Tutorato di Matematica Applicata

Esercitazione 10: Esercizi per la preparazione della Seconda Prova Parziale

Esercizio 1 (2° Prova Parziale 13 gennaio 2022)
Si risolva, mediante la fattorizzazione PA=LU, il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

Soluzione
La fattorizzazione è data da

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/5 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 6/7 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 14/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 0 & 6/7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inoltre $\det A = 12$, $x = [-\frac{7}{6}, 2, \frac{1}{2}, -\frac{5}{3}]^T$.

Esercizio 2 (2° Prova Parziale 13 Gennaio 2022)
Si consideri il sistema $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \gamma & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro γ la matrice A è invertibile e si studi al variare del parametro la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Posto $\gamma = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $x^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione
La matrice A è invertibile per $\gamma \neq 0$. Il metodo di Jacobi converge $\forall \gamma \in \mathbb{R}$. Le due iterate di Gauss-Seidel sono $x^{(1)} = [1, 0, 0]^T, x^{(2)} = [1, 0, 0]^T$.

Esercizio 3 (2° Prova Parziale 11 Gennaio 2021)
Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \frac{y'}{y} - x, & x \in [0,4] \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzione Le soluzioni sono $\eta_1 = [2,3]^T, \eta_2 = [\frac{7}{2}, \frac{7}{2}]^T, \eta_3 = [\frac{21}{4}, \frac{7}{2}]^T$.

Esercizio 4 (2° Prova Parziale 28 Gennaio 2020)
Si classifichi il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{4}\left[3f(x_k, \eta_k) + 2\beta f\left(x_k + \frac{5\beta}{4\alpha}h, \eta_k + \frac{5\beta}{4\alpha}hf(x_k, \eta_k)\right)\right]$$

e se ne studi la stabilità, la consistenza e la convergenza. Si classfichi, inoltre, il seguente schema numerico

$$\eta_{k+1} = \frac{1}{2}(\delta + 1)\eta_{k-1} + 2hf(x_k, \eta_k)$$

e se ne studi la stabilità al variare del parametro reale δ.

Soluzione
Il primo metodo è monostep esplicito ed è stabile, dal teorema, per $\alpha \neq 0$. Inoltre è consistente, e quindi convergente, per $\beta = \frac{1}{2}, \alpha \neq 0$; è di ordine massimo per $\beta = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{5}{16}$. Il secondo è un metodo multistep esplicito ed è stabile per $-3 \leq \delta \leq 1$.