z)$, resta da risolvere il sistema di Toeplitz

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j}x_j = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{1.18}$$

trovare x_0, fattorizzare $x_0 = \ell_0 u_0$ se $x_0 \neq 0$[2], e calcolare ℓ_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ dalla formula

$$\ell_i = \frac{x_i}{x_0}, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.19}$$

[2]Questo passaggio è un pò arbitrario. Se non esiste la soluzione di (1.18) o se esiste e $x_0 = 0$, allora la fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica del simbolo non esiste.

I coefficienti u_{-i} ($i = \cdots, -2, -1, 0$) si trovano nella stessa maniera dalla soluzione del sistema di Toeplitz [come esattamente?]

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{j-i}x_j = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, \cdots . \end{cases} \tag{1.20}$$

2 Equazioni integrali di Wiener-Hopf

In questo paragrafo discutiamo le equazioni integrali di Wiener-Hopf, cioè quelle del tipo

$$f(t) - \int_0^{\infty} k(t-s)f(s)\,ds = g(t), \qquad 0 \leq t < \infty, \tag{2.1}$$

dove $f, g \in L^p(0, \infty)$ per qualche $p \geq 1$ e $k \in L^1(\mathbb{R})$. Lo sviluppo della teoria di queste equazioni integrali è iniziata nel lavoro fondamentale di Wiener e Hopf (vedi [5]). I risultati di base si trovano nel lavoro di Krein (vedi [4]) e nel libro di Gohberg e Feldman (vedi [1]).

Consideriamo prima l'equazione di convoluzione sull'intera retta, cioè

$$f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)f(s)\,ds = g(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

dove $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ e $k \in L^1(\mathbb{R})$. Utilizzando il prodotto convoluzione in $L^1(\mathbb{R})$, l'equazione (2.2) si può scrivere nella forma

$$f - (k * f) = g.$$

Introducendo la trasformate di Fourier

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\,dt,\ \hat{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} g(t)\,dt,\ \hat{k}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} k(t)\,dt,$$

e applicando il teorema delle convoluzioni[3], otteniamo l'equazione algebrica

$$\hat{f}(\lambda) - \hat{k}(\lambda)\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

[3] Per $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $f_1 * f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ e $\widehat{f_1 * f_2}(\lambda) = \hat{f}_1(\lambda)\hat{f}_2(\lambda)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se è verificata la condizione

$$1 - \hat{k}(\lambda) \neq 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

otteniamo ovviamente

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\hat{g}(\lambda)}{1 - \hat{k}(\lambda)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Applicando il Teorema di Wiener segue l'esistenza di $\ell \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\ell(t)\,dt = \frac{1}{1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}k(t)\,dt}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dunque $\hat{f}(\lambda) = [1 + \hat{\ell}(\lambda)]\hat{g}(\lambda)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. Ciò implica che $f = g + (\ell * g)$ oppure

$$f(t) = g(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}g(t)\,dt, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Di consequenza, se si verifica la condizione (2.3), l'equazione (2.2) ha la soluzione unica $f \in L^1(\mathbb{R})$ per qualsiasi $g \in L^1(\mathbb{R})$. Lo stesso risultato segue se $g \in L^p(\mathbb{R})$ e $k \in L^1(\mathbb{R})$ e si richiede $f \in L^p(\mathbb{R})$. In tal caso, il fatto che il prodotto convoluzione tra una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ ed una funzione in $L^p(\mathbb{R})$ appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ conduce ad una soluzione unica $f \in L^p(\mathbb{R})$ dell'equazione (2.2) per qualsiasi $g \in L^p(\mathbb{R})$. La funzione $1 - \hat{k}(\lambda)$ si chiama il *simbolo* dell'equazione (2.2).

Studiamo ora l'equazione di Wiener-Hopf (2.1) sotto la condizione che il simbolo verifichi (2.3). In tal caso non si può ridurre l'equazione integrale ad un'equazione algebrica, poiché il teorema delle convoluzioni non vale sulla semiretta.

Estendiamo l'equazione (2.1) ad un'equazione sull'intera retta, introducendo $f(t)$ e $g(t)$ per $t < 0$. Infatti, ponendo

$$f(t) = \int_0^{\infty} k(t-s)f(s)\,ds, \quad g(t) = 0, \quad t < 0, \tag{2.4}$$

si vede che l'equazione (2.1) vale per $t \in \mathbb{R}$ q.o. Inoltre, le funzioni $f(t)$ e $g(t)$ estese all'intera retta appartengono a $L^p(\mathbb{R})$ se partiamo da $f, g \in L^p(0, \infty)$. Purtroppo, il termine integrale non è un prodotto convoluzione sull'intera retta e quindi non ammetta una riduzione ad un prodotto algebrico tramite la trasformata di Fourier.

Consideriamo ora l'equazione di Wiener-Hopf per $f, g \in L^1(0, \infty)$, indicando le modifiche necessarie per il caso $f, g \in L^p(0, \infty)$ dopo. Si vede subito che vale la decomposizione come somma diretta

$$L^1(\mathbb{R}) = L^1(-\infty, 0)\dot{+}L^1(0, \infty). \tag{2.5}$$

Definiamo ora gli operatori lineari $\pi_\pm$ e $\imath_\pm$ dalle espressioni

$$\begin{cases} \pi_+ : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(0, \infty), & \\ (\pi_+ f)(t) = f(t), & t > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_- : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(-\infty, 0), & \\ (\pi_- f)(t) = f(t), & t < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \imath_+ : L^1(0, \infty) \to L^1(\mathbb{R}), & \\ (\imath_+ f)(t) = f(t), & t > 0, \\ (\imath_+ f)(t) = 0, & t < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \imath_- : L^1(-\infty, 0) \to L^1(\mathbb{R}), & \\ (\imath_- f)(t) = f(t), & t < 0, \\ (\imath_- f)(t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

In altre parole $\imath_\pm$ sono le immersioni naturali di $L^1(0, \infty)$ e $L^1(-\infty, 0)$ in $L^1(\mathbb{R})$ [ambedue isometrie] e $\pi_\pm$ sono le "proiezioni" naturali di $L^1(\mathbb{R})$ su $L^1(0, \infty)$ e $L^1(-\infty, 0)$. Ovviamente, $\pi_+\imath_+$ sono gli operatori unità su $L^1(0, \infty)$ e $L^1(-\infty, 0)$, rispettativamente, e $\imath_+\pi_+$ è la proiezione di $L^1(\mathbb{R})$ su $L^1(0, \infty)$ lungo $L^1(-\infty, 0)$ e $\pi_-\imath_-$ è la proiezione di $L^1(\mathbb{R})$ su $L^1(-\infty, 0)$ lungo $L^1(0, \infty)$.

L'equazione di Wiener-Hopf (2.1) ha la forma

$$f_+ - \pi_+(k * \imath_+ f_+) = g_+. \tag{2.6}$$

In altre parole, l'effetto dell'applicazione della convoluzione sulla semiretta è prima di immergere $f_+ \in L^1(0, \infty)$ in $L^1(\mathbb{R})$ (cioè, di passare da f_+ a $\imath_+ f_+ \in L^1(\mathbb{R})$), poi di applicare la convoluzione con $k \in L^1(\mathbb{R})$ (arrivando a $k * (\imath_+ f_+)$) e infine di proiettare "indietro" su $L^1(0, \infty)$ (arrivando a $\pi_+(k * \imath_+ f_+)$). Le definizioni (2.4) ci consentono a scrivere l'equazione (2.6) nella forma

$$(\imath_+ f_+) + (\imath_- f_-) - (k * \imath_+ f_+) = g, \tag{2.7}$$

dove $f_+ = \pi_+ f \in L^1(0, \infty)$ e $f_- = \pi_- f \in L^1(-\infty, 0)$. Introducendo le trasformate di Fourier

$$\begin{cases} \hat{f}_+(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda t} f(t)\, dt, \\ \hat{f}_-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} f(t)\, dt, \\ \hat{g}_+(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda t} g(t)\, dt = \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda t} g(t)\, dt, \end{cases}$$

arriviamo al cosiddetto *problema di Riemann-Hilbert*

$$\left[1 - \hat{k}(\lambda)\right] \hat{f}_+(\lambda) + \hat{f}_-(\lambda) = \hat{g}_+(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Nel problema di Riemann-Hilbert (2.8), la funzione $\hat{f}_+(\lambda)$ è continua per $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, tende a zero se $\lambda \to \infty$ nel semipiano superiore chiuso ed è analitica in $\operatorname{Im}\lambda > 0$. La funzione $\hat{f}_-(\lambda)$ è continua in $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$, tende a zero se $\lambda \to \infty$ nel semipiano inferiore chiuso ed è analitica in $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Supponiamo ora che esista una cosiddetta *fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica*

$$1 - \hat{k}(\lambda) = W_-(\lambda) W_+(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

dove i fattori $W_\pm(\lambda)$ hanno le seguenti proprietà:

(a) Esistono le funzioni $w_+ \in L^1(0,\infty)$ e $w_- \in L^1(-\infty,0)$ tali che

$$W_+(\lambda) = 1 - \int_0^\infty e^{i\lambda t} w_+(t)\,dt, \qquad W_-(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} w_-(t)\,dt;$$

dunque, $W_+(\lambda)$ è continua in $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, tende ad 1 se $\lambda \to \infty$ nel semipiano superiore chiuso ed è analitica in $\operatorname{Im}\lambda > 0$. D'altra parte $W_-(\lambda)$ è continua in $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$, tende ad 1 se $\lambda \to \infty$ nel semipiano inferiore chiuso ed è analitica in $\operatorname{Im}\lambda < 0$;

(b) $W_+(\lambda) \neq 0$ nel semipiano superiore chiuso e $W_-(\lambda) \neq 0$ nel semipiano inferiore chiuso.

Il Teorema di Wiener implica l'esistenza di $\gamma_+ \in L^1(0,\infty)$ e $\gamma_-(-\infty,0)$ tali che

$$W_+(\lambda)^{-1} = 1 + \int_0^\infty e^{i\lambda t} \gamma_+(t)\,dt, \quad W_-(\lambda)^{-1} = 1 + \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} \gamma_-(t)\,dt.$$

Sostituendo (2.9) in (2.8) e dividendo per $W_-(\lambda)$ otteniamo

$$W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda) + W_-(\lambda)^{-1}\hat{f}_-(\lambda) = W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

dove

$$\begin{aligned} W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}(\lambda) &= \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda t}\left[g(t) + \int_{-\infty}^\infty \gamma_-(t-s) g(s)\,ds\right] \\ &= \int_0^\infty e^{i\lambda t}\left[g(t) + \int_t^\infty \gamma_-(t-s) g(s)\,ds\right] dt \\ &+ \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t}\left[\int_0^\infty \gamma_-(t-s) g(s)\,ds\right] dt. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Separando (2.10) in un termine analitico nel semipiano superiore e un termine analitico nel semipiano inferiore, otteniamo

$$\begin{aligned} W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda) &= \int_0^\infty e^{i\lambda t}\left[g(t) + \int_t^\infty \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right], \\ W_-(\lambda)^{-1}\hat{f}_-(\lambda) &= \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t}\left[\int_0^\infty \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right]dt. \end{aligned}$$

Quindi for $t > 0$ troviamo (togliendo la trasformata di Fourier)

$$\begin{aligned} f(t) = g(t) &+ \int_t^\infty \gamma_-(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \\ &+ \int_0^\infty \gamma_+(t-s)\left[g(s) + \int_t^\infty \gamma_-(s-\tau)g(\tau)\,d\tau\right]ds. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Abbiamo dimostrato il seguente risultato (vedi [4]).

Teorema 2.1 *Se il simbolo $1 - \hat{k}(\lambda)$ ha una fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica del tipo* (2.8)*, allora per qualsiasi $g \in L^p(\mathbb{R})$ l'equazione di Wiener-Hopf* (2.1) *ha la soluzione unica $f \in L^p(\mathbb{R})$*

$$f(t) = g(t) + \int_0^\infty \gamma(t,s)g(s)\,ds, \qquad t > 0, \tag{2.13}$$

dove

$$\begin{cases} \gamma(t,s) = \gamma_+(t-s) + \displaystyle\int_0^s \gamma_+(t-\tau)\gamma_-(\tau-s)\,d\tau, & t > s > 0, \\ \gamma_-(t-s) + \displaystyle\int_0^t \gamma_+(t-\tau)\gamma_-(\tau-s)\,d\tau, & s > t > 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Il teorema è stato dimostrato soltanto per $p = 1$, ma la formula risolvente (2.13) ci dà una soluzione $f \in L^p(\mathbb{R})$ per qualsiasi $g \in L^p(\mathbb{R})$.

Supponiamo che esista una fattorizzazione canonica (2.9) del simbolo. Se $g(t) = k(t)$ (dove $\hat{k}(\lambda) = 1 - W_-(\lambda)W_+(\lambda)$), allora il problema di Riemann-Hilbert (2.10) si riduce all'equazione

$$W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda) + W_-(\lambda)^{-1}\hat{f}_-(\lambda) = 1 - W_-(\lambda)W_+(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si trova la soluzione

$$\hat{f}_+(\lambda) = W_+(\lambda)^{-1} - 1, \qquad \hat{f}_-(\lambda) = 1 - W_-(\lambda).$$

Quindi $f(t) = \gamma_+(t)$ se $t > 0$. In altre parole, la funzione $\gamma_+(t)$ si può calcolare come la soluzione dell'equazione di Wiener-Hopf

$$f(t) - \int_0^\infty k(t-s)f(s)\,ds = k(t), \qquad t > 0.$$

La funzione $\gamma_-(t)$ si trova dalla soluzione dell'equazione di Wiener-Hopf

$$f(t) - \int_0^\infty k(s-t)f(s)\,ds = k(-t), \qquad t > 0;$$

infatti, $f(t) = \gamma_-(-t)$ se $t > 0$.

3 Fattorizzazioni di Wiener-Hopf

Precedentemente abbiamo definito due tipi di fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica, uno per certe funzioni sul cerchio unitario e un altro per certe funzioni sulla retta reale. Per fornire una definizione più generale, sia Γ una curva chiusa, semplice e rettificabile nella sfera di Riemann (cioè, nel piano complesso più il punto all'infinito) con un orientamento che divide il piano complesso esteso in un aperto Ω_+ e un aperto Ω_- tali che $\Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Gamma = \mathbb{C}_\infty$ è una partizione della sfera di Riemann. Supponiamo che Ω_+ si trovi alla sinistra di Γ e Ω_- alla destra di Γ. Si vede subito che Γ e $\overline{\Omega_\pm} = \Omega_\pm \cup \Gamma$ sono sottoinsiemi compatti della sfera di Riemann.

Per esempio, sia $\Gamma = \mathbb{T}$ il cerchio unitario con l'orientamente nella direzione di crescita dell'argomento di $z \in \mathbb{T}$. Allora $\Omega_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e $\Omega_- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Se $\Gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con l'orientamento nella direzione di crescita di $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\Omega_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\,\lambda > 0\}$ e $\Omega_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\,\lambda < 0\}$.

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Banach di funzioni complesse continue su Γ tale che

$$\max_{z\in\Gamma} |f(z)| \leq \|f\|_{\mathcal{A}}, \qquad f \in \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

Allora $\mathcal{A}$ si dice *R-algebra* sulla curva Γ se l'insieme di tutte le funzioni razionali con poli fuori della curva Γ è denso in $\mathcal{A}$. Ora scegliamo due punti fissi: $\omega_\pm \in \Omega_\pm$[4].

[4]Se $\Gamma = \mathbb{T}$, si scelgono $\omega_+ = 0$ e $\omega_- = \infty$. Se $\Gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, si scelgono $\omega_\pm = \pm i$.

Lemma 3.1 *Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Banach con unità e e siano $\mathcal{B}_\pm$ due sottoalgebre di Banach chiuse di $\mathcal{B}$ tali che $\mathcal{B}_+ \dot{+} \mathcal{B}_- = \mathcal{B}$. Sia P la proiezioni di $\mathcal{B}$ su $\mathcal{B}_+$ lungo $\mathcal{B}_-$. Se*

$$\|a\| < \frac{1}{\max(\|P\|, \|I - P\|)}, \tag{3.2}$$

allora l'elemento $e - a$ ammette la fattorizzazione

$$e - a = (e + b_-)(e + b_+) \tag{3.3}$$

in fattori invertibili in $\mathcal{B}_\pm$, dove $b_\pm \in \mathcal{B}_\pm$ e $(e + b_\pm)^{-1} - e \in \mathcal{B}_\pm$.

Dimostrazione. Consideriamo l'equazione

$$x - P(ax) = e$$

per $x \in \mathcal{B}$. Siccome $\|P(ax)\| \leq \|P\| \, \|a\| \, \|x\|$ e $\|P\| \, \|a\| < 1$, esiste la soluzione unica $x \in \mathcal{B}$ e $x = e + x_+$ per qualche $x_+ \in \mathcal{B}_+$. In modo simile si dimostra che l'equazione

$$y - (I - P)(ya) = e$$

per $y \in \mathcal{B}$ ha la soluzione unica in $\mathcal{B}$ e che $y = e + x_-$ per qualche $x_- \in \mathcal{B}_-$. Ponendo $b_- = -(I - P)(ax)$ e $b_+ = -P(ya)$ ne consegue che

$$\begin{cases} (e - a)(e + x_+) = x - P(ax) - (I - P)(ax) = e + b_-, \\ (e + x_-)(e - a) = y - (I - P)(ya) - P(ya) = e - P(ya) = e + b_+. \end{cases}$$

Quindi

$$(e + b_+)(e + x_+) = (e + x_-)(e - a)(e + x_+) = (e + x_-)(e + b_-).$$

Siccome $b_+ + x_+ + b_+ x_+ = x_- + b_- + x_- b_- \in \mathcal{B}_+ \cap \mathcal{B}_- = \{0\}$, risulta

$$(e + b_+)(e + x_+) = (e + x_-)(e + b_-) = e.$$

Se l'algebra di Banach $\mathcal{B}$ fosse commutativa, il lemma sarebbe già stato dimostrato.

Nel caso non commutativo, consideriamo $e - \lambda a$ al posto di e. Se a è come prima e se $|\lambda| < 1/(\|a\| \max(\|P\|, \|I-P\|))$, allora si trovano $b_\pm(\lambda) \in \mathcal{B}_\pm$ tali che $e + b_\pm(\lambda)$ sono invertibili, $e + x_-(\lambda) = (e + b_\pm(\lambda))^{-1} - e \in \mathcal{B}_\pm$ e $e - \lambda a = (e + b_-(\lambda))(e + b_+(\lambda))$. Inoltre $b_\pm(\lambda)$ e $x_\pm(\lambda)$ sono funzioni analitiche di λ. Quindi per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo gli elementi $e + b_\pm(\lambda)$ sono invertibili e quindi

$$\varphi((e + x_+(\lambda))(e + b_+(\lambda))) = \varphi((e + b_-(\lambda))(e + x_-(\lambda))) = \varphi(e), \qquad |\lambda| < \varepsilon,$$

per ogni funzionali lineare continuo φ sullo spazio di Banach $\mathcal{B}$. Grazie all'unicità della continuazione analitica, quest'uguaglianza vale anche per $|\lambda| \leq 1$. Siccome φ è arbitrario, risulta l'invertibilità di $e + b_\pm$ in $\mathcal{B}$. $\square$

Dalla dimostrazione seguono le seguenti stime:

$$\begin{aligned}
\|x_+\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\|P\|\,\|a\|)^j = \frac{\|P\|\,\|a\|}{1 - \|P\|\,\|a\|}, \\
\|x_-\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\|I-P\|\,\|a\|)^j = \frac{\|I-P\|\,\|a\|}{1 - \|I-P\|\,\|a\|}, \\
\|b_+\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_+\|^j = \frac{\|P\|\,\|a\|}{1 - 2\|P\|\,\|a\|}, \\
\|b_-\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_-\|^j = \frac{\|I-P\|\,\|a\|}{1 - 2\|I-P\|\,\|a\|},
\end{aligned}$$

dove le stime per $b_\pm$ valgono soltanto se $\|a\| < 1/2 \max(\|P\|, \|I-P\|)$.

Sia Γ una curva chiusa, semplice, rettificabile e orientata in $\mathbb{C}$, e sia $w(z)$ una funzione complessa continua su Γ senza zeri. Se facciamo esattamente un giro lungo Γ nella direzione positiva, $\log(w(z))$ rimane invariante o cresce da $2\pi i\kappa$. Il numero intero κ si chiama l'*indice* di w rispetto a Γ. Se Γ è una curva chiusa, semplice, rettificabile e orientata in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ che passa per il punto all'infinito, l'indice di una funzione complessa continua $w(z)$ senza zeri su Γ si definisce nella stessa maniera, ma si parte dall'infinito e si torna all'infinito.

Se $w(z)$ è analitica in un aperto che contiene la curva Γ, allora l'indice si può calcolare dall'espressione

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{w'(z)}{w(z)}\, dz.$$

Se $w(z)$ è meromorfa (cioè, è il rapporto tra due funzioni analitiche) sul dominio Ω_+ alla sinistra della curva Γ, allora l'indice è uguale al numero di zeri meno il numeri di poli della funzione $w(z)$ in Ω_+.

Teorema 3.2 *Sia $\mathcal{A}$ una R-algebra di funzioni continue sulla curva chiusa, semplice, rettificabile e orientata γ in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, e siano $\omega_\pm \in \Omega_\pm$. Se l'algebra $\mathcal{A}$ si scompone nella somma diretta*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \dot{+} \mathcal{A}_-, \tag{3.4}$$

dove $\mathcal{A}_+$ è l'algebra di tutte le funzioni $W \in \mathcal{A}$ che hanno un'estensione ad una funzione continua in $\overline{\Omega_+}$ e analitica in Ω_+ e $\mathcal{A}_-$ è l'algebra di tutte le funzioni $W \in \mathcal{A}$ che hanno un'estensione ad una funzione continua in $\overline{\Omega_-}$, analitica in Ω_- e zero in ω_-, allora ogni $W \in \mathcal{A}$ che non si annulla su Γ, si può fattorizzare nella forma

$$W(z) = W_-(z) \left(\frac{z - \omega_+}{z - \omega_-} \right)^\kappa W_+(z), \qquad z \in \Gamma, \tag{3.5}$$

dove i fattori e il numero κ hanno le seguenti proprietà:

- (a) *W_+ è continua in $\overline{\Omega_+}$ e analitica in Ω_+ e non si annulla in $\overline{\Omega_+}$;*
- (b) *W_- è continua in $\overline{\Omega_-}$ e analitica in Ω_- e non si annulla in $\overline{\Omega_-}$;*
- (c) *W_+ e W_+^{-1} appartengono a $\mathcal{A}_+$;*
- (d) *$W_-(\cdot) - W_-(\omega_-)$ e $W_-(\cdot)^{-1} - W_-(\omega_-)^{-1}$ appartengono a $\mathcal{A}_-$;*
- (e) *κ è un numero intero uguale all'indice di W rispetto a Γ.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui Γ è limitato.

Sia $R(z)$ una funzione razionale senza poli nè zeri su Γ tale che la funzione $B = [W - R]R^{-1} = WR^{-1} - 1$ soddisfa la stima

$$\|B\|_{\mathcal{A}} < \frac{1}{\max(\|P\|, \|I - P\|)},$$

dove P è la proiezione di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}_+$ lungo $\mathcal{A}_-$. Tale R esiste, poiché $\mathcal{A}$ è una R-algebra. Allora

$$W(z)R(z)^{-1} = B_-(z)B_+(z), \qquad z \in \Gamma,$$

dove $B_+, B_+^{-1} \in \mathcal{A}_+$ e $B_-(\cdot) - B_-(\omega_-), B_-(\cdot)^{-1} - B_-(\cdot)^{-1} \in \mathcal{A}_-$. Secondo il Teorema di Rouché[5], la funzione razionale $R(z)$ ha lo stesso indice κ rispetto a Γ. Quindi resta da fattorizzare $R(z)$. Ma $R(z)$ ha la fattorizzazione

$$R(z) = R_-(z) \left(\frac{z - \omega_+}{z - \omega_-} \right)^\kappa R_+(z), \qquad z \in \Gamma,$$

dove $R_\pm(z)$ sono funzioni razionali con tutti i loro poli e zeri in $\Omega_\mp$ e un limite finito e non zero all'infinito. Di consequenza,

$$W(z) = B_-(z) R_-(z) \left(\frac{z - \omega_+}{z - \omega_-} \right)^\kappa R_+(z) B_+(z), \qquad z \in \Gamma;$$

quest'ultima fattorizzazione implica (3.5).

Se Γ passa per il punto all'infinito, si faccia una trasformata di Möbius per ridurre il teorema ad un caso in cui la curva è limitata. $\square$

Nel caso in cui la curva è la retta reale, la trasformata di Möbius $z = (\lambda - i)/(\lambda + i)$ ci consente a ridurre il teorema al caso del cerchio unitario.

Discutiamo due esempi.

(a) Sia $\Gamma = \mathbb{T}$ con $\Omega_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Sia $\mathcal{A} = \ell^1(\mathbb{Z})$. Allora $\mathcal{A}$ si scompone come in (3.4), dove $\mathcal{A}_+ = \ell^1(\mathbb{Z}_+)$ e $\mathcal{A}_- = \ell^1(-\mathbb{N})$. Le proiezioni P e $I - P$ di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}_\pm$ lungo $\mathcal{A}_\mp$ hanno ambedue la norma 1. Se scegliamo $\omega_+ = 0$ e $\omega_- = \infty$, si arriva alla fattorizzazione

$$W(z) = W_-(z) z^\kappa W_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}. \tag{3.6}$$

Nel caso $\kappa = 0$ la fattorizzazione riduce alla definizione di una fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica del paragrafo 1.

(b) Sia $\Gamma = \mathbb{R}$ con $\Omega_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda > 0\}$. Sia $\mathcal{A} = \mathbb{C} \times L^1(\mathbb{R})$ l'algebra di Wiener continua. Scegliamo $\omega_\pm = \pm i$. Allora $\mathcal{A}_+ = \mathbb{C} \times L^1(0, \infty)$ e $\mathcal{A}_- = \{w = (c, f) \in \mathbb{C} \times L^1(-\infty, 0) : \hat{w}(-i) = 0\}$. Le proiezioni P e $I - P$ di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}_\pm$ lungo $\mathcal{A}_\mp$ hanno ambedue la norma 1. Si arriva alla fattorizzazione

$$W(\lambda) = W_-(\lambda) \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^\kappa W_+(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

[5] Che afferma che: *Se W_1 e W_2 sono due funzioni continue su $\overline{\Omega_\pm}$ e analitiche su $\Omega_\pm$ tali che $W_1(z) \neq 0$ per $z \in \Gamma$ e $|[W_1(z) - W_2(z)] W_1(z)^{-1}| < 1$ per ogni $z \in \Gamma$, W_1 e W_2 hanno lo stesso numero di zeri in $\Omega_\pm$.*

Nel caso $\kappa = 0$ la fattorizzazione si riduce alla fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica del paragrafo 2.

Continuiamo il paragrafo 3 con una proposizione importante.

Proposizione 3.3 *Se $W = W_- W_+ = Z_- Z_+$ sono due fattorizzazioni canoniche (cioè, fattorizzazioni di Wiener-Hopf con indice $\kappa = 0$) della stessa funzione, allora esiste una costante $c \neq 0$ tale che $W_+ = cZ_+$ e $Z_- = cW_-$.*

Dimostrazione. Le due fattorizzazioni implicano che

$$W_+(z)Z_+(z)^{-1} = W_-(z)^{-1}Z_-(z), \qquad z \in \Gamma.$$

La parte a sinistra è continua in $\overline{\Omega_+}$ e analitica in Ω_+ e la parte a destra è continua in $\overline{\Omega_-}$ e analitica in Ω_-. Queste due parti insieme definiscono una funzione analitica sull'intero piano complesso ed all'infinito. Una tale funzione deve essere costante, secondo il Teorema di Liouville. Facciendo lo stesso gioco con l'equazione

$$Z_+(z)W_+(z)^{-1} = Z_-(z)^{-1}W_-(z), \qquad z \in \Gamma,$$

si scopre che questa costante è diversa da zero. $\square$

Diamo ora alcune condizioni necessarie per l'esistenza di una fattorizzazione canonica ($\kappa = 0$)

Teorema 3.4 *Sia $\Gamma = \mathbb{T}$ (con Ω_+ il disco unitario) o $\Gamma = \mathbb{R}$ (con Ω_+ il semipiano superiore). Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Banach di funzioni continue su Γ che si scompone coe in (3.4). Allora una funzione $W \in \mathcal{A}$ ha una fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica in $\mathcal{A}$ se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:*

(a) *$W(z)$ è positiva per ogni $z \in \Gamma$,*

(b) *$W(z)$ ha una parte reale positiva per ogni $z \in \Gamma$,*

(c) *$|1 - W(z)| < 1$ per ogni $z \in \Gamma$.*

Dimostrazione. Facciamo correre $\log(z)$ lungo la curva chiusa $\{W(z) : z \in \Gamma\}$ nel piano complesso. Nel caso (a), si produce un sottoinsieme di $(0, \infty)$, nel caso (b) si rimane nel piano destro aperto, e nel caso (c) si rimane all'interno del disco di raggio 1 e centro 1. In nessuno di questi tre casi si passa per lo zero o si gira intorno allo zero. Quindi $\kappa = 0$. $\square$

Nel caso (a), si può sempre produrre una fattorizzazione canonica, dove

$$W_-(z) = \overline{W_+(\overline{z})}, \qquad z \in \Gamma.$$

4 Sistemi di Toeplitz con indice arbitrario

In questo paragrafo risolviamo l'equazione di Toeplitz (1.1), dove il simbolo verifica la condizione (1.7), ma ha una fattorizzazione di Wiener-Hopf

$$\hat{a}(z) = \hat{a}_-(z) z^\kappa \hat{a}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{4.1}$$

con l'indice κ diversa da zero. Sostituendo (4.1) in (1.10) e dividendo per $\hat{a}_-(z)$, arriviamo all'uguaglianza

$$z^\kappa \hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) + \hat{a}_-(z)^{-1}\hat{x}_-(z) = \hat{a}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{4.2}$$

dove [vedi (1.13)]

$$P\left[\hat{a}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left[\sum_{j=i}^{\infty} u_{i-j} b_j\right].$$

Si distinguono i tre casi $\kappa = 0$ (discusso nel paragrafo 1), $\kappa > 0$ e $\kappa < 0$.

Il caso $\kappa > 0$. In tal caso si separano il termine analitico nel disco unitario e il termine analitico fuori e zero all'infinito. Risulta

$$z^\kappa \hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left[\sum_{j=i}^{\infty} u_{i-j} b_j\right].$$

Da questa equazione si può raccogliere $\hat{x}(z)$ soltanto se la parte a destra ha uno zero di ordine κ in $z = 0$. Senza questa condizione non esiste alcuna soluzione dell'equazione di Toeplitz (1.1). Dividendo da $\hat{a}_+(z)$ si ottiene prima

$$z^\kappa \hat{x}_+(z) = \hat{a}_+(z)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left[\sum_{j=i}^{\infty} u_{i-j} b_j\right].$$

Utilizzando (1.14) si arriva all'uguaglianza

$$z^\kappa \hat{x}_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left(\sum_{r=0}^{i} \ell_{i-r} \sum_{j=r}^{\infty} u_{r-j} b_j\right).$$

Una soluzione di (1.1) esiste se e solo se si annullano i coeffienti di z^i per $i = 0, 1, \cdots, \kappa - 1$, cioè se e solo se si verificano le condizioni

$$\sum_{r=0}^{i} \ell_{i-r} \sum_{j=r}^{\infty} u_{r-j} b_j = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, \kappa - 1. \tag{4.3}$$

In tal caso la soluzione (unica) ha la forma

$$x_i = \sum_{r=0}^{i+\kappa} \ell_{i+\kappa-r} \sum_{j=r}^{\infty} u_{r-j} b_j, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots . \tag{4.4}$$

Il caso $\kappa = -|\kappa| < 0$. Consideriamo prima lo sviluppo di Taylor della funzione $\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z)$ in $z = 0$:

$$\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) = \sum_{s=0}^{|\kappa|-1} z^s c_s + O(z^{|\kappa|}), \qquad z \to 0, \tag{4.5}$$

e scriviamo (4.2) nella forma

$$\frac{\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) - \sum_{s=0}^{|\kappa|-1} z^s c_s}{z^{|\kappa|}} + \hat{a}_-(z)^{-1}\hat{x}_-(z) + \frac{\sum_{s=0}^{|\kappa|-1} z^s c_s}{z^{|\kappa|}} = \hat{a}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z), \tag{4.6}$$

dove $z \in \mathbb{T}$. Separando il termine analitico nel disco dal termine analitico fuori e zero all'infinito, si trova

$$\frac{\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) - \sum_{s=0}^{|\kappa|-1} z^s c_s}{z^{|\kappa|}} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left[\sum_{j=i}^{\infty} u_{i-j} b_j \right]. \tag{4.7}$$

Quindi

$$\hat{x}_+(z) = \hat{a}_+(z)^{-1} \left[\sum_{s=0}^{|\kappa|-1} z^s c_s + z^{|\kappa|} \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left(\sum_{j=i}^{\infty} u_{i-j} b_j \right) \right].$$

Sostituendo $\hat{a}_+(z)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \ell_i$ otteniamo infine

$$\hat{x}_+(z) = \sum_{i=0}^{|\kappa|-1} z^i \sum_{j=0}^{i} \ell_{i-j} c_j + \sum_{i=|\kappa|}^{\infty} z^i \sum_{r=0}^{i-|\kappa|} \ell_{i-|\kappa|-r} \sum_{j=r}^{\infty} u_{r-j} b_j.$$

In altre parole, abbiamo trovato tutte le soluzioni:

$$x_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{i} \ell_{i-j} c_j, & i = 0, 1, \cdots, |\kappa| - 1, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{i-|\kappa|} \ell_{i-|\kappa|-r} \sum_{j=r}^{\infty} u_{r-j} b_j, & i = |\kappa|, |\kappa| + 1, \cdots, \end{cases} \tag{4.8}$$

dove $c_0, c_1, \cdots, c_{|\kappa|-1}$ sono parametri arbitrari. Quindi la versione omogenea dell'equazione di Toeplitz (1.1) (dove $b_0 = b_1 = b_2 = \cdots = 0$) ha $|\kappa|$ soluzioni linearmente indipendenti.

Abbiamo dimostrare il seguente risultato (enunciato per $p \geq 1$).

Teorema 4.1 *Supponiamo la condizione* (1.7) *e sia κ l'indice del simbolo. Allora*

- (a) *Se $\kappa = 0$, l'equazione* (1.1) *ha la soluzione unica $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ in $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ per qualsiasi $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ in $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$.*
- (b) *Se $\kappa > 0$, l'equazione* (1.1) *ha soluzioni in $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ se e solo se sono verificate le condizioni* (4.3). *In tal caso la soluzione è unica.*
- (c) *Se $\kappa < 0$, l'equazione* (1.1) *ha almeno una soluzione $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ in $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ per qualsiasi $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ in $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$. La corrispondente equazione omogenea ha $|\kappa|$ soluzioni linearmenti indipendenti in $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$.*

Partendo dalla fattorizzazione di Wiener-Hopf (4.1) del simbolo, si può fattorizzare la matrice di Toeplitz $\boldsymbol{T}_a$ nella forma

$$\boldsymbol{T}_a = \boldsymbol{T}_{a_-} \boldsymbol{T}_{z^\kappa} \boldsymbol{T}_{a_+}, \tag{4.9}$$

dove $\boldsymbol{T}_{a_-} = U^{-1}$ è la matrice di Toeplitz con simbolo $\hat{a}_-(z)$, $\boldsymbol{T}_{z^\kappa}$ è la matrice di Toeplitz con simbolo z^κ, e $\boldsymbol{T}_{a_+} = L^{-1}$ è la matrice di Toeplitz con simbolo $\hat{a}_+(z)$. La matrice $\boldsymbol{T}_{a_+} = U^{-1}$ è sovratriangolare e invertibile[6] e la matrice di Toeplitz $\boldsymbol{T}_{a_+} = L^{-1}$ è sottotriangolare e invertibile[7]. La matrice di Toeplitz $\boldsymbol{T}_{z^\kappa}$ ha la forma

$$[\boldsymbol{T}_{z^\kappa}]_{i,j} = \begin{cases} 1, & i - j = \kappa, \\ 0, & i - j \neq \kappa. \end{cases}$$

[6] Sia come operatore lineare da $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ in se stesso, sia come elemento dell'algebra di Banach $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$.

[7] Sia come operatore lineare da $\ell^p(\mathbb{Z}_+)$ in se stesso, sia come elemento dell'algebra di Banach $\ell^1(\mathbb{Z}_-)$.

Quindi $\boldsymbol{T}_{z^\kappa}$ ha sempre l'elemento 1 sul diagonale delle posizioni (i,j) con $i-j=\kappa$ e zeri in tutte le altre posizioni. È chiaro che l'invertibilità della matrice di Toeplitz $\boldsymbol{T}_a$ e la risolubilità dell'equazione (1.1) vengono determinate completamente dalle proprietà della matrice di Toeplitz $\boldsymbol{T}_{z^\kappa}$.

La matrice $\boldsymbol{T}_{z^\kappa}$ è la matrice unità semi-infinita se $\kappa=0$, e uno spostamento per κ posizioni se $\kappa\neq 0$. L'equazione (1.1) ha la seguente forma:

$$x_{i-\kappa}=b_i, \qquad i=\max(0,\kappa),\max(0,\kappa)+1,\cdots. \tag{4.10}$$

Per $\kappa>0$ risulta $x_i=b_{i+\kappa}$ sotto la condizione necessaria che $b_0=b_1=\cdots=b_{\kappa-1}=0$. Per $\kappa<0$ risulta $x_i=b_{i-|\kappa|}$ $(i=|\kappa|,|\kappa|+1,\cdots)$, dove $x_0,x_1,\cdots,x_{|\kappa|-1}$ sono arbitrari.

5 Equazioni integrali di Wiener-Hopf con indice arbitrario

In questo paragrafo risolviamo l'equazione integrale di Wiener-Hopf nel caso in cui viene verificata la condizione (2.3), ma non esiste la fattorizzazione canonica del simbolo. In altre parole, abbiamo la fattorizzazione di Wiener-Hopf

$$1-\hat{k}(\lambda)=W_-(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\kappa}W_+(\lambda), \tag{5.1}$$

dove $\kappa\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. La soluzione dell'equazione (2.1) per $\kappa=0$ è già stata presentata nel paragrafo 2. Sostituendo (5.1) in (2.8) e dividendo per $W_-(\lambda)$ arriviamo all'uguaglianza

$$\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\kappa}W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda)+W_-(\lambda)^{-1}\hat{f}_-(\lambda)=W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}_+(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{5.2}$$

dove [vedi (2.11)]

$$P\left[W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}_+(\lambda)\right]=\int_0^\infty e^{i\lambda t}\left[g(t)+\int_t^\infty \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right]dt.$$

Discutiamo ora i due casi non presentati prima: $\kappa>0$ e $\kappa<0$.

Il caso $\kappa>0$. Separando il temine analitico nel semipiano superiore da quello analitico nel semipiano inferiore e zero all'infinito, otteniamo

$$\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\kappa}W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda)=\int_0^\infty e^{i\lambda t}\left[g(t)+\int_t^\infty \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right]dt.$$

Quindi la parte deve avere uno zero di ordine κ in $\lambda = i$. In tal caso la soluzione unica dell'equazione (2.1) ha la forma

$$\hat{f}_+(\lambda) = \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^\kappa W_+(\lambda)^{-1} \int_0^\infty e^{i\lambda t} \left[g(t) + \int_t^\infty \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right] dt.$$

Sostituendo

$$e^{i\lambda t} = e^{-t} \sum_{j=0}^\infty (1 + i\lambda)^j \frac{t^j}{j!},$$

otteniamo le seguenti κ condizioni su $g(t)$ affinché esista la soluzione:

$$\int_0^\infty \frac{t^j}{j!} e^{-t} \left[g(t) + \int_t^\infty \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right] dt = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, \kappa - 1. \tag{5.3}$$

Il caso $\kappa = -|\kappa| < 0$. Ponendo

$$W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda) = \sum_{s=0}^\infty \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^s c_s,$$

otteniamo dal problema di Riemann-Hilbert (5.2)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^{|\kappa|} \left[W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda) - \sum_{s=0}^{|\kappa|-1} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^s c_s\right] \\ &+ W_-(\lambda)^{-1}\hat{f}_-(\lambda) + \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^{|\kappa|} \sum_{s=0}^{|\kappa|-1} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^s c_s \\ &= W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}_+(\lambda). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^{|\kappa|} \left[W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda) - \sum_{s=0}^{|\kappa|-1} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^s c_s\right] \\ &= \int_0^\infty e^{i\lambda t} \left[g(t) + \int_t^\infty \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right] dt. \end{aligned}$$

In altre parole,

$$\hat{f}_+(\lambda) = W_+(\lambda)^{-1} \left[\sum_{s=0}^{|\kappa|-1} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^s c_s \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^{|\kappa|} \int_0^\infty e^{i\lambda t} \left(g(t) + \int_t^\infty \gamma_-(t-s) g(s)\, ds \right) dt \right],$$

dove $c_0, c_1, \cdots, c_{|\kappa|-1}$ sono costanti arbitrarie. Quindi la corrispondente equazione di Wiener-Hopf omogenea $[g(t) \equiv 0]$ ha $|\kappa|$ soluzioni linearmente indipendenti. Quindi

$$\hat{f}_+(\lambda) = \left[1 + \int_0^\infty e^{i\lambda t} \gamma_+(t) \right] \left[\sum_{s=0}^{|\kappa|-1} c_s \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^s \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^{|\kappa|} \int_0^\infty e^{i\lambda t} \left(g(t) + \int_t^\infty \gamma_-(t-s) g(s)\, ds \right) dt \right].$$

Utilizzando l'espressione

$$\int_0^\infty \frac{t^m}{m!} e^{i\lambda t} e^{-t}\, dt = \left(\frac{i}{\lambda + i} \right)^{m+1},$$

troviamo prima

$$\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^m = 1 + \int_0^\infty e^{i\lambda t} d_m(t)\, dt,$$

dove $d_0(t) = 0$ e per $m = 1, 2, \cdots$

$$d_m(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{m} (-2)^s \binom{m}{s} \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Dopo alcuni calcoli otteniamo l'espressione finale

$$f(t) = g(t) + \int_0^\infty \left[\gamma(t,\tau) + d_{|\kappa|}(t-\tau) + \int_0^t d_{|\kappa|}(t-\hat{\tau}) \gamma(\hat{\tau},\tau)\, d\hat{\tau} \right] g(\tau)\, d\tau$$
$$+ \sum_{s=0}^{|\kappa|-1} c_s \left[d_s(t) + \int_0^t \gamma_+(t-\tau) d_s(\tau) \right] d\tau, \tag{5.5}$$

dove $t > 0$, $\gamma(t,\tau)$ è il nucleo risolvente in (2.14) e $c_0, c_1, \cdots, c_{|\kappa|-1}$ sono parametri della soluzione.

Abbiamo dimostrato il seguente risultato (enunciato per $p \geq 1$).

Teorema 5.1 *Supponiamo la condizione* (2.3) *e sia κ l'indice del simbolo. Allora*

(a) *Se $\kappa = 0$, l'equazione* (2.1) *ha la soluzione unica $f \in L^p(0,\infty)$ per qualsiasi $g \in L^p(0,\infty)$.*

(b) *Se $\kappa > 0$, l'equazione* (2.1) *ha soluzioni in $L^p(0,\infty)$ se e solo se sono verificate le condizioni* (5.3). *In tal caso la soluzione è unica.*

(c) *Se $\kappa < 0$, l'equazione* (2.1) *ha almeno una soluzione $f \in L^p(0,\infty)$ per qualsiasi $g \in L^p(0,\infty)$. La corrispondente equazione omogenea ha $|\kappa|$ soluzioni linearmenti indipendenti in $L^p(0,\infty)$.*

Esercizi

1. Una matrice di Toeplitz $\boldsymbol{T}_a = (a_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$ si dice *a banda* se $a_i = 0$ per $i < -m$ e per $i > n$.

(a) Dimostrare che il simbolo è una funzione razionale.

(b) Se questa funzione razionali non ha zeri nè poli su $\mathbb{T}$, sviluppare un metrodo analitico per calcolarne la fattorizzazione di Wiener-Hopf.

2. Supponiamo che il simbolo della matrice di Toeplitz $\boldsymbol{T}_a$ è strettamente positiva su $\mathbb{T}$.

(a) Descrivere le conseguenze della positività del simbolo per i coefficienti a_i della matrice di Toeplitz.

(b) Dimostrare l'esistenza di una successione $(c_i)_{i=0}^{\infty}$ in $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$ con corrispondente simbolo $\hat{c}(z)$ tale che $|\hat{c}(z)|^2 = \hat{a}(z)$ per ogni $z \in \mathbb{T}$.

3. Risolvere esplicitamente l'equazione di Wiener-Hopf

$$f(t) - \frac{c}{2}\int_0^{\infty} e^{-|t-s|} f(s)\, ds = g(t), \qquad 0 < t < +\infty,$$

dove $c \in (0,1)$. Per qual'è $c \in \mathbb{C}$ esiste la soluzione unica e perché?

4. Il trasferimento della luce non polarizzata in un atmosfera omogeneo con scattering isotropo e diametro ottico infinito viene descritto dalla cosidetta equazione di Schwarzschild-Milne

$$f(t) - \frac{a}{2}\int_0^\infty E_1(|t-\tau|)f(\tau)\,d\tau = \int_0^1 e^{-t/\mu}\varphi_+(\mu)\,d\mu, \qquad 0 < t < +\infty,$$

dove $0 < a \leq 1$ è l'albedo di scattering singolo, $E_1(t) = \int_1^\infty e^{-z/|t|}\,(dz/z)$ è la funzione integrale esponenziale e $\varphi_+(\mu)$ è l'intensità della luce che arriva alla frontiera superiore in una direzione che fa l'angolo $\arccos\mu$ con il normale al bordo. Per quale a esiste la soluzione unica e perché?

Riferimenti bibliografici

[1] I.C. Gohberg and I.A. Feldman, *Convolution Equations and Projection Methods for their Solutions*, Transl. Math. Monographs, Vol. **41**, Amer. Math. Soc., Providence, 1974 [Nauka, Moscow, 1971, in Russian].

[2] I.M. Gelfand, D.A. Raikov, and G.E. Shilov, *Commutative Normed Rings*, Chelsea Publ., New York, 1964 [Nauka, Moscow, 1960, in Russian].

[3] I. Gohberg, S. Goldberg, and M.A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators*, Vol. II, Birkhäuser OT **63**, Basel-Boston, 1993.

[4] M.G. Krein, *Integral equations on the half-line with kernel depending upon the difference of the arguments*, Uspehi Mat. Nauk., **13**(5), 3–120 (1958) (in Russian); AMS Translations, **22**, 163–288 (1962).

[5] N. Wiener and E. Hopf, *Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, 696–706 (1931).