Tutorato di Matematica Applicata

Esercitazione 2: Serie di Fourier

Esercizio 1
Sviluppare in Serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < \pi \end{cases}$$

Stabilire se la funzione è differenziabile termine a termine.

Soluzioni
La Serie di Fourier della funzione è

$$S_f(x) = \left(1 - \frac{3}{2\pi}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ (\sin k)(1 + 2\cos k)\cos kx + [2(-1)^k - \cos 2k - \cos k] \sin kx \right\},$$

inoltre non è differenziabile termine a termine.

Esercizio 2
Sviluppare in Serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ \sin x, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

Stabilire se la funzione è differenziabile termine a termine.

Soluzioni
La Serie di Fourier della funzione è

$$S_f(x) = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{1}{1-k^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k \right] \sin kx,$$

inoltre non è differenziabile termine a termine.

Esercizio 3

Sviluppare in Serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, -1/2) \cup (1/2, 1], \\ 2(1+x), & x \in [-1/2, 0], \\ 2(1-x), & x \in [0, 1/2] \\ f(x+1), & \text{altrove.} \end{cases}$$

Stabilire, inoltre, motivando opportunamente la risposta, quale è il valore della serie di Fourier di f nei punti $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$. Dire, infine, se questa è differenziabile termine a termine.

Soluzioni

La Serie di Fourier della funzione è

$$S_f(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{k\pi} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k\pi} \right] \cos k\pi x,$$

inoltre non è differenziabile termine a termine. I valori assunti dalla Serie di Fourier sono

. $x = \frac{1}{4}$ $\quad S_f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) = \frac{3}{2}$,

. $x = \frac{1}{2}$ $\quad S_f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}(f(\frac{1}{4}^+) + f(\frac{1}{4}^-)) = \frac{1}{2}$,

. $x = 1$ $\quad S_f(1) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to 1^-} f(x) + \lim_{x \to -1^+} f(x)) = 0$.