Cap III: Equazioni di Toeplitz e Equazioni Integrali di Wiener-Hopf a Blocchi

In questo capitolo discutiamo la teoria dei sistemi di equazioni di Toeplitz e quella dei sistemi di equazioni di Wiener-Hopf. Tali sistemi di equazioni si possono rappresentare da un'equazione di Toeplitz oppure un'equazione integrale di Wiener-Hopf, dove la soluzione e il termine noto sono successioni o funzioni a valori vettoriali e il simbolo è una funzione continua a valori matriciali. Il metodo di risoluzione è essenzialmente quello nel caso scalare: la fattorizzazione di Wiener-Hopf del simbolo. Essenzialmente, se il simbolo ha una fattorizzazione canonica, si possono ripetere tutti i passaggi nelle derivazioni scalari; ovviamente bisogna stare attento a non scambiare fattori[1]. In tal caso si arriva alla soluzione unica del sistema di equazione. La generalizzazione della fattorizzazione non canonica è più complicata e conduce ai cosiddetti indici parziali al posto di un singolo indice del simbolo. La dimostrazione dell'esistenza di tale fattorizzazione è molto più difficile che nel caso scalare.

Presentiamo ora alcune definizioni. Siano $m \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$. Se E è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Z}$ (per esempio, $\mathbb{Z}$ stesso, $\mathbb{Z}_+$, $-\mathbb{N}$), $\ell_m^p(E)$ è l'insieme di tutte le successioni $(x_n)_{n\in E}$ in $\mathbb{C}^m$ tali che

$$\|(x_n)_{n\in E}\| = \left[\sum_{n\in E} \|x_n\|^p\right]^{1/p} \tag{0.1}$$

è finito; con questa norma $\ell_m^p(E)$ diventa uno spazio di Banach complesso. Inoltre, $\ell_{m\times m}^p$ è lo spazio di Banach complesso di tutte le successioni $(x_n)_{n\in E}$ in $\mathbb{C}^{m\times m}$ (l'insieme delle matrici complesse di ordine m) tali che (0.1) è finito. Se E è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}$ di misura positiva (spesso, $\mathbb{R}$ stesso, $(0,\infty)$ oppure $(-\infty,0)$), $L_m^p(E)$ è lo spazio di Banach complesso delle funzioni misurabili

[1] Adesso i fattori sono matrici, non sono più numeri scalari.

$f : E \to \mathbb{C}^m$ tali che

$$\|f\| = \left[\int_E \|f(t)\|^p \, dt\right]^{1/p} \tag{0.2}$$

è finito. Inoltre, $L^p_{m\times m}(E)$ è lo spazio di Banach complesso di tutte le funzioni misurabili $f : E \to \mathbb{C}^{m\times m}$ tali che (0.2) è finito. Nelle parti a destra della (0.1) e (0.2), la norma $\|\cdot\|$ è una norma arbitraria in $\mathbb{C}^m$ o $\mathbb{C}^{m\times m}$. Nel caso $p = 2$ sceglieremo spesso la norma Euclidea per i vettori in $\mathbb{C}^2$ e la norma spettrale per le matrici complesse $m \times m$[2].

1 Sistemi lineari di Toeplitz a blocchi

Consideriamo ora il sistema di Toeplitz a blocchi

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} x_j = b_i, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.1}$$

dove $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ e $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ sono successioni con termini in $\mathbb{C}^m$ e $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ è una successione di matrici complesse di ordine m. Ovviamente, ponendo $x_i = (x_i^s)_{s=1}^m$, $b_i = (b_i^s)_{s=1}^m$ e $a_i = (a_i^{r,s})_{r,s=1}^m$, si può riformulare l'equazione (1.1) come

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{m} a_{i-j}^{r,s} x_j^s = b_i^r, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, \; r = 1, \cdots, m.$$

È più commodo studiare questi sistemi di equazioni nella forma (1.1). Si suppone che $(x_i)_{i=0}^{\infty}, (b_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell^p_m(\mathbb{Z}_+)$ per qualche $p \geq 1$ e $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^1_{m\times m}(\mathbb{Z})$.

Estendiamo (1.1) a tutti gli interi i, ponendo $x_i = -\sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} x_j$ e $b_i = 0$ per $i = \cdots, -2, -1$. Allora $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (b_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^p_m(\mathbb{Z})$. Introducendo le trasformate di Fourier discrete

$$\begin{cases} \hat{x}_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i x_i, & \hat{x}_-(z) = \sum_{i=-\infty}^{-1} z^i x_i, \\ \hat{b}_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i b_i, & \hat{a}(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} z^i a_i, \end{cases}$$

dove $z \in \mathbb{T}$, arriviamo al problema di Riemann-Hilbert

$$\hat{a}(z)\hat{x}_+(z) + \hat{x}_-(z) = \hat{b}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}. \tag{1.2}$$

[2]Se $\|\cdot\|_2$ è la norma Euclidea in $\mathbb{C}^m$, allora $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ è la norma spettrale della matrice complessa $m \times m$ A. Questa norma è uguale all'autovalore più grande della matrice $(A^*A)^{1/2}$.

Supponiamo ora che esista una *fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica*

$$\hat{a}(z) = \hat{a}_-(z)\hat{a}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{1.3}$$

dove i fattori $\hat{a}_\pm(z)$ hanno le seguenti proprietà:

(a) Esistono le successioni $(w_i^+)_{i=0}^\infty \in \ell_m^1(\mathbb{Z}_+)$ e $(w_i^-)_{i=-\infty}^0 \in \ell_m^1(\mathbb{Z}_-)$ tali che

$$\hat{a}_+(z) = \sum_{i=0}^\infty z^i w_i^+, \qquad \hat{a}_-(z) = \sum_{i=-\infty}^0 z^i w_i^-;$$

dunque $\hat{a}_+(z)$ è continua per $|z| \leq 1$ e analitica per $|z| < 1$. D'altra parte $\hat{a}_-(z)$ è continua per $|z| \geq 1$, tende a zero se $z \to \infty$ ed è analitica per $|z| > 1$.

(b) $\det \hat{a}_+(z) \neq 0$ per $|z| \leq 1$ e $\det \hat{a}_-(z) \neq 0$ per $|z| \geq 1$ e nel limite se $z \to \infty$.

Il Teorema di Wiener (vedi l'appendice) implica l'esistenza di $(u_i)_{i=0}^\infty \in \ell_m^1(\mathbb{Z}_+)$ e di $(\ell_i)_{i=-\infty}^0 \in \ell_m^1(\mathbb{Z}_-)$ tali che

$$\hat{a}_+(z)^{-1} = \sum_{i=0}^\infty z^i \ell_i, \qquad \hat{a}_-(z)^{-1} = \sum_{i=-\infty}^0 z^i u_i.$$

Sostituendo (1.3) in (1.2) e moltiplicando dalla sinistra per $\hat{a}_-(z)^{-1}$ arriviamo all'uguaglianza

$$\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) + \hat{a}_-(z)^{-1}\hat{x}_-(z) = \hat{x}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{1.4}$$

dove

$$\begin{aligned}\hat{x}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z) &= \sum_{i=-\infty}^\infty z^i \left[\sum_{j=-\infty}^\infty u_{i-j} b_j\right] \\ &= \sum_{i=0}^\infty z^i \left[\sum_{j=i}^\infty u_{i-j} b_j\right] + \sum_{i=-\infty}^{-1} z^i \left[\sum_{j=0}^\infty u_{i-j} b_j\right].\end{aligned} \tag{1.5}$$

Separando (1.4) in un termine analitico nel disco unitario e un termino analitico fuori del disco unitario e nullo all'infinito, si trovano

$$\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) = \sum_{i=0}^\infty z^i \left[\sum_{j=i}^\infty u_{i-j} b_j\right], \quad \hat{a}_-(z)^{-1}\hat{x}_-(z) = \sum_{i=-\infty}^{-1} z^i \left[\sum_{j=0}^\infty u_{i-j} b_j\right].$$

Togliendo le trasformate di Fourier discrete si arriva all'espressione

$$x_i = \sum_{r=0}^{i} \ell_{i-r} \sum_{j=r}^{\infty} u_{r-j} b_j, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots . \tag{1.6}$$

Abbiamo dimostrato il seguente risultato [3].

Teorema 1.1 *Se il simbolo $\hat{a}(z)$ ha una fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica, allora per qualsiasi $(b_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell_m^1(\mathbb{Z}_+)$ il sistema di Toeplitz* (1.1) *ha la soluzione unica*

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{i,j} b_j, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots , \tag{1.7}$$

in $\ell_m^1(\mathbb{Z}_+)$, dove

$$\gamma_{i,j} = \sum_{r=0}^{\min(i,j)} \ell_{i-r} u_{r-j}.$$

Il teorema è stato dimostrato soltanto per $p = 1$, ma la formula risolvente (1.7) ci dà una soluzione unica $(x_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell_m^p(\mathbb{Z}_+)$ per qualsiasi $(b_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell_m^p(\mathbb{Z}_+)$.

2 Sistemi di equazioni di Wiener-Hopf

Consideriamo ora l'equazione integrale di Wiener-Hopf

$$f(t) - \int_0^{\infty} k(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = g(t), \qquad 0 < t < \infty, \tag{2.1}$$

dove $f, g \in L_m^p(0, \infty)$ per qualche $p \geq 1$ e $k \in L_{m\times m}^1(\mathbb{R})$. Quest'equazione si può anche scrivere nella forma

$$f_r(t) - \sum_{s=1}^{m} \int_0^{\infty} k^{r,s}(t-\tau) f_s(\tau)\, d\tau = g_r(t), \qquad 0 < t < \infty,$$

dove $r = 1, \cdots , m$.

Estendiamo l'equazione (2.1) a tutta la retta reale, ponendo

$$f(t) = \int_0^{\infty} k(t-s) f(s)\, ds, \qquad g(t) = 0,$$

per $t < 0$. Allora $f \in L^p_m(\mathbb{R})$. Introducendo le trasformate di Fourier

$$\begin{cases} \hat{f}_+(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda t} f(t), & \hat{f}_-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} f(t)\, dt, \\ \hat{g}_+(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda t} g(t)\, dt, & \hat{k}(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda t} k(t)\, dt, \end{cases}$$

arriviamo al problema di Riemann-Hilbert

$$\left[I_m - \hat{k}(\lambda) \right] \hat{f}_+(\lambda) + \hat{f}_-(\lambda) = \hat{g}_+(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

dove I_m è la matrice unità di ordine m. Supponiamo ora che esista una cosiddetta *fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica*

$$I_m - \hat{k}(\lambda) = W_-(\lambda) W_+(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

dove i fattori $W_\pm(\lambda)$ hanno le seguenti proprietà:

(a) Esistono le funzioni $w_+ \in L^1_{m\times m}(0, \infty)$ e $w_- \in L^1_{m\times m}(-\infty, 0)$ tali che

$$W_+(\lambda) = I_m - \int_0^\infty e^{i\lambda t} w_+(t)\, dt, \qquad W_-(\lambda) = I_m - \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} w_-(t)\, dt;$$

dunque, $W_+(\lambda)$ è continua in $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, tende ad I_m se $\lambda \to \infty$ nel semipiano superiore chiuso ed è analitica in $\operatorname{Im}\lambda > 0$, e $W_-(\lambda)$ è continua in $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$, tende ad I_m se $\lambda \to \infty$ nel semipiano inferiore chiuso ed è analitica in $\operatorname{Im}\lambda < 0$;

(b) $\det W_+(\lambda) \neq 0$ nel semipiano superiore chiuso e $\det W_-(\lambda) \neq 0$ nel semipiano inferiore chiuso.

Il Teorema di Wiener (vedi l'appendice) implica l'esistenza di funzioni $\gamma_+ \in L^1_{m\times m}(0, \infty)$ e $\gamma_- \in L^1_{m\times m}(-\infty, 0)$ tali che

$$W_+(\lambda)^{-1} = I_m + \int_0^\infty e^{i\lambda t} \gamma_+(t)\, dt, \quad W_-(\lambda)^{-1} = I_m + \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} \gamma_-(t)\, dt.$$

Sostituendo (2.3) in (2.2) e premoltiplicando per $W_-(\lambda)^{-1}$ otteniamo

$$W_+(\lambda) \hat{f}_+(\lambda) + W_-(\lambda)^{-1} \hat{f}_-(\lambda) = W_-(\lambda)^{-1} \hat{g}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

dove

$$
\begin{aligned}
W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\left[g(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right] \\
&= \int_0^{\infty} e^{i\lambda t}\left[g(t) + \int_t^{\infty} \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right] dt \\
&+ \int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda t}\left[\int_0^{\infty} \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right] dt. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Separando (2.4) in un termine analitico nel semipiano superiore e un termine analitico nel semipiano inferiore, otteniamo

$$
\begin{aligned}
W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda) &= \int_0^{\infty} e^{i\lambda t}\left[g(t) + \int_t^{\infty} \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right], \\
W_-(\lambda)^{-1}\hat{f}_-(\lambda) &= \int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda t}\left[\int_0^{\infty} \gamma_-(t-s)g(s)\,ds\right] dt.
\end{aligned}
$$

Quindi for $t > 0$ troviamo (togliendo la trasformata di Fourier)

$$
\begin{aligned}
f(t) = g(t) &+ \int_t^{\infty} \gamma_-(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \\
&+ \int_0^{\infty} \gamma_+(t-s)\left[g(s) + \int_t^{\infty} \gamma_-(s-\tau)g(\tau)\,d\tau\right] ds. \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Abbiamo dimostrato il seguente risultato [3].

Teorema 2.1 *Se il simbolo $I_m - \hat{k}(\lambda)$ ha una fattorizzazione di Wiener-Hopf canonica del tipo* (2.2)*, allora per qualsiasi $g \in L^p_m(\mathbb{R})$ l'equazione di Wiener-Hopf* (2.1) *ha la soluzione unica $f \in L^p_m(\mathbb{R})$ data dall'espressione*

$$
f(t) = g(t) + \int_0^{\infty} \gamma(t,s)g(s)\,ds, \qquad t > 0, \tag{2.7}
$$

dove

$$
\gamma(t,s) = \begin{cases} \gamma_+(t-s) + \displaystyle\int_0^s \gamma_+(t-\tau)\gamma_-(\tau-s)\,d\tau, & t > s > 0, \\ \gamma_-(t-s) + \displaystyle\int_0^t \gamma_+(t-\tau)\gamma_-(\tau-s)\,d\tau, & s > t > 0. \end{cases} \tag{2.8}
$$

Il teorema è stato dimostrato soltanto per $p = 1$, ma la formula risolvente (2.7) ci dà una soluzione $f \in L^p_m(\mathbb{R})$ per qualsiasi $g \in L^p_m(\mathbb{R})$.

3 Fattorizzazioni di Wiener-Hopf

Sia Γ una curva chiusa, semplice e rettificabile nella sfera di Riemann (cioè, nel piano complesso più il punto all'infinito) con un orientamento che divide il piano complesso esteso in un aperto Ω_+ e un aperto Ω_- tali che $\Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Gamma = \mathbb{C}_\infty$ è una partizione della sfera di Riemann. Supponiamo che Ω_+ si trovi alla sinistra di Γ e Ω_- alla destra di Γ. Si vede subito che Γ e $\overline{\Omega_\pm} = \Omega_\pm \cup \Gamma$ sono sottoinsiemi compatti della sfera di Riemann. Per esempio, $\Gamma = \mathbb{T}$, $\Omega_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e $\Omega_- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Oppure: $\Gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\Omega_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda > 0\}$ e $\Omega_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \lambda < 0\}$.

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Banach di funzioni a valori matriciali $m \times m$ sulla curva Γ tale che

$$\max_{z \in \Gamma} \|f(z)\| \leq \|f\|_{\mathcal{A}}, \qquad f \in \mathcal{A}. \tag{3.1}$$

Allora $\mathcal{A}$ si dice R-*algebra* sulla curva Γ se l'insieme di tutte le funzioni razionali (cioè, matrici $m \times m$ i cui elementi sono funzioni razionali) con poli fuori della curva Γ è denso in $\mathcal{A}$. Ora scegliamo due punti fissi: $\omega_\pm \in \Omega_\pm$[3].

Teorema 3.1 *Sia $\mathcal{A}$ una R-algebra di funzioni continue a valori matriciali $m \times m$ sulla curva chiusa, semplice, rettificabile e orientata Γ in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, e siano $\omega_\pm \in \Omega_\pm$. Se l'algebra $\mathcal{A}$ si scompone nella somma diretta*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \dot{+} \mathcal{A}_-, \tag{3.2}$$

dove $\mathcal{A}_+$ è l'algebra di tutte le funzioni $W \in \mathcal{A}$ a valori matriciali che hanno un'estensione ad una funzione continua in $\overline{\Omega_+}$ e analitica in Ω_+ e $\mathcal{A}_-$ è l'algebra di tutte le funzioni $W \in \mathcal{A}$ a valori matriciali che hanno un'estensione ad una funzione continua in $\overline{\Omega_-}$, analitica in Ω_- e zero in ω_-, allora ogni $W \in \mathcal{A}$ tale che $\det W$ non si annulla in Γ, si può fattorizzare nella forma

$$W(z) = W_-(z) D(z) W_+(z), \qquad z \in \Gamma, \tag{3.3}$$

dove i fattori hanno le seguenti proprietà:

(a) *W_+ è continua in $\overline{\Omega_+}$ e analitica in Ω_+ e $\det W_+$ non si annulla in $\overline{\Omega_+}$;*

(b) *W_- è continua in $\overline{\Omega_-}$ e analitica in Ω_- e $\det W_-$ non si annulla in $\overline{\Omega_-}$;*

(c) *W_+ e W_+^{-1} appartengono a $\mathcal{A}_+$;*

[3] Se $\Gamma = \mathbb{T}$, si scelgono $\omega_+ = 0$ e $\omega_- = \infty$. Se $\Gamma = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, si scelgono $\omega_\pm = \pm i$.

(d) $W_-(\cdot) - W_-(\omega_-)$ *e* $W_-(\cdot)^{-1} - W_-(\omega_-)^{-1}$ *appartengono a* $\mathcal{A}_-$*;*

(e) *esistono numeri interi* $\kappa_1, \cdots, \kappa_m$ *tali che* $D(z)$ *è la matrice diagonale*

$$D(z) = \textit{diag}\left(\left(\frac{z-\omega_+}{z-\omega_-}\right)^{\kappa_j}\right)_{j=1}^{m}. \tag{3.4}$$

Una fattorizzazione di $W \in \mathcal{A}$ del tipo (3.3) si dovrebbe chiamare *fattorizzazione di Wiener-Hopf* **destra**. Una *fattorizzazione di Wiener-Hopf sinistra* di $W \in \mathcal{A}$ sarebbe una rappresentazione di W nella forma

$$W(z) = W_+(z)D(z)W_-(z), \qquad z \in \Gamma, \tag{3.5}$$

dove i fattori hanno le proprietà enunciate nel Teorema 3.1. Le fattorizzazioni di Wiener-Hopf destra e sinistra della stessa funzione $W \in \mathcal{A}$ a valori matriciali possono essere completamente diverse, avendo altri fattori W_+ e W_- e altri cosiddetti *indici parziali* $\kappa_1, \cdots, \kappa_m$ nel fattore diagonale D.

Se tutti gli indici parziali $\kappa_1, \cdots, \kappa_m$ in (3.3) si annullano, il fattore diagonale $D(z)$ si riduce alla matrice unità I_m. In tal caso la fattorizzazione (3.3) si dice *canonica* (*destra*). In modo simile si definisce la fattorizzazione canonica sinistra. Esistono funzioni a valori matriciali che hanno una fattorizzazione canonica destra ma non hanno alcuna fattorizzazione canonica sinistra.

Dimostrazione. Supponiamo che la curva Γ non passi per l'infinito. Nel caso contrario, si può sempre applicare una trasformazione di Möbius a tutte le funzioni a valori matriciali per ridurre il teorema al caso in cui Γ è compatta, Ω_+ è limitato e $\infty \in \Omega_-$. Applicando una traslazione se è necessario, potremmo assumere che $0 \in \Omega_+$ e $\infty \in \Omega_-$. Così semplifichiamo il fattore diagonale in (3.4) a $D(z) = \mathrm{diag}(z^{\kappa_1}, \cdots, z^{\kappa_m})$.

Sia $R(z)$ una funzione razionale a valori matriciali senza poli né zeri (cioè, poli di $R(z)^{-1}$) su Γ tale che la funzione a valori matriciali $B = [W - R]R^{-1} = WR^{-1} - I_m$ verifica la stima

$$\|B\|_{\mathcal{A}} < \frac{1}{\max(\|P\|, \|I-P\|)},$$

dove P è la proiezione di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}_+$ lungo $\mathcal{A}_-$. Tale R esiste, poiché $\mathcal{A}$ è una R-algebra. Allora

$$W(z)R(z)^{-1} = B_-(z)B_+(z), \qquad z \in \Gamma,$$

dove $B_+, B_+^{-1} \in \mathcal{A}_+$ e $B_-(\cdot) - B_-(\infty), B_-(\cdot)^{-1} - B_-(\infty)^{-1} \in \mathcal{A}_-$.

Fattorizziamo $R(z)$:

$$R(z) = \varphi(z)S(z),$$

dove $S(z)$ è una funzione razionale a valori matriziali che ha tutti i suoi poli e zeri fuori di $\overline{\Omega_+} = \Omega_+ \cup \Gamma$, e $\varphi(z)$ è una funzione razionale scalare, ovviamente senza poli e zeri su Γ. Quindi

$$\varphi(z) = \varphi_-(z) z^\kappa \varphi_+(z),$$

dove $\varphi_\pm(z)$ ha tutti i suoi poli e zeri in $\Omega_\mp$ e κ è l'indice di φ rispetto alla curva Γ. Possiamo ora rappresentare W nella forma

$$W(z) = z^\kappa \varphi_-(z) B_-(z) B_+(z) S(z) \varphi_+(z), \tag{3.6}$$

dove $Y(z) = B_+(z)S(z)\varphi_+(z)$ rappresenta un elemento dell'algebra $\mathcal{A}$ che è continuo in $z \in \Omega_+ \cup \Gamma$ e è analitico in $z \in \Omega_+$. Se $Y \in \mathcal{A}$ avesse una fattorizzazione di Wiener-Hopf destra

$$Y(z) = Y_-(z)\tilde{D}(z)Y_+(z),$$

dove $Y_+, Y_+^{-1} \in \mathcal{A}_+$, $Y_-, Y_-^{-1} \in \mathcal{A}_-$ e $\tilde{D}(z) = \mathrm{diag}(z^{\ell_1}, \cdots, z^{\ell_m})$ per certi numeri interi $\ell_1, \cdots, \ell_m$, risulterebbe una fattorizzazione di Wiener-Hopf destra di W del tipo (3.3), dove $W_-(z) = \varphi_-(z)B_-(z)Y_-(z)$, $W_+(z) = Y_+(z)$ e $D(z) = z^\kappa \tilde{D}(z)$ (e quindi $\kappa_j = \ell_j + \kappa$ per $j = 1, \cdots, m$). Quindi resta da dimostrare il teorema per $W \in \mathcal{A}_+$.

Sia $W \in \mathcal{A}_+$ un elemento invertibile di $\mathcal{A}$. Se esiste la fattorizzazione di Wiener-Hopf (3.3) e $\kappa_j < 0$, allora

$$W(z)W_+(z)^{-1}e_j = W_-(z)D(z)e_j = z^{\kappa_j}W_-(z)e_j, \qquad z \in \Gamma, \tag{3.7}$$

dove e_j è l'elemento j-esimo della base canonica di $\mathbb{C}^m$. Secondo il Teorema di Liouville, le due parti di (3.7) sono uguali allo stesso vettore costante; questo vettore è lo zero, poiché $z^{\kappa_j} \to 0$ se $z \to \omega_- = \infty$. Siccome $\det W(z)W_+(z)^{-1} \neq 0$ per $z \in \Omega_+ \cup \Gamma$, abbiamo raggiunto una contraddizione. In altre parole, tutti gli indici parziali di W sono non negativi[4].

Siano $\tau_1, \cdots, \tau_q$ gli zeri diversi di W in Ω_+ e siano $\ell_1, \cdots, \ell_q$ le loro molteplicità. Poniamo $\tau_q = 0$, e scriviamo $\ell_q = 0$ se $\det W(0) \neq 0$. Sia p_j il minimo delle moltiplicità di τ_1 come zero degli elementi della riga j-esima di $W(z)$

[4] Fino a questo punto, non abbiamo ancora dimostrato che gli indici parziali dipendono soltanto da W.

$(j = 1, \cdots, m)$. Allora $p_1 + \cdots + p_m \leq \ell_1$. Nel caso in cui $\sum_{j=1}^m p_j < \ell_1$, l'espressione

$$\det[(z-\tau_1)^{-p_j} W(z)_{j,k}]_{j,k=1}^m$$

si annulla per $z = \tau_1$. Ponendo $W(z) = \text{riga}(f_1(z), \cdots, f_m(z))$, esistono numeri complessi $c_1, \cdots, c_m$, non tutti uguali a zero, tali che

$$f(z) = \sum_{j=1}^m c_j (z-\tau_1)^{-p_j} f_j(z)$$

ha uno zero in $z = \tau_1$. Scegliendo $c_r \neq 0$ tale che $p_r \leq p_j$ nel caso in cui $c_j \neq 0$, consideriamo la matrice

$$E_r(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \frac{c_1}{(z-\tau_1)^{p_1-p_r}} & \cdots & & c_r & & \cdots & \frac{c_m}{(z-\tau_1)^{p_m-p_r}} \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

dove $\det E_r(z) = c_r \neq 0$ per $z = \tau_1$. Ora vediamo che $E_r(z)W(z)$ viene ottenuto da $W(z)$ sostituendo $(z-\tau_1)^{p_r} f(z)$ al posto della sua riga r-esima. Inoltre, $\det(E_r(z)W(z))$ e $W(z)$ hanno gli stessi zeri in Ω_+, anche con le stesse moltiplicità. Purtroppo, il minimo delle moltiplicità di τ_1 come zero degli elementi della riga j-esima si è cambiata da p_j a $\hat{p}_j$, dove $\hat{p}_j = p_j$ per $j \neq r$ e $\hat{p}_r > p_r$. Applicando la stessa procedura un numero finito, l, di volte, si arriva ad una funzione $\tilde{W} = E^{(l)} \cdots E^{(1)} W$ per cui $\sum_{j=1}^m = \ell_1$.

Supponiamo ora che W abbia la proprietà $\sum_{j=1}^m p_j = \ell_1$. Sia

$$F_1(z) = \text{diag}\left(\left(\frac{z}{z-\tau_1}\right)^{p_j}\right)_{j=1}^m.$$

Allora $F_1 W$ appartiene a $\mathcal{A}_+$, ma adesso gli zeri di $\det(F_1(z)W(z))$ in Ω_+ sono $\tau_2, \cdots, \tau_q$ con le moltiplicità rispettive $\ell_2, \cdots, \ell_{q-1}, \ell_q + \ell_1$. Ora applichiamo la stessa procedura come prima, ma per τ_2. Il risultato è $F_2 F_1 W \in \mathcal{A}_+$, dove gli zeri di $\det(F_2(z)F_1(z)W(z))$ sono $\tau_3, \cdots, \tau_q$ con le moltiplicità rispettive $\ell_3, \cdots, \ell_{q-1}, \ell_q + \ell_1 + \ell_2$. Proseguendo così arriviamo ad una funzione a valori matriciali $F_{q-1}\cdots F_1 W$ il cui determinante ha zero come il suo unico zero in Ω_+, di moltiplicità $\ell_1+\cdots+\ell_q$. Inoltre, $F_{q-1}(z)\cdots F_1(z)$ è una matrice diagonale. Questa funzione a valori matriciale $\tilde{W}(z)$ è non singolare per ogni $0\neq z\in\Omega_+$; inoltre, se κ_j è il minimo delle moltiplicità di zero come zero degli elementi della riga j-esima ($j=1,\cdots,m$), allora $\kappa_1+\cdots+\kappa_m$ è la moltiplicità di zero come zero di $\det\tilde{W}(z)$. Ovviamente, si ha la fattorizzazione di Wiener-Hopf destra

$$\tilde{W}(z)=\text{diag}(z^{\kappa_1},\cdots,z^{\kappa_m})\tilde{W}_+(z),$$

dove $\tilde{W}_+,\tilde{W}_+^{-1}\in\mathcal{A}_+$. Osserviamo ora che tutti i fattori precedenti $F_s(z)$ e $E_r(z)$ e le loro inverse appartengono a $\mathcal{A}_-$, poiché hanno soltanto poli e zeri in Ω_+. Infine si ottiene la fattorizzazione (3.3), dove W_-^{-1} è il prodotto di tutti i fattori precedenti F_s e E_r, $W_+=\tilde{W}_+$ e $D(z)=\text{diag}(z^{\kappa_1},\cdots,z^{\kappa_m})$.

Ciò conclude la dimostrazione. □

Non è tanto facile dimostrare che gli indici parziali destri vengono determinati completamente della funzione a valori matriciali W. Consideriamo la situazione in cui Γ è compatta, $\omega_+=0\in\Omega_+$ e $\omega_-=\infty\in\Omega_-$.

Teorema 3.2 *Supponiamo che $W\in\mathcal{A}$ ha una fattorizzazione di Wiener-Hopf destra in $\mathcal{A}$. Allora gli indici parziali destri dipendono soltanto della funzione $W\in\mathcal{A}$.*

Lo stesso risultato vale per gli indici parziali sinistri.

Dimostrazione. Consideriamo il problema di Riemann-Hilbert

$$W(z)f_+(z)+f_-(z)=g(z),\qquad z\in\Gamma, \tag{3.8}$$

dove $f_+\in\mathcal{A}_+$, $f_-\in\mathcal{A}_-$ e $g\in\mathcal{A}$. Se W avesse una fattorizzazione canonica destra $W=W_-W_+$, allora risulterebbe

$$W_+(z)f_+(z)+W_-(z)^{-1}f_-(z)=W_-(z)^{-1}g(z),\qquad z\in\Gamma, \tag{3.9}$$

e quindi

$$f_+(z)=W_+(z)^{-1}P[W_-(z)^{-1}g(z)],\quad f_-(z)=W_-(z)(I-P)[W_-(z)^{-1}g(z)],$$

dove P è la proiezione di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}_+$ lungo $\mathcal{A}_-$. Quindi il problema di Riemann-Hilbert (3.8) ha una singola soluzione $(f_+,f_-)\in\mathcal{A}_+\times\mathcal{A}_-$ se W ha una fattorizzazione canonica.

Sia P_j la matrice diagonale di ordine m che ha un singolo elemento diverso da zero: l'elemento 1 nella posizione (j, j). Supponiamo che W ha la fattorizzazione di Wiener-Hopf (3.3) con il fattore diagonale $D(z) = \text{diag}(z^{\kappa_1}, \cdots, z^{\kappa_m})$. Allora, al posto di (3.9), risulta

$$z^{\kappa_j} P_j W_+(z) f_+(z) + P_j W_-(z)^{-1} f_-(z) = P_j W_-(z)^{-1} g(z), \qquad z \in \Gamma, \quad (3.10)$$

Se $\kappa_j \geq 0$, otteniamo

$$z^{\kappa_j} P_j W_+(z) f_+(z) = P[P_j g(z)], \quad P_j W_-(z) f_-(z) = (I - P)[P_j g(z)].$$

dove $j = 1, \cdots, m$; per avere almeno una soluzione, lo zero deve essere uno zero di $P[P_j g(z)]$ di moltiplicità almeno κ_j.

Se $\kappa_j = -|\kappa_j| < 0$, scriviamo

$$P_j W_+(z) f_+(z) = \sum_{s=0}^{|\kappa_j|-1} z^s c_s + O(z^{|\kappa_j|}), \qquad z \to 0,$$

dove c_s ($s = 0, 1, \cdots, |\kappa_j| - 1$) sono matrici costanti. In tal caso si ha

$$P_j W_+(z) f_+(z) = \sum_{s=0}^{|\kappa_j|-1} z^s c_s + z^{|\kappa_j|} P[P_j W_-(z)^{-1} g(z)],$$
$$P_j W_-(z)^{-1} f_-(z) = -\sum_{s=0}^{|\kappa_j|-1} z^{s-|\kappa_j|} c_s + (I - P)[P_j W_-(z)^{-1} g(z)].$$

Siamo arrivati alle seguenti conclusioni:

(a) Ci vogliono $\sum\{\kappa_j > 0\}$ condizioni indipendenti sul termine noto $g(z)$ per garantire l'esistenza di almeno una soluzione di (3.8);

(b) Ci sono $-\sum\{\kappa_j < 0\}$ soluzioni linearmente indipendenti del corrispondente problema di Riemann-Hilbert omogeneo.

In altre parole, la somma degli indici positivi e la somma degli indici negativi sono invarianti della funzione a valori matriciali W che non dipendono della scelta della fattorizzazione di Wiener-Hopf. Chiamiamo queste somme (in valore assoluto) $P(W)$ e $N(W)$.

È facile dimostrare che gli indici di $z^{-r}W$ vengono spostati rispetto a quelli di W da r: Se gli indici di W sono $\kappa_1, \cdots, \kappa_m$, quelli di $z^{-r}W$ sono $\kappa_1 - r, \cdots, \kappa_m - r$. Inoltre,

$$N(z^{-r}W) = \sum\{\kappa_j > r\}, \qquad P(z^{-r}W) = \sum\{\kappa_j < r\}.$$

Anche questi ultimi numeri sono invarianti di W. Infine si vede facilmente che anche il numero degli indici che è uguale a r, è un invariante di W. Infatti,

$$\#\{\kappa_j = r\} = m - N(z^{-r}W) - P(z^{-r}W).$$

$\square$

4 Sistemi di Toeplitz a blocchi e condizioni sufficienti per la fattorizzabilità canonica

In questo paragrafo studiamo l'equazione di Toeplitz a blocchi (1.1) ricondotta al problema di Riemann-Hilbert (1.2). Sotto la condizione che $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \ell^1_{m\times m}(\mathbb{Z})$ e $\det \hat{a}(z) \neq 0$ per $z \in \mathbb{T}$, esiste la fattorizzazione di Wiener-Hopf

$$\hat{a}(z) = \hat{a}_-(z) D(z) \hat{a}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{4.1}$$

dove

$$\hat{a}_+(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i w_i^+, \tag{4.2}$$

$$\hat{a}_-(z) = \sum_{i=-\infty}^{0} z^i w_i^-, \tag{4.3}$$

$$D(z) = \text{diag}(z^{\kappa_1}, \cdots, z^{\kappa_m}), \tag{4.4}$$

$\kappa_1, \cdots, \kappa_m$ sono gli indici parziali destri, $(w_i^+)_{i=0}^{\infty} \in \ell^1_{m\times m}(\mathbb{Z}_+)$, $(w_i^-)_{i=-\infty}^{0} \in \ell^1_{m\times m}(\mathbb{Z}_-)$. Inoltre,

$$\hat{a}_+(z)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \ell_i, \tag{4.5}$$

$$\hat{a}_-(z)^{-1} = \sum_{i=-\infty}^{0} z^i u_i, \tag{4.6}$$

dove $(\ell_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell^1_{m\times m}(\mathbb{Z}_+)$ e $(u_i)_{i=-\infty}^{0} \in \ell^1_{m\times m}(\mathbb{Z}_-)$.

Teorema 4.1 *Supponiamo che il simbolo dell'equazione di Toeplitz a blocchi* (1.1) *abbia la fattorizzazione di Wiener-Hopf destra* (4.1) *con gli indici parziali destri* $\kappa_1, \cdots, \kappa_m$. *Allora*

(a) *La corrispondente equazione omogenea ha* $-\sum\{\kappa_j < 0\}$ *soluzioni linearmente indipendenti,*

(b) *Esiste almeno una soluzione di* (1.1) *se e solo se il termine noto verifica* $\{\kappa_j > 0\}$ *condizioni linearmente indipendenti.*

I risultati valgono qualunque sia lo spazio $\ell_m^p(\mathbb{Z}_+)$ *in cui viene studiata l'equazione* (1.1).

Dimostrazione. Sostituendo (4.1) in (1.2) otteniamo

$$D(z)\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) + \hat{a}_-(z)^{-1}\hat{x}_-(z) = \hat{a}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}.$$

Premoltiplicando per $P_j = \text{diag}(\delta_{i,j})_{i=1}^m$ risultano le equazioni

$$z^{\kappa_j} P_j\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) + P_j\hat{a}_-(z)^{-1}\hat{x}_-(z) = P_j\hat{a}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z), \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{4.7}$$

dove $j = 1, \cdots, m$. Seguendo il metodo della dimostrazione del Teorema 3.2 troviamo

$$P_j\hat{a}_+(z)\hat{x}_+(z) = \begin{cases} P[P_j\hat{a}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z)], & \kappa_j = 0, \\ z^{-\kappa_j} P[P_j\hat{a}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z)], & \kappa_j > 0, \\ z^{|\kappa_j|} P[P_j\hat{a}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z)] + \displaystyle\sum_{s=0}^{|\kappa_j|-1} z^j c_s^j, & \kappa_j < 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

dove P è la proiezione di $\ell_m^p(\mathbb{Z})$ su $\ell_m^p(\mathbb{Z}_+)$ lungo $\ell_m^p(-\mathbb{N})$, l'espressione per $\kappa_j > 0$ vale soltanto se $P[P_j\hat{a}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z)]$ ha uno zero di ordine almeno κ_j in $z = 0$ e c_s^j ($s = 1, \cdots, \max(-\kappa_j, 0)$, $j = 1, \cdots, m$) sono costanti arbitrarie. Siccome P e P_j commutano tra loro, otteniamo (calcolando la somma e premoltiplicando per $\hat{a}_+(z)^{-1}$)

$$\hat{x}_+(z) = \hat{a}_+(z)^{-1}D(z)^{-1}P[\hat{a}_-(z)^{-1}\hat{b}_+(z)] + \hat{a}_+(z)^{-1}\sum_{\kappa_j<0}\sum_{s=0}^{|\kappa_j|-1} z^s c_s^j e_j, \tag{4.9}$$

dove e_j è l'elemento j-esimo della base canonica in $\mathbb{C}^m$. Osservando che la parte a destra di (4.9) è la trasformata di Fourier discreta di un elemento in $\ell_m^p(\mathbb{Z}_+)$ se $(b_i)_{i=0}^\infty \in \ell_m^1(\mathbb{Z}_+)$, si conclude la dimostrazione. $\square$

Corollario 4.2 *Supponiamo che il simbolo dell'equazione di Toeplitz a blocchi* (1.1) *abbia la fattorizzazione di Wiener-Hopf destra* (4.1). *Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti tra loro:*

- (a) *Il simbolo ha una fattorizzazione canonica destra in* $\ell^1_{m\times m}(\mathbb{Z})$.
- (b) *Per ogni* $p \geq 1$ *l'equazione* (1.1) *ha la soluzione unica in* $\ell^p_m(\mathbb{Z}_+)$ *per qualsiasi* $(b_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell^p_m(\mathbb{Z}_+)$.
- (c) *Esiste* $p \geq 1$ *tale che l'equazione* (1.1) *ha la soluzione unica in* $\ell^p_m(\mathbb{Z}_+)$ *per qualsiasi* $(b_i)_{i=0}^{\infty} \in \ell^p_m(\mathbb{Z}_+)$.

È molto utile analizzare l'equazione (1.1) in $\ell^2_m(\mathbb{Z}_+)$. In tal caso l'equazione (1.1) ha la forma

$$\boldsymbol{T}_a(x_i)_{i=0}^{\infty} = (b_i)_{i=0}^{\infty}, \qquad \boldsymbol{T}_a = \pi_+\mathcal{F}^{-1}M_a\mathcal{F}\imath_+, \tag{4.10}$$

dove $\imath_+$ è l'immersione naturale di $\ell^2_m(\mathbb{Z}_+)$ in $\ell^2_m(\mathbb{Z})$ (un'isometria), $\mathcal{F}$ è la trasformata di Fourier discreta (un'isometria da $L^2_m(\mathbb{T}; dz/2\pi)$ su $\ell^2_m(\mathbb{Z})$), M_a è l'operatore di premoltiplicazione per $\hat{a}(\cdot)$, F^{-1} è la trasformata di Fourier discreta inversa (un'isometria da $\ell^2_m(\mathbb{Z})$ su $L^2_m(\mathbb{T}; dz/2]pi)$), e π_+ è la proiezione ortogonale da $\ell^2_m(\mathbb{Z})$ su $\ell^2_m(\mathbb{Z}_+)$ (che ha norma 1). Di conseguenza, come operatore su $\ell^2_m(\mathbb{Z}_+)$ abbiamo la stima importante

$$\|\boldsymbol{T}_a\| \leq \|\pi_+\|\,\|M_a\|\,\|\imath_+\| = \|M_a\| = \max_{z\in\mathbb{T}} \|\hat{a}(z)\|, \tag{4.11}$$

dove $\|\hat{a}(z)\|$ è la norma spettrale della matrice $m \times m$ $\hat{a}(z)$.

Teorema 4.3 *Supponiamo che il simbolo dell'equazione di Toeplitz a blocchi* (1.1) *abbia la fattorizzazione di Wiener-Hopf destra* (4.1). *Allora il simbolo ha una fattorizzazione canonica destra se si verifica una delle seguenti condizioni sufficienti:*

- (a) $\max_{z\in\mathbb{T}} \|I_m - \hat{a}(z)\| < 1$, *dove la norma delle matrici di ordine* m *è quella spettrale.*
- (b) $\hat{a}(z)$ *è una matrice positiva e autoaggiunta per ogni* $z \in \mathbb{T}$, *cioè, esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che*

$$\langle \hat{a}(z)x, x\rangle \geq \varepsilon\|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{C}^m,\ z \in \mathbb{T}.$$

(c) $\hat{a}(z)$ *è una matrice con parte reale positiva e autoaggiunta per ogni* $z \in \mathbb{T}$*, cioè, esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che*

$$\textit{Re}\, \langle \hat{a}(z)x, x\rangle \geq \varepsilon \|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{C}^m,\ z \in \mathbb{T}.$$

Un risultato analogo vale per le fattorizzazioni di Wiener-Hopf sinistre. In tal caso, bisogna collegarli alla risolubilità dell'equazione di Toeplitz a blocchi

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{j-i} x_j = b_i, \qquad i = 0, 1, 2, \cdots . \tag{4.12}$$

Osserviamo che il simbolo di quest'equazione è uguale a $\hat{a}(1/z)$.

Dimostrazione. È sufficiente studiare la corrispondente equazione di Toeplitz a blocchi (1.1) in $\ell^2_m(\mathbb{Z}_+)$.

Se si verifica la condizione (a), allora la stima (4.11) implica che la norma dell'operatore $I - \boldsymbol{T}_a$ sullo spazio di Hilbert $\ell^2_m(\mathbb{Z}_+)$ è strettamente minore di 1. Di conseguenza, $\boldsymbol{T}_a$ è invertibile su $\ell^2_m(\mathbb{Z}_+)$. Secondo il Corollario 4.2, esiste la fattorizzazione canonica destra del simbolo.

Se si verifica la condizione (c), allora

$$\frac{\langle \hat{a}(z)x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq \varepsilon,\ |z| \leq M\}, \qquad 0 \neq x \in \mathbb{C}^m,$$

dove $M = \max_{w \in \mathbb{T}} \|\hat{a}(w)\|$. Segue facilmente che per ogni tale z si ha $|1 - cz| < 1$ se $0 < c < (2\varepsilon/M^2)$. In altre parole, $I - c\boldsymbol{T}_a$ ha la norma minore da 1 su $\ell^2_m(\mathbb{Z}_+)$ se $0 < c < (2\varepsilon/M^2)$. Quindi la funzione a valori matriciali $c\hat{a}(z)$ ha una fattorizzazione canonica destra se $0 < c < (2\varepsilon/M^2)$. Siccome il fattore costante $c > 0$ non influisce sulla fattorizzabilità canonica, anche $\hat{a}(z)$ ha una fattorizzazione canonica destra.

Se si verifica la condizione (b), si verifica anche la condizione (b). Dunque ne consegue la fattorizzabilità canonica del simbolo. □

5 Equazioni di Wiener-Hopf e condizioni sufficienti per la fattorizzabilità canonica

Nel paragrafo 5 studiamo l'equazione integrale di Wiener-Hopf a blocchi (2.1), dove $k \in L^1_{m\times m}(\mathbb{R})$ e si verifica la condizione (2.3). Quest'equazione si riduce al problema di Riemann-Hilbert (2.8). Siccome esiste la fattorizzazione di Wiener-Hopf

$$I_m - \hat{k}(\lambda) = W_-(\lambda)D(\lambda)W_+(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

dove

$$D(\lambda) = \text{diag}\left(\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\kappa_j}\right)_{j=1}^{m},$$

si può mettere (2.8) nella forma

$$\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\kappa_j} P_j W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda) + P_j W_-(\lambda)^{-1}\hat{f}_-(\lambda) = P_j W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}_+(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

dove $P_j = \text{diag}(\delta_{i,j})_{i=1}^m$. Seguendo il metodo della dimostrazione del Teorema 3.2, si ottiene per $j = 1, \cdots, m$

$$\begin{aligned} &P_j W_+(\lambda)\hat{f}_+(\lambda) \\ &= \begin{cases} P[P_j W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}_+(\lambda)], & \kappa_j = 0, \\ \left(\dfrac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^{\kappa_j} P[P_j W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}_+(\lambda)], & \kappa_j > 0, \\ \left(\dfrac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{|\kappa_j|} P[P_j W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}_+(\lambda)] + \displaystyle\sum_{s=0}^{|\kappa_j|-1} \left(\dfrac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{s} c_s^j, & \kappa_j < 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{5.3}$$

dove P è la proiezione di $L_m^p(\mathbb{R})$ su $L_m^p(0, \infty)$ lungo $L_m^p(-\infty, 0)$, l'espressione per $\kappa_j > 0$ vale soltanto se $P[P_j W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}_+(\lambda)]$ ha uno zero di ordine almeno κ_j in $\lambda = i$, e le costanti c_s^j ($s = 1, \cdots, \max(-\kappa_j, 0)$) sono arbitrarie. Risulta

$$\begin{aligned} \hat{f}_+(\lambda) &= W_+(\lambda)^{-1}D(\lambda)^{-1}P[W_-(\lambda)^{-1}\hat{g}_+(\lambda)] \\ &\quad + W_+(\lambda)^{-1}\sum_{\kappa_j<0}\sum_{s=0}^{|\kappa_j|-1}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{s} c_s^j e_j, \end{aligned} \tag{5.4}$$

dove e_j è il vettore j-esimo della base canonica di $\mathbb{C}^m$.

I seguenti teoremi non vengono dimostrati. Le loro dimostrazioni sono completamente analoghe a quelle per l'equazione di Toeplitz a blocchi.

Teorema 5.1 *Supponiamo che il simbolo dell'equazione di Wiener-Hopf a blocchi* (2.1) *abbia la fattorizzazione di Wiener-Hopf destra* (5.1) *con gli indici parziali destri* $\kappa_1, \cdots, \kappa_m$. *Allora*

(a) *La corrispondente equazione omogenea ha* $-\sum\{\kappa_j < 0\}$ *soluzioni linearmente indipendenti,*

(b) *Esiste almeno una soluzione di* (2.1) *se e solo se il termine noto verifica* $\{\kappa_j > 0\}$ *condizioni linearmente indipendenti.*

I risultati valgono qualunque sia lo spazio $L^p_m(0,\infty)$ *in cui viene studiata l'equazione* (2.1)*.*

Lo stesso risultato vale per le fattorizzazioni di Wiener-Hopf sinistre. In tal caso bisogna collegarli all'equazione

$$f(t) - \int_0^\infty k(s-t)f(s)\,ds = g(t), \qquad t > 0, \tag{5.5}$$

il cui simbolo è uguale a $I_m - \hat{k}(-\lambda)$.

Corollario 5.2 *Supponiamo che il simbolo dell'equazione di Wiener-Hopf a blocchi* (2.1) *abbia la fattorizzazione di Wiener-Hopf destra* (5.1)*. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti tra loro:*

(a) *Il simbolo ha una fattorizzazione canonica destra in* $\mathbb{C}^{m\times m} \times L^1_{m\times m}(\mathbb{R})$*.*

(b) *Per ogni* $p \geq 1$ *l'equazione* (2.1) *ha la soluzione unica in* $L^p_m(0,\infty)$ *per qualsiasi* $g \in L^p_m(0,\infty)$*.*

(c) *Esiste* $p \geq 1$ *tale che l'equazione* (2.1) *ha la soluzione unica in* $L^p_m(0,\infty)$ *per qualsiasi* $g \in L^p_m(0,\infty)$*.*

Teorema 5.3 *Supponiamo che il simbolo dell'equazione di Wiener-Hopf a blocchi* (2.1) *abbia la fattorizzazione di Wiener-Hopf destra* (5.1)*. Allora il simbolo ha una fattorizzazione canonica destra se si verifica una delle seguenti condizioni sufficienti:*

(a) $\max_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\hat{k}(\lambda)\| < 1$*, dove la norma delle matrici di ordine* m *è quella spettrale.*

(b) $I_m - \hat{k}(\lambda)$ *è una matrice positiva e autoaggiunta per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*, cioè, esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che*

$$\langle [I_m - \hat{k}(\lambda)]x, x\rangle \geq \varepsilon\|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{C}^m,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) $I_m - \hat{k}(\lambda)$ *è una matrice con parte reale positiva e autoaggiunta per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*, cioè, esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che*

$$\mathit{Re}\,\langle [I_m - \hat{k}(\lambda)]x, x\rangle \geq \varepsilon\|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{C}^m,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

A Teoremi di Wiener

I seguenti teoremi generalizzano i teoremi di Wiener al caso matriciale.

Teorema A.1 *Sia* $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *una successione di matrici complesse di ordine* m *tale che* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty$*. Se* $\det \hat{x}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n x_n \neq 0$ *per ogni* $z \in \mathbb{T}$*, allora esiste una successione* $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *di matrici complesse di ordine* m *con* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\| < \infty$ *tale che* $\hat{y}(z) = \hat{x}(z)^{-1}$ *per ogni* $z \in \mathbb{T}$*.*

Dimostrazione. Per $r, s = 1, \cdots, m$, le successioni $(x_i^{r,s})_{i\in\mathbb{Z}}$ appartengono ad $\ell^1(\mathbb{Z})$. Inoltre, gli elementi della matrice cofattore di $\hat{x}(z)$ sono tutti prodotti finiti di elementi di $\hat{x}(z)$, tranne un fattore costante ± 1. Quindi gli elementi della matrice cofattore di $\hat{x}(z)$ sono tutti trasformate di Fourier discrete di $\pm$ prodotti convoluzione finiti di elementi di $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Quindi gli elementi della matrice cofattore di $\hat{x}(z)$ sono tutti trasformate di Fourier di successioni in $\ell^1(\mathbb{Z})$.

Siccome $\det \hat{x}(z)$ è la somma di $m!$ prodotti di $\pm$ il prodotto di m elementi di $\hat{x}(z)$, essa è la trasformata di Fourier discreta della somma di $m!$ prodotti convoluzione di m elementi della successione $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Quindi $\det \hat{x}(z)$ è la trasformata di Fourier discreta di una successione in $\ell^1(\mathbb{Z})$. Siccome $\det \hat{x}(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{T}$, esiste una successione in $\ell^1(\mathbb{Z})$ che ha $1/\det \hat{x}(z)$ come la sua trasformata di Fourier discreta, secondo il Teorema di Wiener nel caso scalare. Di consequenza, essendo il prodotto di $\det \hat{x}(z)$ e la matrice cofattore di $\hat{x}(z)$ l'inversa di $\hat{x}(z)$, ogni suo elemento è la trasformata di Fourier discreta di una successione in $\ell^1(\mathbb{Z})$.
$\square$

Teorema A.2 *Siano* c *una matrice complessa* $m \times m$ *e* $f \in L^1_{m\times m}(\mathbb{R})$*. Se* $\det c \neq 0$ *e* $\hat{w}(\lambda) = c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t)\, dt$ *è una matrice non singolare per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*, allora esiste* $g \in L^1_{m\times m}(\mathbb{R})$ *tale che*

$$\hat{w}(\lambda)^{-1} = \frac{1}{c} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} g(t)\, dt, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente. Si passi per la matrice cofattore e si applichi il Teorema di Wiener al determinante del simbolo.

Riferimenti bibliografici

[1] I.C. Gohberg and I.A. Feldman, *Convolution Equations and Projection Methods for their Solutions*, Transl. Math. Monographs, Vol. **41**, Amer. Math. Soc., Providence, 1974 [Nauka. Moscow, 1971, in Russian].

[2] I. Gohberg, S. Goldberg, and M.A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators*, Vol. I, Birkhäuser OT **49**, Basel-Boston, 1990.

[3] I.C. Gohberg and M.G. Krein, *Systems of integral equations on a half-line with kernels depending on the difference of arguments*, Uspekhi Matem. Nauk **13**(2), 3–72 (1959) (in Russian); Amer. Math. Soc. Transl., Series **2**, **14**, 217–287 (1960).