Tutorato di Matematica Applicata

Esercitazione 4: Trasformate di Fourier e ODE

Esercizio 1

Eseguire i seguenti calcoli

a) 1° Prova Parziale 15 Novembre 2021

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(3(k+1))e^{-ik}}{k+1}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{\cos(x+2))}{5+i(x+2)}\right\}$$

b) 1° Prova Parziale 12 Novembre 2018

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{ik}{k^2-4k+6}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{e^{7ix}\sin 5x}{1-5ix}\right\}$$

Soluzioni

a)

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{i(1-x)}\Big[H(x+2) - H(x-4)\Big],$$

$$F(k) = \pi e^{2ik}\Big[e^{5(k-1)}H(1-k) + e^{5(k+1)}H(-1-k)\Big].$$

b)

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^{2ix}\Big[e^{-\sqrt{2}x}H(x) - e^{\sqrt{2}x}H(-x)\Big] + \frac{\sqrt{2}i}{2}e^{-\sqrt{2}|x|+2ix},$$

$$F(k) = \frac{\pi}{5i}\Big[e^{-\frac{1}{5}(k-12)}H(k-12) + e^{-\frac{1}{5}(k-2)}H(k-2)\Big].$$

Esercizio 2

Calcolare $(f * g)(x)$ nel caso in cui

$$f(x) = e^{4x}H(-x), \qquad g(x) = H(x-3) - H(x-5).$$

Determinare inoltre (Prova totale 10 Gennaio 2019)

$$\mathcal{F}\left\{e^{-x}H(x-3) * \frac{x}{2x^2+5}\right\}.$$

Soluzioni

La convoluzione

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{4x}(e^{-12} - e^{-20}) & x < 3 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{4x-20} & 3 \le x \le 5 \\ 0 & x > 5. \end{cases}$$

mentre la trasformata è pari a

$$F(k) = \Big(\frac{e^{-3(ik+1)}}{1+ik}\Big)\Big(\frac{\pi}{2i}\Big[e^{-\sqrt{5/2}k}H(k) - e^{\sqrt{5/2}k}H(-k)\Big]\Big).$$

Esercizio 3 (1° Prova Parziale 15 Novembre 2022)

Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$5y' + 7y = [H(x+3) - H(x-5)], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni

La soluzione è data da

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ \frac{1}{7}\Big(1 - e^{-\frac{7}{5}(x+3)}\Big) & -3 \le x \le 5 \\ \frac{1}{7}\Big(e^{-\frac{7}{5}(x-5)} - e^{-\frac{7}{5}(x+3)}\Big) & x > 5 \end{cases}$$

Esercizio 4 (Recupero della 1° prova intermedia (25 gennaio 2023))

Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - \pi y = e^{-2x}H(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzioni

La soluzione è data da

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-2x}}{2+\sqrt{\pi}} + \frac{e^{-\sqrt{\pi}x}-e^{-2x}}{2-\sqrt{\pi}}\right) & x > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{\sqrt{\pi}x}}{2+\sqrt{\pi}} & x < 0 \end{cases}$$