Tutorato di Matematica Applicata

Esercitazione 7: Metodi iterativi per la risoluzione di sistemi lineari e metodi alle differenze finite per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

Esercizio 1 (2° Prova Parziale 10 gennaio 2019)
Si consideri il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 + \beta x_2 = 2 \\ \beta x_1 + 2x_2 - \beta x_3 = 3 \\ -\beta x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

dove β è un parametro reale. Si dica per quali valori di β la matrice dei coefficienti è non singolare e si studi la convergenza del metodo di Jacobi al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Posto $\beta = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $x^{(0)} = [1, 1, 0]^T$.

Soluzioni
La matrice è non singolare per $\beta \neq \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. Il metodo di Jacobi converge per $-\frac{\sqrt{6}}{2} < \beta < \frac{\sqrt{6}}{2}$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $x^{(1)} = [1, 1, 2/3]^T, x^{(2)} = [1, 4/3, 7/9]^T$.

Esercizio 2 (Recupero Seconda Prova Parziale 28 Gennaio 2020)
Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

determinare per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 0, 2]^T$. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema e, assegnato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Jacobi considerando come vettore iniziale $x^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzioni
La matrice è invertibile per $\alpha \neq 0, \alpha \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Gli autovalori sono positivi per

$\alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\alpha < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $x^{(1)} = [-1/2, 0, 0]^T, x^{(2)} = [1/2, 0, 5/8]^T$.

Esercizio 3 (Prova totale 11 Gennaio 2021)
Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y' + 2y - x, & x \in [0,4] \\ y(\frac{1}{2}) = 1, y'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = \frac{3}{2}$.

Soluzioni

La soluzioni sono $\eta_1 = (1, 3/4)^T, \eta_2 = (11/8, 13/8)^T$.

Esercizio 4 (Prova totale 8 Aprile 2021) (Soluzione vista a lezione)
Si consideri il seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\frac{7}{6}f(x_k, \eta_k) - \frac{1}{6}f(x_k - 3h, \eta_k - 3hf(x_k, \eta_k))\right].$$

Si stabilisca una sua classificazione e di dica se è del secondo ordine. Si applichi, inoltre, tale schema al seguente problema di Cauchy per approssimare la soluzione nel punto $x = \frac{1}{4}$ con $h = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} y' = 3x & x \in [0,2] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$