

V. SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

1. Trasformazioni Ortogonali. Sia $u = (u_1, u_2, u_3)$ una trasformazione delle variabili in \mathbb{R}^3 , dove $x = (x_1, x_2, x_3)$ sono le coordinate cartesiane, $u_j = u_j(x_1, x_2, x_3)$ ($j = 1, 2, 3$) sono funzioni di classe C^2 e la matrice Jacobiana è invertibile (per x in un aperto di \mathbb{R}^3). La trasformazione si dice *ortogonale* se le righe della matrice Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{bmatrix}$$

sono ortogonali. In altre parole, la trasformazione si dice ortogonale se

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l} = 0, \quad k \neq l.$$

Siccome J^{-1} è la matrice Jacobiana della trasformazione inversa, risulta la sua ortogonalità. Ponendo

$$h_k = \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_k} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad k = 1, 2, 3,$$

si vede facilmente che la matrice $\text{diag}(1/h_1, 1/h_2, 1/h_3) J$ è ortogonale (cioè, $U^{-1} = U^T$ e quindi $\det U \in \{-1, +1\}$). Dunque

$$|\det J| = h_1 h_2 h_3.$$

Esempio: Coordinate Cilindriche: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$. dove $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. Allora $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_z = 1$.

Esempio: Coordinate Sferiche: $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \varphi$, dove $r \geq 0$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Allora $h_r = 1$, $h_\varphi = r$, $h_\theta = r \sin \varphi$.

Esempio: Coordinate Ellittico-cilindriche (vedi [1]): $x = c \cosh u \cos v$, $y = c \sinh u \sin v$, $z = z$, dove $u > 0$, $v \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$. Allora

$$h_u = h_v = c \sqrt{\cosh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v}, \quad h_z = 1.$$

L'operatore di Laplace

$$\Delta = \nabla^2 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

si rappresenta nella seguente forma:

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right].$$

In coordinate cilindriche

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

In coordinate sferiche

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right).$$

Introducendo la nuova variabile $\xi = \cos \varphi \in [-1, 1]$ (tale che $d\xi = -\sin \varphi d\varphi$, $1 - \xi^2 = \sin^2 \varphi$) otteniamo

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 (1 - \xi^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 - \xi^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right).$$

Sostituendo una funzione $\psi = \psi(r, \theta)$ che non dipende da z nell'espressione per $\Delta\psi$ in coordinate cilindriche, si trova la formula per l'operatore di Laplace in coordinate polari:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}.$$

Infine, in coordinate ellittiche

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2 [\cosh^2 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cos^2 v]} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

2. Separazione in Coordinate Polari. Consideriamo l'equazione di Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2 \psi = 0$$

in due variabili (x, y) per $k \geq 0$ nel dominio

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq L \right\},$$

dove $L \in (0, +\infty)$. Ponendo

$$\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

dove $R(r)$ e $\Theta(\theta)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, L)$ e $\theta \in \mathbb{R}$ con $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, si trova

$$0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 = \frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{r^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + k^2,$$

oppure

$$\frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right] + k^2 r^2 + \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0.$$

L'espressione precedente è la somma costante di una funzione di r (che non dipende da θ) e una funzione di θ (che non dipende da r). Dunque i due termini devono essere costanti.

Proposizione 1 *Sia $\Theta(\theta)$ una funzione di classe C^2 , non banale, tale che*

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -C, \quad \Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta).$$

Allora $C = m^2$ per qualche $m = 0, 1, 2, \dots$ e

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \text{costante}, & m = 0 \\ \text{cost}_1 \cos m\theta + \text{cost}_2 \sin m\theta, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Dimostrazione. Per $C < 0$ si ha la soluzione generale

$$\Theta(\theta) = c_1 \cosh(\theta\sqrt{-C}) + c_2 \sinh(\theta\sqrt{-C}).$$

Sostituendo $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$ e le formule d'addizione

$$\begin{cases} \cosh(\alpha + \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta \\ \sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta, \end{cases}$$

risulta

$$\begin{aligned} & c_1 \cosh(\theta\sqrt{-C}) + c_2 \sinh(\theta\sqrt{-C}) \\ &= \left[c_1 \cosh(2\pi\sqrt{-C}) + c_2 \sinh(2\pi\sqrt{-C}) \right] \cosh(\theta\sqrt{-C}) \\ &+ \left[c_1 \sinh(2\pi\sqrt{-C}) + c_2 \cosh(2\pi\sqrt{-C}) \right] \sinh(\theta\sqrt{-C}), \end{aligned}$$

dove $\theta \in (0, 2\pi)$ è arbitrario. Quindi

$$\begin{bmatrix} 1 - \cosh(2\pi\sqrt{-C}) & -\sinh(2\pi\sqrt{-C}) \\ -\sinh(2\pi\sqrt{-C}) & 1 - \cosh(2\pi\sqrt{-C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

implicando $c_1 = c_2 = 0$, poichè il determinante del sistema $2(1 - \cosh(2\pi\sqrt{-C})) < 0$. D'altra parte, per $C > 0$ troviamo la soluzione generale

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(\theta\sqrt{-C}) + c_2 \sin(\theta\sqrt{-C}).$$

Nella stessa maniera risulta il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 - \cos(2\pi\sqrt{C}) & -\text{sen}(2\pi\sqrt{C}) \\ \text{sen}(2\pi\sqrt{C}) & 1 - \cos(2\pi\sqrt{C}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con determinante $2(1 - \cos(2\pi\sqrt{C}))$. Il determinante si annulla se e solo se $C = m^2$ per $m \in \mathbf{N}$. In tal caso tutti gli elementi della matrice si annullano e quindi le costanti c_1 e c_2 sono arbitrarie. Infine, per $C = 0$ troviamo la soluzione generale $\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta$. In tal caso $\Theta(\theta + 2\pi) \equiv \Theta(\theta)$ implica $c_2 = 0$. \square

Sostituendo $\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2$ per $m = 0, 1, 2, \dots$, otteniamo

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R(r) = 0$$

con le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R(L) = 0$. Se invece della condizione di Dirichlet $\psi|_{\partial D} \equiv 0$ si considera la condizione di Neumann $\frac{\partial\psi}{\partial n}|_{\partial D} \equiv 0$, risultano le condizioni al contorno $R(0^+)$ finito e $R'(L) = 0$.

Per $k = 0$ si trova l'equazione di Eulero $r^2R''(r) + rR'(r) - m^2R(r) = 0$ con soluzione generale

$$R(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \log r, & m = 0 \\ c_1 r^m + c_2 r^{-m}, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

La condizione che $R(0^+)$ sia finito, implica $c_2 = 0$. In tal caso $R(L) \neq 0$ per ogni $L > 0$, eccetto nel caso banale $c_1 = c_2 = 0$. Quindi per $k = 0$ non ci sono soluzioni non banali. Purtroppo, se studiamo l'equazione di Helmholtz con la condizione di Neumann, risulta la soluzione non banale costante se $m = 0$; per $m = 1, 2, 3, \dots$ non ci sono soluzioni non banali.

Per $k > 0$ si ponga $\rho = kr$. In tal caso risulta l'equazione di Bessel

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0.$$

Quest'equazione ha una singola soluzione linearmente indipendente limitata se $\rho \rightarrow 0^+$. Con un'opportuna normalizzazione questa soluzione si chiama $J_m(\rho)$, la cosiddetta funzione di Bessel di ordine m . Infatti $J_m(\rho)$ ha le seguenti proprietà: (i) $J_0(0) = 1$, $J_1(0) = J_2(0) = \dots = 0$, (ii) $J_m(\rho) \rightarrow 0$ se $\rho \rightarrow +\infty$, e (iii) $J_m(\rho)$ ha un numero infinito di zeri positivi: $0 < \nu_{m1} < \nu_{m2} < \dots$.¹ Ciò implica che $R(L) = 0$ se e solo se $kL = \nu_{mn}$ per qualche $n \in \mathbf{N}$. In altre parole, si trovano le autofrequenze $k_{mn} = \nu_{mn}/L$ ($m, n \in \mathbf{N}$).

Infine otteniamo la soluzione generale

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0\left(\nu_{0n} \frac{r}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \text{sen } m\theta] J_m\left(\nu_{mn} \frac{r}{L}\right).$$

¹Perchè gli zeri sono semplici?

Se consideriamo la condizione di Neumann al posto di quella di Dirichlet, arriviamo alla soluzione generale

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta) = & a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{0n} J_0\left(\nu_{0n} \frac{r}{L}\right) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta] J_m\left(\nu_{mn} \frac{r}{L}\right),\end{aligned}$$

dove $0 < \nu_{m1} < \nu_{m2} < \dots$ sono gli zeri della derivata prima $J'_m(\rho)$ della funzione di Bessel di ordine m . La spiegazione per il termine costante a_{00} nello sviluppo per $\psi(r, \theta)$ è il fatto che la funzione costante soddisfa l'equazione di Helmholtz con la condizione di Neumann per $k = 0$.

3. Separazione in Coordinate Sferiche. Consideriamo l'equazione di Schrödinger

$$\Delta\psi + k^2\psi = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\psi$$

nelle variabili (x, y, z) per $k > 0$, dove il potenziale V dipende soltanto dalla variabile $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. È compreso il caso dell'equazione di Helmholtz ($V \equiv 0$). Ponendo

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)S(\theta, \varphi),$$

dove $R(r)$ e $S(\theta, \varphi)$ sono funzioni di classe C^2 in $r \in (0, +\infty)$ e $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times (0, \pi)$, si trova facilmente

$$\begin{aligned}0 = \frac{\Delta\psi}{\psi} + k^2 - V = & \frac{1}{R(r)} \left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] \\ & + \frac{1}{r^2 S(\theta, \varphi)} \left[\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\sin\varphi \frac{\partial S}{\partial\varphi} \right) \right] + k^2 - V(r).\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\sin\varphi \frac{\partial S}{\partial\varphi} \right) = -CS(\theta, \varphi)$$

e

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{C}{r^2} \right) R(r) = V(r)R(r),$$

dove C è una costante.

L'equazione differenziale per $S(\theta, \varphi)$ ha soltanto una soluzione non banale per certi valori della costante C . Per tali valori di C le funzioni $S(\theta, \varphi)$ sono multipli delle cosiddette funzioni sferiche.

Consideriamo ora l'equazione per $S(\theta, \varphi)$. Ponendo

$$S(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

si trova

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{1}{\sin\varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin\varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) + C = 0.$$

Come di solito,

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2,$$

dove $m = 0, 1, 2, \dots$. Utilizzando la trasformazione $X(\xi) = \Phi(\arccos \xi)$, $\xi = \cos \varphi$ arriviamo all'equazione differenziale

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right) + \left(C - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) X(\xi) = 0.$$

Quest'equazione si chiama l'equazione per le funzioni associate di Legendre. Le sue soluzioni non banali limitate se $\xi \rightarrow \pm 1$ esistono soltanto per $C = l(l+1)$ dove $l = m, m+1, m+2, \dots$. Nel caso particolare $m = 0$ si ottiene l'equazione di Legendre

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi} \right) + l(l+1)X(\xi) = 0,$$

dove $l = 0, 1, 2, \dots$.

Ritorniamo all'equazione per $R(r)$ con $C = l(l+1)$:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R(r) = \left(V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R(r),$$

dove $m = -l, -l+1, \dots, l-2, l-1, l$.

Nella meccanica quantistica il dominio dell'equazione originale è \mathbb{R}^3 . Per descrivere gli stati limite di una particella che si muove in un campo di potenziale $V(r)$, si richiede che $\psi \in L_2(\mathbb{R}^3)$. Siccome $dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi = -r^2 dr d\theta d\xi$ e lo sviluppo come funzione di θ è una serie di Fourier, risulta una condizione del tipo $r\psi(r) \in L_2(0, +\infty)$ per ψ che dipende soltanto da r . Inoltre, l'andamento asintoto $J_m(\rho) \sim \text{cost}_m \rho^m$ con costante $\text{cost}_m \neq 0$ implica la condizione al contorno $R(0^+)$ finito per $l = 0$ e $R(0^+) = 0$ per $l = 1, 2, \dots$. Lasciamo perdere i dettagli.

Nel caso dell'equazione di Helmholtz [$V(r) \equiv 0$] nel dominio $D = \{(x, y, z) : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq L\}$ richiediamo che $R(0^+)$ sia finito e che $R(L) = 0$ [condizione di Dirichlet] oppure $R'(L) = 0$ [condizione di Neumann].

Riferimenti bibliografici

- [1] Murray R. Spiegel, *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York 1959 (traduzione italiana: *Analisi Vettoriale*).