Tutorato di Matematica Applicata

Esercitazione 5: Condizionamento e Metodo diretti per sistemi lineari semplici

Esercizio 1

Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

con α un parametro reale. Determinare per quale valore del parametro B è l'inversa di A e, per tale valore, calcolare il condizionamento in norma $1, 2, \infty$ di A.

Soluzioni

B è l'inversa di A per $\alpha = \frac{1}{3}$. $k_1(A) = \frac{25}{9}$, $k_\infty(A) = \frac{16}{9}$, $k_2(A) = \frac{10+\sqrt{19}}{9}$.

Esercizio 2

Si considerino le seguenti matrici

$$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -2 \\ \alpha & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

con α un parametro reale. Si determini per quale valore di α la matrice Q è ortogonale e, per tale valore, si calcoli il numero di condizionamento in norma $1, 2$ e ∞. Si dica, motivando la risposta, se R è invertibile e se i suoi autovalori sono positivi. Ponendo $\alpha = 2$, risolvere nel modo più conveniente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A = QR, b = [1, 1, 1]^T$.

Soluzioni

Q è ortogonale per $\alpha = 2$. $k_1(Q) = k_\infty(Q) = \frac{5}{3}$, $k_2(Q) = 1$.
R è triangolare superiore quindi $\det(R) = -3 \neq 0$, $\sigma(R) = \{-3, -1, -1\}$, quindi gli autovalori sono tutti negativi. La soluzione del sistema è $x = \frac{1}{3}[-2, 1, 5]^T$.

Esercizio 3
Si considerino le matrici

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \beta & 0 \\ -\beta & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove α, β sono parametri reali. Si dica, senza fare calcoli e motivando la risposta, per quali valori di α la matrice L è non singolare e per quali è definita positiva. Determinare i valori di β per cui Q è ortogonale e calcolare il condizionamento in norma $1, 2, \infty$ di D.
Risolvere infine i seguenti sistemi

- Fissato $\alpha = 2$, $L\mathbf{x} = \mathbf{b_1}$ con $b_1 = [1, 0, 1]^T$
- Fissato uno dei valori di β, $Q\mathbf{x} = \mathbf{b_2}$ con $b_2 = [2, 2, 1]^T$
- $D\mathbf{x} = \mathbf{b_3}$ con $b_3 = [6, 1, 5]^T$

Soluzioni
L è triangolare inferiore ed è non singolare per $\alpha \neq 0$ e definita positiva per $\alpha > 0$. Q è ortogonale per $\beta = \pm\frac{1}{2}$. D è diagonale, quindi $k_1(D) = k_\infty(D) = 5$ e $k_2(D) = 5$. La soluzione del sistema $L\mathbf{x} = b_1$ è $x = [1, -1, 0]^T$, del sistema $Q\mathbf{x} = b_2$ è $x = [\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} + 1, 1]^T$ per $\beta = \frac{1}{2}$, $x = [\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1, 1]^T$ per $\beta = -\frac{1}{2}$. La soluzione del sistema $D\mathbf{x} = b_3$ è $x = [3, -\frac{1}{5}, 5]^T$.