Tutorato di Matematica Applicata

Esercitazione 3: ODE con le Serie di Fourier

Esercizio 1 (1° Parziale 12 Novembre 2018)
Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-4,4]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'' + 5y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} -1, & -4 \le x < \pi \\ \cos x, & -\pi \le x < \pi \\ -1, & \pi \le x \le 4 \end{cases}$$

Soluzioni La Serie di Fourier del temine noto è

$$S_f(x) = \frac{\pi - 4}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{2k\pi}{16 - k^2\pi^2} + \frac{2}{k\pi} \Big) \sin\Big(k\frac{\pi^2}{4}\Big) \cos\Big(k\frac{\pi}{4}x\Big).$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \frac{\pi - 4}{20} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{16}{80 - k^2\pi^2} a_k \Big) \cos\Big(k\frac{\pi}{4}x\Big),$$

con $a_k = \Big(\frac{2k\pi}{16-k^2\pi^2} + \frac{2}{k\pi}\Big) \sin\Big(k\frac{\pi^2}{4}\Big)$. f è differenziabile termine a termine.

Esercizio 2
Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-3,3]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'' - 2y' + y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & -3 \le x < 0 \\ 2x, & 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

Soluzioni La Serie di Fourier del temine noto è

$$S_f(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{6}{k^2\pi^2}[(-1)^k - 1] \Big) \cos\Big(k\frac{\pi}{3}x\Big) + \Big(-\frac{1}{k\pi}[5(-1)^k + 1] \Big) \sin\Big(k\frac{\pi}{3}x\Big).$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos\left(k\frac{\pi}{3}x\right) + \tilde{b}_k \sin\left(k\frac{\pi}{3}x\right),$$

con $\tilde{a}_k = \frac{27}{(k^2\pi^2+9)^2}\left(\frac{9-k^2\pi^2}{3}a_k + 2k\pi b_k\right), \tilde{b}_k = \frac{27}{(k^2\pi^2+9)^2}\left(\frac{9-k^2\pi^2}{3}b_k - 2k\pi a_k\right)$, dove $a_k = \left(\frac{6}{k^2\pi^2}[(-1)^k - 1]\right), b_k = \left(-\frac{1}{k\pi}[5(-1)^k + 1]\right)$. f non è differenziabile termine a termine.

Esercizio 3
Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$3y' + y = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \\ x - \frac{\pi}{2}, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Soluzioni La Serie di Fourier del temine noto è

$$S_f(x) = \sum_{k=1} \infty \left(\frac{-1}{k}\right) \sin(2kx).$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{36k^2+1}\right) \cos(2kx) + \left(-\frac{1}{k(36k^2+1)}\right) \sin(2kx).$$

f non è differenziabile termine a termine.

Esercizio 4
Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e dire se $f(x)$ è differenziabile termine a termine

$$y'' - 2y' = f(x), \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < \pi \end{cases}$$

Soluzioni La Serie di Fourier del temine noto è

$$S_f(x) = \left(1-\frac{3}{2\pi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k\pi}(\sin k)(1+2\cos k)\right) \cos(kx)+\left(-\frac{1}{k\pi}[2(-1)^k-\cos 2k-\cos k]\right) \sin(kx).$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$y(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos(kx) + \tilde{b}_k \sin(kx),$$

con $\tilde{a}_k = \frac{2b_k - ka_k}{k(k^2+4)}, \tilde{b}_k = \frac{-kb_k - 2a_k}{k(k^2+4)}$
dove $a_k = \Big(-\frac{1}{k\pi}(\sin k)(1+2\cos k)\Big), b_k = \Big(-\frac{1}{k\pi}[2(-1)^k - \cos 2k - \cos k]\Big)$. f non è differenziabile termine a termine.