Tutorato di Matematica Applicata

Esercitazione 1: Algebra lineare

Esercizio 1 (1° Prova Parziale 15 Novembre 2016)
Si considerino i seguenti vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Costruire, mediante il procedimento di Gram-Schmidt modificato, l'insieme di vettori ortonormali $\{q_1, q_2, q_3\}$.
Considerando poi la matrice $A = [q_1 q_2, q_3]$, calcolare $B = A^T A$ e dire se la matrice A è invertibile e si indichi, in tal caso, la sua inversa.

Soluzione
L'insieme dei vettori ortonormali è dato da

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{110}} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad q_3 = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A è ortogonale, quindi $B = A^T A = I$, quindi è invertibile con inversa $A^{-1} = A^T$.

Esercizio 2 (1° Prova Parziale 5 Novembre 2019)
Si considerino i seguenti vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dire se v_1 è ortogonale a v_2 e calcolare la norma $\infty, 1$ e 2 del vettore v_3. Costruire, mediante il procedimento di Gram-Schmidt modificato, l'insieme di vettori ortonormali $\{q_1, q_2, q_3\}$.
Infine, calcolare $A = v_3 v_2^T$ e dire quanto vale il suo determinante.

Soluzione
I vettori v_1 e v_2 non sono ortogonali. $\|v_3\|_1 = 6, \|v_3\|_2 = \sqrt{10}, \|v_3\|_\infty = 2$.
L'insieme dei vettori ortonormali è dato da

$$q_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}, \qquad q_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}, \qquad q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

La matrice

$$A = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 1 & -1\\4 & -2 & -2 & 2\\4 & -2 & -2 & 2\\2 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

il suo rango è pari a 1 quindi $\det(A) = 0$.

Esercizio 3 (1° Prova Parziale 15 Novembre 2021)
Consideriamo le matrici

$$A = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\-2 & 2 & 0\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\\alpha & \beta & 0\\0 & \beta & 1\end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Dire se Q è ortogonale e deteminare il valori di α e β che rendono B l'inversa di A. Fissati tali valori, calcolare $\det(A), \det(Q)$ e $\det(M)$, con $M = AQ$, e M^{-1}. Infine determinare lo spettro e il raggio spettrale di Q.

Soluzione
Q è ortogonale. B è l'inversa di A per $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{2}$.
I determinanti sono pari a $\det(A) = 8$, $\det(Q) = 1$ e $\det(M) = \det(A)\det(Q) = 8$. L'inversa di M è la matrice

$$M^{-1} = (AQ)^{-1} = Q^{-1}A^{-1} = Q^T B = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}-1}{8} & \frac{-1}{4} & 0\\\frac{\sqrt{3}+1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}.$$

Lo spettro e il raggio spettrale di Q sono, rispettivamente,
$\sigma(Q) = \{1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\}$ e $\rho(Q) = 1$.

Esercizio 4 (1° Prova Parziale 5 Novembre 2019)
Consideriamo le matrici

$$A = \begin{bmatrix}\alpha & 1 & 0\\1 & 3\alpha & 1\\0 & 1 & \alpha\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}2\beta & -1 & \beta\\-1 & 1 & -1\\\beta & -1 & 2\beta\end{bmatrix}.$$

Determinare α tale che A sia invertibile. Fissato quindi $\alpha = 1$, trovare β tale che B sia l'inversa di A e, per questi valori, trovare lo spettro di A e il raggio spettrale di A, B e A^3. Calcolare infine la norma ∞ di $y = Ax$ con $x = (2, i, 1+i)^T$.

Soluzione

A è invertibile per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. B è l'inversa di A per $\beta = 1$.
Lo spettro di A è $\sigma(A) = \{1, 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$ e il suo raggio spettrale $\rho(A) = 2 + \sqrt{3}$.
Mentre $\rho(B) = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ e $\rho(A^3) = (\rho(A))^3 = (2 + \sqrt{3})^3$. Infine

$$y = \begin{bmatrix} 2+i \\ 3+4i \\ 1+2i \end{bmatrix},$$

e $\|y\|_\infty = 5$.