Tutorato di Matematica Applicata

Esercitazione 6: Metodo di Gauss con Pivoting per la risoluzione di sistemi lineari

Esercizio 1 (2° Prova Parziale 11 gennaio 2023)
Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 1 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -6 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 12 \\ 2x_1 - x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante la fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti e la seconda colonna della sua inversa.

Soluzioni
La fattorizzazione è data da

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inoltre la soluzione del sistema è $x = [2, 1, -1, 0]^T$, il determinante è pari a $\det(A) = 1024$ e la seconda colonna dell'inversa di A è $[\frac{39}{256}, -\frac{17}{128}, \frac{5}{64}, \frac{3}{32}]^T$.

Esercizio 2
Calcolare, mediante la fattorizzazione PA=LU, l'inversa della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzioni
La fattorizzazione è data da

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'inversa di A è

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Esercizio 3
Determinare l'inversa della seguente matrice

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Risolvere infine il seguente problema $Lx = b$ con $b = [2, 1, 1]^T$.

Soluzione L'inversa di L è la matrice

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema è $x = [2, \frac{7}{2}, -\frac{7}{6}]^T$.